TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

Tập 21, Số 8 (2024): 1492-1504

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Vol. 21, No. 8 (2024): 1492-1504

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.8.4108(2024)

Bài báo nghiên cứu

PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN LỊCH SỬ SỐ PI (π)

Nguyễn Ái Quốc*, Phan Văn Anh

Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: naquoc@sgu.edu.vn*

Ngày nhận bài: 18-01-2024; ngày nhận bài sửa: 24-4-2024; ngày duyệt đăng: 27-8-2024

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận lịch sử làm rõ quá trình hình thành và phát triển của số π; xác định các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình phát triển và các đặc trưng tri thức luận của số π. Nghiên cứu được thực hiện bằng phương pháp nghiên cứu tri thức luận lịch sử trên các tài liệu về lịch sử của số π. Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy số π đã xuất hiện một cách ngầm ẩn trong các công trình toán học của người Ai Cập, Babylon, Trung Hoa, và Ấn Độ cổ đại…; các quan niệm hình học, số học, đại số, giải tích, đã ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển của số π. Ngoài ra, chướng ngại tri thức luận lịch sử của số π là quan niệm hình học, mặc dù bản chất của số π là vô tỉ và siêu việt. Kết quả nghiên cứu góp phần cho phân tích tri thức luận lịch sử toán học; làm tài liệu tham khảo cho giáo viên toán để thiết kế các tình huống dạy học khái niệm số π; và làm cơ sở cho các nghiên cứu trong toán học liên quan đến số π.

Từ khóa: số π; số vô tỉ; phân tích tri thức luận lịch sử; cầu phương hình tròn; tỉ số của chu vi và đường kính; số siêu việt

1. Sự cần thiết nghiên cứu số Pi

Số Pi, kí hiệu là π, là một hằng số quan trọng và nổi tiếng được tìm thấy trong tất cả các ngành toán học, vật lí, hóa học, kĩ thuật và máy tính. Trên thực tế, có nhiều công thức trong kĩ thuật, khoa học và toán học đều hiện diện số π, với một giá trị xấp xỉ đến hàng phần trăm nghìn là 3,1416. Trong chương trình toán phổ thông, số π xuất hiện trong công thức tính diện tích và chu vi đường tròn một cách đột ngột, và dần dần hiện diện trong nhiều công thức toán học khác sau đó. Những câu hỏi thường nảy sinh ở học sinh là số π từ đâu mà có? tại sao lại có giá trị xấp xỉ 3,14? Và tại sao là số vô tỉ?… Một phân tích tri thức lịch sử số π cho phép trả lời các câu hỏi này, và có thể làm cơ sở cho các thiết kế thực nghiệm dạy học làm rõ ý nghĩa của số π.

Mục đích nghiên cứu tri thức luận lịch sử số Pi là làm rõ bản chất và các ý nghĩa của số Pi. Việc hiểu rõ bản chất của số của số Pi góp phần giải thích được sự xấp xỉ tốt nhất trong

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc, & Phan Van Anh (2024). A historical – epistemological analysis of Pi (π). *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 21*(7), 1492-1504.

các tính toán diện tích, chu vi của các đường tròn, đường cong, cũng như trong các lĩnh vực khác như xác suất, lí thuyết số, cơ học, điện từ học…

2. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tri thức luận lịch sử một khái niệm toán học

Theo Lê Thị Hoài Châu (2017), nghiên cứu tri thức luận là nghiên cứu lịch sử hình thành tri thức nhằm làm rõ:

- nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết;
- những trở ngại cho sự hình thành tri thức;
- những điều kiện sản sinh ra tri thức, những bước nhảy cần thiết trong quan niệm để thúc đẩy quá trình hình thành và phát triển tri thức. (Le, 2017)

Một nghiên cứu tri thức luận lịch sử số Pi nhằm xác định nguyên nhân ra đời, các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển của số Pi; các đặc trưng tri thức luận của số Pi, cho phép làm cơ sở cho các nghiên cứu thực nghiệm dạy học theo quan điểm của didactic toán. Đó cũng là mục đích của nghiên cứu trình bày trong bài viết này.

