

Bài báo nghiên cứu TÍNH TRIỆT TIÊU CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN NHANH TRÊN BIÊN HỖN HỢP VỚI NGUỒN PHI TUYẾN NONLOCAL

Lưu Lê Khải Cường*, Bùi Ngọc Huy, Lê Tuấn Khải

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Lưu Lê Khải Cường – Email: khaicuong2608@gmail.com

Ngày nhận bài: 02-01-2024; Ngày nhận bài sửa: 21-3-2024; Ngày nhận đăng: 05-02-2025

TÓM TẮT

Trong bài nghiên cứu này, chúng tôi xây dựng các điều kiện cho tính triệt tiêu của nghiệm tại thời điểm xác định của phương trình khuếch tán, $u_t = \Delta u^m + a \int_{\Omega} u^p(y, t) dy$, $0 < m < 1$, $a, p > 0$ trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ với $N > 2$ với điều kiện biên hỗn hợp $u(x) = 0, x \in \Gamma_1; \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_2$, trong đó Γ_1, Γ_2 là hai phân hoạch khác rỗng của $\partial\Omega$ và n là vector pháp tuyến bên ngoài biên. Cụ thể hơn, bài nghiên cứu chỉ ra rằng nếu $p > m$ thì mọi nghiệm có hàm nguồn nhỏ sẽ triệt tiêu và nếu $p < m$ hoặc $p = m$ và $a\mu > 1$, nghiệm cực đại của phương trình sẽ dương trong Ω với mọi $t > 0$, trong đó $\mu = \int_{\Omega} \varphi(x) dx$ với φ là nghiệm dương của phương trình elliptic $-\Delta \varphi(x) = 1, x \in \Omega; \varphi(x) = 0, x \in \Gamma_1; \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_2$.

Từ khóa: phương trình khuếch tán nhanh; nguồn Nonlocal; triệt tiêu tại thời điểm xác định

1. Giới thiệu

Cho Ω là miền trơn bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ và Γ_1, Γ_2 là phân hoạch của biên trơn $\partial\Omega$, trong đó Γ_1 khác rỗng, đóng và $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ là hàm không âm. Chúng tôi xét phương trình

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u + a \int_{\Omega} u^p(y, t) dy, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0 & , x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & , x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

với $0 < m < 1$ và $a, p > 0$, đồng thời n là vector pháp tuyến ngoài biên $\partial\Omega$.

Điều chúng tôi quan tâm ở đây là tính triệt tiêu của nghiệm không âm tại thời điểm hữu hạn cho phương trình (1.1), tức tồn tại $T > 0$ hữu hạn sao cho nghiệm là không tầm

Cite this article as: Luu, L. K. C., Bui, N. H., & Le, T. K. (2025). Extinction for a fast diffusion equation with mixed boundary conditions with a nonlinear nonlocal source. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 22(7), 1199-1210. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.7.4083\(2025\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.7.4083(2025))

thường với $0 < t < T$, nhưng $u(x, t) \equiv 0$ với mọi $(x, t) \in \Omega \times (T, \infty)$, khi đó T được gọi là thời điểm triệt tiêu.

Tính triệt tiêu trong phương trình khuếch tán trên biên Dirichlet lần đầu được chứng minh bởi (Sabinina, 1962), kể từ đó, đã có hàng loạt các kết quả về hướng nghiên cứu này (Friedman & Herrero, 1987; Kalashnikov, 1974; Herrero & Velazquez, 1992). Có thể lấy ví dụ, tính triệt tiêu của phương trình

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + au^p & , x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0 & , x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

đã được khảo sát thông qua nhiều bài nghiên cứu (Borelli & Ughi, 1994; Ferreira & Vazquez, 2001; Leoni, 1996; Peletier & Junning, 1990; Peletier & Junning, 1991; Li & Wu, 2005). Những kết quả mới nhất về tính triệt tiêu của phương trình (1.2) với $0 < m < 1$ và $a, p > 0$ được giới thiệu trong (Li & Wu, 2005). Bài nghiên cứu này chỉ ra rằng nếu $p > m$ thì nghiệm duy nhất với dữ liệu đầu nhỏ sẽ triệt tiêu tại thời điểm hữu hạn, nếu $p < m$ thì nghiệm cực đại luôn dương trong Ω với mọi $t > 0$. Với trường hợp $p = m$ thì giá trị riêng đầu tiên của $-\Delta$ trong Ω đóng vai trò quan trọng.