Định nghĩa số Pi

Theo Britannica, trong toán học, số π là tỉ số giữa chu vi của một đường tròn với đường kính của nó. Kí hiệu π được nhà toán học người Anh là William Jones đưa ra vào năm 1706 để biểu thị tỉ số trên, và sau đó được nhà toán học Thụy Sĩ là Leonhard Euler phổ biến rộng rãi. Vì số π là số vô tỉ nên các chữ số thập phân của nó không lặp lại, và giá trị gần đúng như 3,14 hoặc 22/7 thường được sử dụng để tính toán ở bậc phổ thông. Số π làm tròn đến 39 chữ số thập phân là 3,141592653589793238462643383279502884197.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Phân tích tri thức luận lịch sử của số π

- ***Tổng quan lịch sử hình thành số π trong các nền văn minh cổ đại***

Giá trị của π được tính toán lần đầu tiên cách đây 4000 năm. Những người Babylon và Ai Cập cổ đại đã tính giá trị xấp xỉ của π bằng các phép đo vật lí của chu vi hay diện tích hình tròn, và họ ước tính π có giá trị gần bằng 3.

Khoảng 1500 năm sau đó, nhà toán học Hi Lạp, Archimedes (287 TCN-212/211 TCN) của Syracuse, lần đầu tiên sử dụng toán học để ước tính π và chứng tỏ rằng giá trị của nó nằm giữa 22/7 và 223/71. Archimedes lưu ý rằng một đa giác đều ngoại tiếp một đường tròn có chu vi lớn hơn chu vi của đường tròn, trong khi một đa giác nội tiếp trong đường tròn có chu vi nhỏ hơn. Sau đó, ông nhận thấy rằng khi tăng số cạnh của hai đa giác, thì hai chu vi tiến dần đến chu vi của đường tròn. Sau cùng, ông sử dụng định lí Pythagore để tìm chu vi của hai đa giác và nhận được chặn trên và chặn dưới của giá trị của π. Bằng cách sử dụng các đa giác đều 6 cạnh, 12 cạnh, 24 cạnh, 48 cạnh, và 96 cạnh, Archimedes chứng minh rằng $223/71 < \pi < 22/7$.

Khoảng 7 thế kỉ sau Archimedes, một cách tiếp cận số π tương tự đã được Zu Chongzhi (429-500), một nhà toán học và thiên văn học lỗi lạc người Trung Quốc sử dụng. Zu Chongzhi có lẽ không quen thuộc với phương pháp của Archimedes, nhưng vì cuốn sách của ông đã bị thất lạc nên ít người biết đến công trình của ông. Zu Chongzhi đã thiết lập được các bất đẳng thức $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ bằng cách sử dụng đa giác đều có 24.576 cạnh nội tiếp trong một đường tròn và thực hiện các phép tính dài bao gồm hàng trăm căn bậc hai đến 9 chữ số thập phân.

Vào thế kỉ thứ V, nhà toán học Ấn Độ Aryabhata đã tính một giá trị của π chính xác đến chữ số thập phân thứ ba.

Chữ cái π của Hi Lạp đã được William Jones (1675-1749) giới thiệu vào năm 1706, để kí hiệu cho tỉ số chu vi của hình tròn với đường kính của nó. Chữ cái π được rút ra từ chữ cái đầu tiên của từ "*perimetros*" của Hi Lạp, nghĩa là chu vi.

Vào năm 1761, Lambert đã trình bày chứng minh đầu tiên tại Viện Hàn lâm Khoa học Berlin rằng số π là một số vô tỉ (Merzbach & Boyer, 2011, p. 421).

Vào năm 1882, trong một bài báo có tựa đề "Über die Zahl π" đăng trên tờ Mathematische Annalen ở Munich, Lindemann (1852-1939) đã chứng minh rằng π là một số siêu việt (Merzbach & Boyer, 2011, p. 421).

- ***Số π trong nền văn minh Ai Cập cổ đại***

Bản giấy cói Rhind[2] (Rhind Mathematical Papyrus, khoảng năm 1650 trước Công nguyên) cho cái nhìn sâu sắc về toán học của Ai Cập cổ đại. Người Ai Cập tính diện tích hình tròn bằng công thức cho giá trị xấp xỉ của số Pi là 3,1605.