Ngoài ra, tính triệt tiêu trong phương trình khuếch tán trên biên Neumann cũng được khảo sát thông qua hàng loạt nghiên cứu (Alan & Mark, 2008; Chengyuan et al., 2014; Yves & Andrey, 2007)). Có thể lấy ví dụ, tính triệt tiêu của phương trình

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |u|^q - \int_{\Omega} u dx & , x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & , x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

đã được chỉ ra bởi Chengyuan và cộng sự (2014). Phương trình (1.3) với $p = 2$ thường được sử dụng để mô tả hiện tượng bùng nổ dân số và trong khoa học sinh học (Budd & Dold, 1993; Hu & Yin, 1995). Nếu $1 < p < 2$ thì phương trình xuất hiện trong lý thuyết của chất lỏng phi Newton (Alikakos & Evans, 1983).

Với những điều kiện biên khác nhau sẽ có những kỹ thuật hay phương pháp nghiên cứu khác nhau. Do đó ở bài nghiên cứu này, như đề cập ở trên chúng tôi sẽ đưa ra một vài kết quả cho bài toán (1.1) trên biên hỗn hợp giữa hai biên Dirichlet và biên Neumann.

2. Nội dung nghiên cứu

Chúng tôi sẽ xây dựng khái niệm về nghiệm địa phương cho bài toán, tức với độ chính xác nhỏ bất kỳ chúng tôi đưa ra nghiệm gần đúng. Trước tiên, chúng tôi sẽ đặt lớp các hàm thử không âm

$$F = \left\{ \xi : \xi \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T), \xi_t, \Delta \xi \in L^2(Q_T); \xi \geq 0, \xi|_{\Gamma_1 \times (0, T)} = 0, \frac{\partial \xi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2 \times (0, T)} = 0 \right\},$$

trong đó $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

2.1. Định nghĩa và kí hiệu

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in L^\infty(Q_T)$ được gọi là nghiệm dưới (nghiệm trên) của bài toán (1.1) trên Q_T nếu thỏa các điều kiện:

- (i) $u(x, 0) \leq (\geq) u_0(x)$ trên Ω ;
- (ii) $u(x, t) \leq (\geq) 0$ trên $\Gamma_1 \times (0, T)$;
- (iii) $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \leq (\geq) 0$ trên $\Gamma_2 \times (0, T)$;
- (iv) Với mọi $t \in (0, T)$ và mọi $\xi \in F$ ta có

$$\int_{\Omega} u(x, t) \xi(x, t) dx \leq (\geq) \int_{\Omega} u_0(x) \xi(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left[u \xi_s + u^m \Delta \xi + a \int_{\Omega} u^p(y, s) dy \xi(x, s) \right] dx ds.$$

Hàm u được gọi là nghiệm địa phương của (1.1) nếu nó vừa là nghiệm dưới và nghiệm trên với một $T > 0$.

Định nghĩa 2.2. (Tính triệt tiêu của nghiệm) Cho hàm không âm $u(x, t)$. Nghiệm $u(x, t)$ được cho có tính triệt tiêu nếu tồn tại thời điểm xác định $T > 0$ sao cho $u(x, t)$ không là nghiệm tầm thường với $0 < t < T$ nhưng $u(x, t) \equiv 0$ với mọi $t > T$. Khi này T được gọi là thời điểm triệt tiêu.

2.2. Nguyên lí so sánh

Trước tiên chúng tôi cần giới thiệu đến nguyên lí so sánh.

Mệnh đề 2.3. (Nguyên lí so sánh) Cho u và v lần lượt là nghiệm dưới và nghiệm trên không âm và bị chặn của (1.1), giả sử tồn tại $\delta > 0$ sao cho $v \geq \delta$. Khi đó nếu $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ thì $u \leq v$ trên Q_T .

Chứng minh. Giả sử $u(x, 0) \leq v(x, 0)$.

Khi này từ điều kiện (iii) của nghiệm dưới u và nghiệm trên v , ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - v)(x, t) \xi(x, t) dx &\leq \int_{\Omega} [u_0(x) - v_0(x)] \xi(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} [(u - v) \xi_s + (u^m - v^m) \Delta \xi] dx ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} a \int_{\Omega} [u^p(y, s) - v^p(y, s)] dy \xi(x, t) dx ds. \end{aligned}$$

Đặt $\Phi(x, t) = \int_0^1 m[\theta u + (1 - \theta)v]^{m-1} d\theta$ và $F(x, t) = \int_0^1 p[\theta u + (1 - \theta)v]^{p-1} d\theta$. Ta có

$(u - v)\Phi(x, t) = u^m - v^m$ và $(u - v)F(x, t) = u^p - v^p$, khi đó

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - v)(x, t) \xi(x, t) dx &\leq \int_{\Omega} [u_0(x) - v_0(x)] \xi(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} (u - v) [\xi_s + \Phi \Delta \xi + a \| \Omega \| F] dx ds. \end{aligned}$$

$$\text{Do } m < 1 \text{ nên } \Phi(x, t) = \int_0^1 m[\theta u - (1-\theta)v]^{m-1} d\theta \leq \int_0^1 m[(1-\theta)v]^{m-1} d\theta = v^{m-1} \leq \delta^{m-1}.$$

Tương tự với $p < 1$ thì $F(x, t) \leq \delta^{p-1}$.