Quy tắc tìm diện tích hình tròn của người Ai Cập từ lâu đã được coi là một trong những thành tựu nổi bật của thời đại. Theo Park (2020), các bài toán 41, 42, 43, 48 và 50 của bản giấy cói Rhind trình bày cách tính diện tích hình tròn có bán kính 9 hoặc 10 bằng phương pháp cầu phương đường tròn[3]. Họ bình phương tám phần chín đường kính hình tròn để có được diện tích. Do đó, công thức $\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$ tính diện tích hình tròn có thể bắt nguồn từ d là đường kính của hình tròn (Chace, 1979). Cách tính này tương ứng với một xấp xỉ rất tốt $\pi \approx 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Bài toán 41 là ví dụ đầu tiên về việc xác định diện tích hình tròn, liên quan đến thể tích của một vựa lúa hình trụ (Chace, 1979). Các ghi chép chỉ ra rằng người Ai Cập cổ đại lần đầu tiên cố gắng xác định diện tích hình tròn để tìm thể tích của hình trụ. Có vẻ như việc tính toán khối lượng hạt chứa trong các cấu trúc hình trụ có tầm quan trọng lớn nhất vào thời điểm đó. Ví dụ này cho thấy toán học có mối liên hệ với các vấn đề xã hội và người Ai Cập

[2] Còn gọi là bản giấy cói Ahmes (Ahmes Papyrus) để vinh danh học giả Ahmes đã biên soạn nó.

[3] Quadrature of circle: Bài toán dựng hình vuông có diện tích bằng hình tròn đã cho; là một trong những bài toán cổ điển về dựng hình bằng thước và compa.

cổ đại quan tâm đến diện tích hình tròn trong toán học gắn liền với thực tiễn (Park, 2020, p.225). Trong Bài toán 50, học giả Ahmes đã giả định rằng diện tích của một hình tròn có đường kính 9 đơn vị bằng diện tích của hình vuông có cạnh 8 đơn vị. Nếu so sánh giả định này với công thức hiện đại $A = \pi r^2$, thì quy tắc Ai Cập tương đương với việc cho π một giá trị khoảng $3\frac{1}{6} \approx 3{,}16$ (Merzbach & Boyer, 2011, p.15). Trong Bài toán 48, học giả Ahmes đã tạo thành một hình bát giác từ một hình vuông có cạnh 9 đơn vị bằng cách chia ba các cạnh và cắt bốn hình tam giác cân ở các góc, mỗi hình có diện tích $4\frac{1}{2}$ đơn vị (Hình 1). Diện tích của hình bát giác (là 63 đơn vị), không khác nhiều so với diện tích của hình tròn nội tiếp trong hình vuông, và không khác xa diện tích của hình vuông có một cạnh là 8 đơn vị. Việc số $4(8/9)^2$ thực sự đóng một vai trò có thể so sánh được với hằng số π của chúng ta dường như đã được xác nhận bởi quy tắc Ai Cập về chu vi của một hình tròn, theo đó tỉ số giữa diện tích hình tròn và chu vi bằng tỉ số giữa diện tích hình vuông ngoại tiếp và chu vi của hình tròn. Quan sát này thể hiện một mối quan hệ hình học có độ chính xác và ý nghĩa toán học cao hơn nhiều so với phép tính gần đúng tương đối tốt cho số π (Merzbach & Boyer, 2011, p. 15).

Hình 1. *Hình vẽ Bài toán 48 của Ahmes (Park, 2020)*

Như vậy, số π xuất hiện ngầm ẩn trong nền văn minh Ai Cập cổ đại từ việc giải quyết bài toán thực tiễn tính thể tích vựa lúa hình trụ, trong đó diện tích của hình tròn đáy được tính toán thông qua phép cầu phương hình tròn. Số π trong giai đoạn này có hình thức thể hiện là tiền toán học[4] và có cơ chế hoạt động ngầm ẩn. Quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành số π là quan niệm hình học.

- ***Số π trong nền văn minh Lưỡng Hà***

Người Babylon cổ đại tính diện tích của các đa giác đều trong đại số mêtric. Họ gọi đa giác đều là đa giác đều đã chuẩn hóa nếu độ dài mỗi cạnh bằng 60[5] (Park, 2020, p.225).

[4] Theo (Chevallard, 1991), một khái niệm toán học có thể thể hiện dưới ba hình thức: tiền toán học: không tên, không định nghĩa, hoạt động như một công cụ ngầm ẩn; Gần toán: Có tên, không có định nghĩa, là công cụ của hoạt động toán học; toán học: Có tên, có định nghĩa, vừa là đối tượng nghiên cứu, vừa là công cụ được vận dụng để giải quyết các vấn đề.