Mặt khác với $p \geq 1$, do u, v bị chặn trên Q_T nên $F(x, t)$ bị chặn. Vậy $\Phi(x, t)$ và $F(x, t)$ là các hàm không âm bị chặn trên Q_T . Do đó ta có thể chọn hàm ξ tương tự trong (Anderson, 1991, pp.118-123) để có được $u \leq v$. ■

Từ đây bằng phương pháp chính quy hóa tiêu chuẩn, chúng tôi xây dựng nghiệm địa phương của phương trình (1.1). Cụ thể chúng tôi xây dựng nghiệm của phương trình (1.1) từ nghiệm của phương trình chính quy dưới đây.

2.3. Sự tồn tại nghiệm và tính duy nhất của nghiệm với các điều kiện đặc biệt

Định lý 2.4. (Anderson, 1991) Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ và Γ_1, Γ_2 là phân hoạch của biên trơn $\partial\Omega$ và $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ là hàm không âm. Ta xét phương trình

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a \int_{\Omega} u^p(y, t) dy & , x \in \Omega, 0 < t < T, \\ u(x, t) = \frac{1}{k} & , x \in \Gamma_1, 0 < t < T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & , x \in \Gamma_2, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x) + \frac{1}{k} & , x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

với $0 < m < 1$, $a, p > 0$ và ν là vectơ pháp tuyến ngoài biên $\partial\Omega$.

Khi đó với $T > 0$ đủ nhỏ sẽ tồn tại nghiệm địa phương u_k của phương trình (2.1) trên Q_T với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $\|u_k\|_{\infty}$ bị chặn độc lập với k . Hơn nữa, với $k < l$ ta có $\frac{1}{l} \leq u_l \leq u_k$.

Mệnh đề 2.5. (Sự tồn tại nghiệm địa phương của phương trình) Cho $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ là các nghiệm của (2.1), đặt $U(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$. Khi đó $U(x, t)$ là nghiệm cực đại của (1.1). Hơn nữa, nếu v là nghiệm dưới của (1.1) thì $v \leq U$.

Chứng minh. Do dãy $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ giảm nên $U(x, t)$ là nghiệm của phương trình (1.1). Giả sử u là nghiệm của phương trình (1.1), khi đó ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_k) \xi(x, t) dx &= \int_0^t \int_{\Omega} \left[(u - u_k) \xi_s + (u^m - u_k^m) \Delta \xi \right] dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ a \int_{\Omega} [u^p(y, s) - u_k^p(y, s)] dy \xi(x, s) \right\} dx ds \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_0^t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS_x ds - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \xi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Mà $\frac{\partial \xi}{\partial n} \leq 0$ trên $\Gamma_1 \times (0, t)$ và $\xi(x, 0) \geq 0$ với mọi $x \in \Omega$ nên

$$\int_{\Omega} (u - u_k) \xi(x, t) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} \left[(u - u_k) \xi_s + (u^m - u_k^m) \Delta \xi \right] dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ a \int_{\Omega} [u^p(y, s) - u_k^p(y, s)] dy \xi(x, s) \right\} dx ds.$$

Đặt $\Phi_k(x, t) = \int_0^1 m[\theta u - (1 - \theta)u_k]^{m-1} d\theta$ và $F_k(x, t) = \int_0^1 p[\theta u - (1 - \theta)u_k]^{p-1} d\theta$, khi

đó ta có

$$\int_{\Omega} (u - u_k)(x, t) \xi(x, t) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} (u - u_k) [\xi_s + \Phi_k \Delta \xi + a \|\Omega\| F_k] dx ds.$$

Dễ chứng minh $\Phi_k(x, t)$ và $F_k(x, t)$ là hàm không âm và bị chặn. Dẫn đến ta có thể chọn hàm ξ tương tự trong (Anderson, 1991, pp.118-123,) để có được $u \leq u_k$. Do đó $U(x, t)$ là nghiệm cực đại của (1.1). Nếu v chỉ là dưới nghiệm của (1.1), lập luận trên cũng chỉ ra $v \leq u_k$ với mọi k , dẫn đến $v \leq U$. Ta hoàn thành chứng minh. ■

Tiếp theo ta sẽ xây dựng tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.1) cho một vài trường hợp đặc biệt. Trước đó, chúng tôi sẽ giới thiệu nghiệm dương duy nhất của phương trình elliptic qua bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.6. Cho Ω là miền tròn bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, có biên tròn $\partial\Omega$ thuộc C^2 và Γ_1, Γ_2 là phân hoạch của biên tròn $\partial\Omega$, trong đó Γ_1 khác rỗng và đóng. Khi đó phương trình elliptic

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 1 & , x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & , x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) = 0 & , x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

tồn tại nghiệm dương duy nhất φ trong C^2 .