[5] Người Babylon sử dụng hệ lục thập phân, tức là cơ số của họ là 60 thay vì 10 (Katz, 2009, p.12).

Theo Merzbach & Boyer (2011), ở thung lũng Lưỡng Hà, diện tích hình tròn thường được tính bằng cách lấy ba lần bình phương bán kính, có nghĩa là cho π giá trị bằng 3. Năm 1936, một nhóm tấm đất sét ghi các văn bản toán học được khai quật ở Susa, cách Babylon 200 dặm, và chúng chứa đựng những kết quả hình học quan trọng. Cần nói thêm rằng người Sumer ở thung lũng Lưỡng Hà là những người đầu tiên tạo ra một trong những phát minh vĩ đại nhất của con người, đó là chữ viết. Thông qua giao tiếp bằng văn bản, kiến thức có thể được truyền từ người này sang người khác, từ thế hệ này sang thế hệ tiếp theo và tương lai. Họ khắc chữ hình nêm lên các tấm đất sét mềm bằng bút trâm làm từ lau sậy, sau đó các tấm bảng này được làm cứng lại dưới ánh nắng mặt trời.

Trong tấm đất sét TMS 3, người Babylon cổ đại đã tính diện tích của các đa giác đều đã chuẩn hóa, chẳng hạn như hình ngũ giác đều, lục giác đều, thất giác đều. Diện tích của đa giác đều có thể được tính bằng tổng diện tích của các tam giác cân thành phần có đỉnh là tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Để tìm diện tích của một tam giác cân, họ tính cạnh bên của tam giác là bán kính của đường tròn ngoại tiếp. Người Babylon cổ đại sử dụng ba đường tròn có chu vi 300, 360 và 420, nhưng tỉ lệ giữa chu vi và đường kính luôn xấp xỉ bằng 3. Do đó, người Babylon đặt chu vi c của đường tròn xấp xỉ bằng $3 \times d$, trong đó d là đường kính (Park, 2020, p. 229).

Hình lục giác đều được ghi trên tấm đất sét TMS 2. Mặc dù, một phần của tấm đất sét TMS 2 đã bị thất lạc (Hình 2), nhưng chiều cao của tam giác cân được cho là đã được ghi lại (Friberg, 2007). Chu vi của hình tròn ngoại tiếp xấp xỉ là 210 và đường kính là 70. Người Babylon cổ đại đã xóa hình tròn sau khi vẽ các cạnh đa giác, nhưng người ta tìm thấy dấu vết của một cung tròn của đường tròn ngoại tiếp ở góc trên bên trái của hình lục giác đều (Park, 2020, p. 230).

Hình 2. *TMS 2(rev.), Viện bảo tàng Louvre* (Park, 2018)

Mặt khác, người Babylon cổ đại đã tính chu vi của hình lục giác đều chính xác bằng ba lần đường kính của đường tròn ngoại tiếp. Tất nhiên, họ cũng biết rằng chu vi của một hình lục giác đều nhỏ hơn chu vi của đường tròn ngoại tiếp và chúng được xấp xỉ với nhau như sau:

(chu vi của hình lục giác đều) ≈ (24/25)×(chu vi của đường tròn).

Vì $6s = 3d$ và $6s/c = 24/25$, ta có $3/\pi = 3d/c = 6s/c = 24/25$, trong đó s là cạnh của lục giác đều, d và c lần lượt là đường kính và chu vi của đường tròn ngoại tiếp. Do đó, $3\frac{1}{8} \approx 3{,}125$ là giá trị xấp xỉ của số π ngầm ẩn trong toán học của người Babylon cổ đại (Park, 2020, p. 231).

Giá trị xấp xỉ trên của π ít nhất cũng tốt như giá trị được áp dụng ở Ai Cập, và sự xuất hiện ngầm ẩn của π xảy ra trong một bối cảnh phức tạp hơn ở Ai Cập, vì tấm đất sét từ Susa là một ví dụ điển hình về sự so sánh có hệ thống các hình hình học. Người ta gần như muốn xem nguồn gốc thực sự của hình học trong đó, nhưng điều quan trọng cần lưu ý là bối cảnh hình học không được người Babylon quan tâm nhiều bằng những phép tính gần đúng bằng số mà họ sử dụng trong phép đo. Hình học đối với người Babylon không phải là một môn toán theo nghĩa của chúng ta mà là một loại đại số hoặc số học ứng dụng, trong đó các con số được gắn liền với các hình vẽ. (Merzbach & Boyer, 2011, p. 15).