Chứng minh. Sự tồn tại nghiệm duy nhất φ đã được chứng minh trong (M.Lieberman, 1986), ta sẽ chứng minh φ sẽ là nghiệm dương. Lấy $\varepsilon > 0$, từ (M.Lieberman, 1986) phương trình

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_{\varepsilon} = 1 + \varepsilon & , x \in \Omega, \\ \varphi_{\varepsilon}(x) = 0 & , x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial \varphi_{\varepsilon}}{\partial n}(x) = \varepsilon, & , x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

có nghiệm. Ta thấy $\Delta\varphi_\varepsilon < 0$ với mọi $x \in \Omega$, khi đó nếu φ_ε đạt giá trị nhỏ nhất trong phần trong của Ω tại x_0 khi đó $\Delta\varphi_\varepsilon(x_0) \geq 0$, điều này mâu thuẫn, do đó φ_ε không đạt giá trị nhỏ nhất trong phần trong của Ω .

Mặt khác, do $\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial n}(x) > 0$ trên Γ_2 nên giá trị nhỏ nhất cũng không tồn tại trên Γ_2 .

Vậy giá trị nhỏ nhất của nghiệm φ_ε sẽ đạt trên Γ_1 , tức giá trị nhỏ nhất của $\varphi_\varepsilon(x)$ là 0 hay $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$. Cho $\varepsilon \rightarrow 0$ ta có $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \geq 0$. Ta hoàn thành chứng minh. ■

Trong bài nghiên cứu này chúng tôi sẽ kí hiệu $M = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x)$ và $\mu = \int_{\Omega} \varphi(x) dx$.

Mệnh đề 2.7. Nếu $p = m$ và $a\mu \leq 1$, với μ được lấy như trong (2.2), khi đó nghiệm không âm u của (1.1) là duy nhất. Hơn nữa, nếu v là nghiệm dưới của (1.1) thì $v \leq u$.

Chứng minh. Cho u là nghiệm tùy ý của (1.1) và u_k là nghiệm của (2.1). Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_k - u) \xi(x, t) dx &= \int_0^t \int_{\Omega} \left[(u_k - u) \xi_s + (u_k^m - u^m) \Delta \xi \right] dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ a \int_{\Omega} \left[u_k^p(y, s) - u^p(y, s) \right] dy \xi(x, s) \right\} dx ds \\ &\quad - \frac{1}{k} \int_0^t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS_x ds + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \xi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Chọn hàm thử ξ là nghiệm dương $\varphi(x)$ của phương trình (2.2), khi này do $p = m$ và $a\mu \leq 1$ ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_k - u) \xi(x, t) dx &= (a\mu - 1) \int_0^t \int_{\Omega} (u_k^m - u^m) dx ds + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \xi(x, 0) dx \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{\Omega} \xi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Cho $k \rightarrow \infty$, khi đó ta có

$$\int_{\Omega} (U - u) \xi(x, t) dx \leq 0.$$

Mà ta đã chứng minh trong Mệnh đề 2.5 rằng $U \geq u$ nên $u \equiv U$. Vậy u là nghiệm duy nhất của (1.1). Đồng thời theo Mệnh đề 2.5, nếu v là nghiệm dưới thì $v \leq u$. Ta hoàn thành chứng minh. ■

3. Kết luận

Bây giờ, chúng tôi sẽ giới thiệu một số điều kiện để nghiệm phương trình (1.1) triệt tiêu hoặc không triệt tiêu tại thời điểm xác định. Trong bài nghiên cứu, chúng tôi sẽ chủ yếu xây dựng các nghiệm trên, nghiệm dưới sau đó sử dụng nguyên lý so sánh để chứng minh sự triệt tiêu hoặc không triệt tiêu tại thời điểm xác định.

Định lý 3.1. Giả sử $p < m$ hoặc $p = m$ và $a\mu > 1$. Khi đó với mọi hàm dữ kiện ban đầu không âm u_0 , nghiệm cực đại $U(x, t)$ của phương trình (1.1) sẽ không triệt tiêu.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng cách xây dựng một nghiệm dưới phù hợp và áp dụng nguyên lý so sánh cho các nghiệm dưới.

Đặt $v(x, t) = g(t)\varphi^{\frac{1}{m}}(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là nghiệm dương duy nhất của phương trình (2.2).

Với $p < m$, ta chọn $g(t)$ là nghiệm của phương trình phương trình vi phân

$$\begin{cases} g'(t) = M^{-\frac{1}{m}} \left[-g^m(t) + a \int_{\Omega} \varphi^{\frac{p}{m}}(x) dx \cdot g^p(t) \right], \\ g(0) = 0, \\ g(t) > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} v(x, t) = g(t) \cdot \varphi^{\frac{1}{m}}(x) = g(t) \cdot 0 = 0 & , x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) = g(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) = g(t) \cdot 0 = 0 & , x \in \Gamma_2, t > 0, \\ v(x, 0) = g(0) \cdot \varphi^{\frac{1}{m}}(x) = 0 \cdot \varphi^{\frac{1}{m}}(x) = 0 \leq u_0(x), & , x \in \Omega, \end{cases}$$

đồng thời do $M = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x)$ và $\frac{1}{m} > 1$ nên $\varphi^{\frac{1}{m}} \leq M^{\frac{1}{m}}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= g'(t)\varphi^{\frac{1}{m}}(x) \leq g'(t)M^{\frac{1}{m}} \\ &= M^{-\frac{1}{m}} \left[-g^m(t) + a \int_{\Omega} \varphi^{\frac{p}{m}}(x) dx \cdot g^p(t) \right] M^{\frac{1}{m}} \\ &= \Delta \varphi g^m + a \int_{\Omega} \left[g(t)\varphi^{\frac{1}{m}}(x) \right]^p dx \\ &= \Delta v^m + a \int_{\Omega} v^p(x, t) dx. \end{aligned}$$

Dẫn đến, $v(x, t)$ là nghiệm dưới (ở đây hiểu theo nghĩa từng điểm) của phương trình (1.1).

Với $p = m$ và $a\mu > 1$, ta chọn $g(t)$ là nghiệm của phương trình phương trình vi phân

$$\begin{cases} g'(t) = M^{-\frac{1}{m}} (a\mu - 1) g^m(t), \\ g(0) = 0, \\ g(t) > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Tương tự với trường hợp $p < m$ ta cũng thu được $v(x, t)$ là nghiệm dưới của phương trình (1.1).

Áp dụng Mệnh đề 2.3 với nghiệm cực đại $U(x, t)$ và nghiệm dưới $v(x, t)$, ta có được

$$U(x, t) \geq v(x, t) = g(t)\varphi^{\frac{1}{m}}(x) > 0 \quad , x \in \Omega, t > 0.$$

Do đó không tồn tại thời điểm triệt tiêu T , tức nghiệm cực đại $U(x, t)$ không có tính triệt tiêu. Ta hoàn thành chứng minh. ■

Định lý 3.2. Giả sử $p > m$. Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.1) sẽ triệt tiêu tại thời gian xác định với dữ liệu ban đầu đủ nhỏ.

Chứng minh. Đầu tiên ta sẽ nhân u^{s-1} với $s > 1$ tùy ý cho hai vế của đẳng thức đầu tiên của (1.1) và lấy tích phân trên Ω , khi đó

$$\frac{1}{s} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^s dx + \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{m+s-1}{2}} \right|^2 dx = a \int_{\Omega} u^p dx \int_{\Omega} u^{s-1} dx. \quad (3.2)$$

Trường hợp 1. $p \leq 1$, Theo bất đẳng thức Holder với mọi $k < s$, ta có

$$\int_{\Omega} u^k dx \leq \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{1}{1-\frac{k}{s}}} dx \right)^{1-\frac{k}{s}} \left(\int_{\Omega} (u^k)^{\frac{s}{k}} dx \right)^{\frac{k}{s}} = \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{1}{1-\frac{k}{s}}} dx \right)^{1-\frac{k}{s}} \left(\int_{\Omega} u^s dx \right)^{\frac{k}{s}} = |\Omega|^{1-\frac{k}{s}} \|u\|_s^k.$$

Khi đó với (3.2) bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{s} \frac{d}{dt} \|u\|_s^s + \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} \left\| \nabla u^{\frac{m+s-1}{2}} \right\|_2^2 = a \int_{\Omega} u^p dx \int_{\Omega} u^{s-1} dx \leq a |\Omega|^{2-\frac{p+s-1}{s}} \|u\|_s^{p+s-1}. \quad (3.3)$$

Với $\frac{N-2}{N+2} \leq m < 1$, lấy $s = m+1$ khi đó (3.3) trở thành

$$\frac{1}{1+m} \frac{d}{dt} \|u\|_{1+m}^{1+m} + \left\| \nabla u^m \right\|_2^2 \leq a |\Omega|^{2-\frac{p+m}{1+m}} \|u\|_{1+m}^{p+m}. \quad (3.4)$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\|u\|_{1+m}^m \leq \left[\left(\int_{\Omega} 1^{\frac{1}{1-(N-2)(1+m)/2Nm}} dx \right)^{1-\frac{(N-2)(1+m)}{2Nm}} \left(\int_{\Omega} (u^{1+m})^{\frac{2Nm}{(N-2)(1+m)}} dx \right)^{\frac{(N-2)(1+m)}{2Nm}} \right]^{\frac{m}{1+m}} = |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \|u^m\|_{\frac{2N}{N-2}}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Sobolev ta suy ra

$$\|u\|_{1+m}^m \leq |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \|u^m\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq \gamma |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \left\| \nabla u^m \right\|_2. \text{ hay } \gamma^{-1} |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \|u\|_{1+m}^m \leq \left\| \nabla u^m \right\|_2,$$

trong đó $\gamma > 0$ là hằng số. Từ đây, biến đổi đẳng thức (3.4) ta có

$$\frac{1}{1+m} \|u\|_{1+m}^{1+m} + \gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} \|u\|_{1+m}^{2m} \leq a |\Omega|^{2-\frac{p+m}{1+m}} \|u\|_{1+m}^{p+m}. \quad (3.5)$$

Đặt $J(t) = \int_{\Omega} u^{1+m} dx$, khi đó (3.5) có thể viết lại thành

$$\frac{1}{1+m} J'(t) \leq -J^{\frac{2m}{1+m}}(t) \left[\gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - a |\Omega|^{2-\frac{p+m}{1+m}} J^{\frac{p-m}{1+m}}(t) \right].$$

Ta chọn u_0 đủ nhỏ sao cho

$$\gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - a |\Omega|^{2-\frac{p+m}{1+m}} J^{\frac{p-m}{1+m}}(0) > 0$$

khi đó ta có

$$\frac{1}{1+m} J'(t) \leq -c_1 J^{\frac{2m}{1+m}}(t),$$

trong đó $c_1 = \gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - a |\Omega|^{2 - \frac{p+m}{1+m}} J^{\frac{p-m}{1+m}}(0)$. Do $\frac{2m}{1+m} < 1$ nên $J(t)$ sẽ triệt tiêu tại thời điểm xác định, dẫn đến $u(x, t)$ cũng triệt tiêu tại thời điểm xác định.

Với $0 < m < \frac{N-2}{N}$, ta chọn $s = \frac{N}{2}(1-m) > 1$, khi đó theo bất đẳng thức Sobolev ta có

$$\|u\|_s^{\frac{m+s-1}{2}} = \left[\int_{\Omega} \left(u^{\frac{m+s-1}{2}} \right)^{\frac{2N}{N-2}} dx \right]^{\frac{N-2}{2N}} = \|u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq \gamma \|\nabla u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_2 \text{ hay } \gamma^{-1} \|u\|_s^{\frac{m+s-1}{2}} \leq \|\nabla u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_2.$$

Từ đây, ta đặt $J(t) = \int_{\Omega} u^s dx$, khi đó (3.3) trở thành

$$\frac{1}{s} J'(t) \leq -J^{\frac{m+s-1}{s}}(t) \left[\gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - a |\Omega|^{\frac{s+1-p}{s}} J^{\frac{p-m}{s}}(t) \right].$$

Ta chọn u_0 đủ nhỏ sao cho

$$\gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - a |\Omega|^{2 - \frac{p+s-1}{s}} J^{\frac{p-m}{s}}(0) > 0.$$

Dẫn đến

$$\frac{1}{s} J'(t) \leq -c_2 J^{\frac{m+s-1}{s}}(t),$$

trong đó $c_2 = \gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - a |\Omega|^{2 - \frac{p+s-1}{s}} J^{\frac{p-m}{s}}(0)$. Do $\frac{m+s-1}{s} < 1$ nên $J(t)$ sẽ triệt tiêu tại thời điểm xác định, dẫn đến $u(x, t)$ cũng triệt tiêu tại thời điểm xác định.

Trường hợp 2. $p > 1$, lấy $v(x, t) = k\varphi^{\frac{1}{m}}$ với φ là nghiệm dương duy nhất của (2.2) và do $p > m$ nên nếu $k > 0$ đủ nhỏ sao cho $0 \geq -k^m + ak^p \int_{\Omega} \varphi^{\frac{p}{m}} dx$, khi đó ta có

$$\begin{cases} v(x, 0) = k\varphi^{\frac{1}{m}} \geq 0 = v_0 & , x \in \Omega, \\ v(x, t) = k\varphi^{\frac{1}{m}} \geq 0 & , x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) = \frac{k\varphi^{\frac{1}{m}-1}}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) = 0 & , x \in \Gamma_2, t > 0, \\ v_t(x, t) \geq 0 \geq -k^m + ak^p \int_{\Omega} \varphi^{\frac{p}{m}} dx = \Delta v^m + a \int_{\Omega} v^p(y, t) dy & , x \in \Omega, t > 0, \end{cases}$$

Dẫn đến $v(x, t)$ là nghiệm trên của phương trình (1.1). Nếu $u_0(x) \leq k\varphi_1^{\frac{1}{m}} = v_0(x)$ với mọi $x \in \Omega$ thì theo nguyên lí so sánh (Mệnh đề 2.3) thì

$$u(x, t) \leq v(x, t) = k\varphi_1^{\frac{1}{m}} \leq kM^{\frac{1}{m}}, \quad t > 0.$$

Từ đây cùng với bất đẳng thức Holder, (3.2) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^s dx + \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{m+s-1}{2}} \right|^2 dx &= a \int_{\Omega} u^p dx \int_{\Omega} u^{s-1} dx \\ &\leq ak^{p-1} M^{p-1} \int_{\Omega} u dx \int_{\Omega} u^{s-1} dx \\ &\leq ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| \int_{\Omega} u^s dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Với $\frac{N-2}{N+2} \leq m < 1$, lấy $s = m+1$ khi đó (3.5) trở thành

$$\frac{1}{1+m} \frac{d}{dt} \|u\|_{1+m}^{1+m} + \|\nabla u^m\|_2^2 \leq ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| \|u\|_{1+m}^{1+m}, \quad (3.6)$$

mặt khác theo bất đẳng thức Sobolev ta suy ra

$$\|u\|_{1+m}^m \leq |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \|u^m\|_2 \leq \gamma |\Omega|^{\frac{m}{1+m} - \frac{N-2}{2N}} \|\nabla u^m\|_2 \text{ hay } \gamma^{-1} |\Omega|^{\frac{N-2}{2N} - \frac{m}{1+m}} \|u\|_{1+m}^m \leq \|\nabla u^m\|_2,$$

trong đó $\gamma > 0$ là hằng số. Từ đây, biến đổi (3.6) ta có

$$\frac{1}{1+m} \frac{d}{dt} \|u\|_{1+m}^{1+m} + \gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} \|u\|_{1+m}^{2m} \leq ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| \|u\|_{1+m}^{1+m}. \quad (3.7)$$

Đặt $J(t) = \int_{\Omega} u^{1+m} dx$, khi đó (3.7) có thể viết lại thành

$$\frac{1}{1+m} J'(t) \leq -J^{\frac{2m}{1+m}}(t) \left[\gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{1+m}}(t) \right].$$

Ta chọn u_0 đủ nhỏ sao cho

$$\gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{1+m}}(0) > 0,$$

khi đó ta có

$$\frac{1}{1+m} J'(t) \leq -c_3 J^{\frac{2m}{1+m}}(t),$$

trong đó $c_3 = \gamma^{-2} |\Omega|^{\frac{N-2}{N} - \frac{2m}{1+m}} - ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{1+m}}(0)$. Do $\frac{1-m}{1+m} < 1$ nên $J(t)$ sẽ triệt tiêu tại

thời điểm xác định, dẫn đến $u(x, t)$ cũng triệt tiêu tại thời điểm xác định.

Với $0 < m < \frac{N-2}{N}$, ta chọn $s = \frac{N}{2}(1-m) > 1$, khi đó theo bất đẳng thức Sobolev ta có

$$\|u\|_s^{\frac{m+s-1}{2}} = \left[\int_{\Omega} \left(u^{\frac{m+s-1}{2}} \right)^{\frac{2N}{N-2}} dx \right]^{\frac{N-2}{2N}} = \|u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq \gamma \|\nabla u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_2 \text{ hay } \gamma^{-1} \|u\|_s^{\frac{m+s-1}{2}} \leq \|\nabla u^{\frac{m+s-1}{2}}\|_2,$$

Từ đây, ta đặt $J(t) = \int_{\Omega} u^s dx$, khi đó (3.5) trở thành

$$\frac{1}{s} J'(t) \leq -J^{\frac{m+s-1}{s}}(t) \left[\gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - ak^{p-1} M_1^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{s}}(t) \right].$$

Ta chọn u_0 đủ nhỏ sao cho

$$\gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{s}}(0) > 0,$$

khi đó ta có

$$\frac{1}{s} J'(t) \leq -c_4 J^{\frac{m+s-1}{s}}(t),$$

trong đó $c_4 = \gamma^{-2} \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2} - ak^{p-1} M^{p-1} |\Omega| J^{\frac{1-m}{s}}(0)$. Do $\frac{m+s-1}{s} < 1$ nên $J(t)$ sẽ triệt tiêu

tại thời điểm xác định, dẫn đến $u(x, t)$ cũng triệt tiêu tại thời điểm xác định.

Nhận xét 3.3. Từ Định lí 3.1, ta thấy nếu $p < m$ hoặc $p = m$ và $a\mu > 1$, nghiệm cực đại $U(x, t)$ sẽ luôn dương với mọi $t > 0$, tức ảnh hưởng của tập nguồn “mạnh hơn” và số hạng khuếch tán không đủ làm triệt tiêu hàm nguồn. Tuy nhiên nếu $p > m$, tức tập nguồn nonlocal khá yếu, theo Định lí 3.2, ảnh hưởng số hạng khuếch tán đủ để các nghiệm không âm của phương trình (1.1) triệt tiêu tại thời gian xác định với dữ liệu ban đầu đủ nhỏ.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Alikakos, N. D., & Evans, L. C. (1983). Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 62(3), 253-268.
- Anderson, J. R., & Deng, K. (1997). Global existence for degenerate parabolic equations with a nonlocal forcing. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20, 1069-1087. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(19970910\)20:13<1069::AID-MMA867>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970910)20:13<1069::AID-MMA867>3.0.CO;2-Y)
- Borelli, M., & Ughi, M. (1994). The fast diffusion equation with strong absorption: The instantaneous shrinking phenomenon. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, 26, 109-140.
- Budd, C., Dold, B., & Stuart, A. (1993). Blow up in a partial differential equation with conserved first integral. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(3), 718-742.
- Chengyuan Qu, Xueli Bai, & Sining Zheng (2014). Blow-up versus extinction in a nonlocal p -Laplace equation with Neumann boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(1), 326-333.
- Ferreira, R., & Vázquez, J. L. (2001). Extinction behavior for fast diffusion equations with absorption. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 43, 943-985.

- Friedman, A., & Herrero, M. A. (1987). Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 124, 530-546.
- Herrero, M. A., & Velázquez, J. J. L. (1992). Approaching an extinction point in one-dimensional semilinear heat equations with strong absorptions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 170, 353-381.
- Hu, B., & Yin, H. (1995). Semilinear parabolic equations with prescribed energy. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 44, 479-505.
- Kalashnikov, A. S. (1974). The nature of the propagation of perturbations in problems of non-linear heat conduction with absorption. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 14, 70-85.
- Leoni, G. (1996). A very singular solution for the porous media equation $u_t = \Delta u^m - u^p$ when $0 < m < 1$. *Journal of Differential Equations*, 132, 353-376.
- Li, Y. X., & Wu, J. C. (2005). Extinction for fast diffusion equations with nonlinear sources. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005(145), 1-7.
- Peletier, L. A., & Junning, Z. (1990). Large time behavior of solutions of the porous media equation with absorption: The fast diffusion case. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 14, 107-121.
- Peletier, L. A., & Junning, Z. (1991). Source-type solutions of the porous media equation with absorption: The fast diffusion case. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 17, 991-1009.
- Sabinina, E. S. (1962). On a class of nonlinear degenerate parabolic equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 143, 794-797.

EXTINCTION FOR A FAST DIFFUSION EQUATION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS WITH A NONLINEAR NONLOCAL SOURCE

*Luu Le Khai Cuong**, Bui Ngoc Huy, Le Tuan Khai

Ho Chi Minh City, University of Education, Vietnam

*Corresponding author: Luu Le Khai Cuong – Email: khaicuong2608@gmail.com

Received: January 02, 2024; Revised: March 21, 2024; Accepted: February 05, 2025

ABSTRACT

In this article, the authors established conditions for the extinction of solutions, in finite time, of the fast diffusion equation $u_t = \Delta u^m + a \int_{\Omega} u^p(y, t) dy$, $0 < m < 1$, $a, p > 0$ a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with $N > 2$ with mixed boundary conditions $u(x) = 0, x \in \Gamma_1; \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_2$, where Γ_1, Γ_2 is partition of Ω and n is an outward vector. More precisely speaking, it is shown that if $p > m$, any solution with small initial data vanishes in finite time, and if $p < m$ or $p = m$ and $a\mu > 1$, the maximal solution is positive in Ω for all $t > 0$, where $\mu = \int_{\Omega} \varphi(x) dx$ and φ is the unique positive solution of the elliptic problem $-\Delta \varphi(x) = 1, x \in \Omega; \varphi(x) = 0, x \in \Gamma_1; \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_2$.

Keywords: Fast diffusion equation; nonlocal source; Extinction in finite time