Như vậy, số π trong nền văn minh của người Babylon cổ đại xuất hiện ngầm ẩn như trong nền văn minh Ai Cập cổ đại, nhưng được cho với giá trị xấp xỉ là 3. Số π ra đời từ việc tính toán chu vi của các đường tròn gắn liền với tính chu vi của các đa giác đều nội tiếp. Vì thế, số π có cơ chế đối tượng ngầm ẩn, có hình thức thể hiện là tiền toán học. Tuy nhiên, số π trong nền văn minh Babylon cổ đại lại chịu ảnh hưởng của quan niệm số học.

- ***Số π trong nền văn minh Hi Lạp cổ đại***

Trong đánh giá gần đúng tỉ số giữa chu vi và đường kính của một hình tròn, Archimedes xứ Syracuse (287-212 TCN) thể hiện kĩ năng tính toán ưu việt của mình. Bắt đầu với hình lục giác đều nội tiếp trong một đường tròn, ông tính chu vi của các đa giác thu được bằng cách tăng gấp đôi liên tục số cạnh của lục giác đều cho đến khi đạt được đa giác đều chín mươi sáu cạnh. Kết quả tính toán của Archimedes là một giá trị gần đúng với giá trị của số π biểu thị bằng bất đẳng thức $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, là một ước tính tốt hơn so với của người Ai Cập và người Babylon. Một điều cần lưu ý rằng cả Archimedes lẫn bất kì nhà toán học Hi Lạp nào khác đều chưa từng sử dụng kí hiệu π cho tỉ số giữa chu vi và đường kính trong một hình tròn. Kết quả trên được đưa ra trong Mệnh đề 3 của chuyên luận về *Phép đo hình tròn* (*Measurement of the Circle*, 250 TCN), một trong số những tác phẩm nổi tiếng nhất của Archimedes trong thời Trung cổ (Merzbach & Boyer, 2011, p.113).

Bằng cách sử dụng suy luận hình học sơ cấp, Archimedes nhận được hệ thức lặp bao gồm các trung bình điều hòa và trung bình nhân và hai dãy $\{p_N\}$ và $\{P_N\}$ đan xen với nhau: $\frac{1}{P_{2N}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_N} + \frac{1}{p_N}\right)$; $p_{2N} = \sqrt{P_{2N}.p_N}$, trong đó p_N và P_N lần lượt kí hiệu cho nửa chu vi của đa giác đều N cạnh nội tiếp và ngoại tiếp của đường tròn đơn vị. Về mặt hình học, hai dãy $\{p_N\}$ và $\{P_N\}$ lần lượt là đơn điệu tăng và đơn điệu giảm, và có giới hạn chung là π, là nền tảng trong phương pháp của Archimedes cho xấp xỉ giá trị của số π.

Áp dụng hệ thức lặp, Archimedes bắt đầu với một hình lục giác đều (N = 6), sau đó chuyển sang 12-giác đều, rồi 24-giác đều, 48-giác đều, và cuối cùng là 96-giác đều, và ông thu được: $3\frac{10}{71} < p_{96} < \pi < P_{96} < 3\frac{1}{7}$ (Phillips, 1981, p. 165).

Kĩ thuật xấp xỉ số π của Archimedes trong việc thu được các số hữu tỉ $3\frac{10}{71}$ và $3\frac{1}{7}$ rất gần với các số vô tỉ p_{96} và P_{96}, và có thể được đánh giá cao hơn nếu cả bốn số sau đây được hiển thị đến bốn chữ số thập phân: $3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408$; $p_{96} \approx 3{,}1410$; $P_{96} \approx 3{,}1427$; $3\frac{1}{7} \approx 3{,}1429$ (Phillips, 1981, p.165).

Như vậy, số π trong nền văn minh Hi Lạp cổ đại có hình thức thể hiện là tiền toán học vì người Hi Lạp cổ đại vẫn chưa định nghĩa và tên cho số π. Tuy nhiên, số π có cơ chế hoạt động vừa là đối tượng vừa là công cụ ngầm ẩn. Số π ra đời trong nền văn minh Hi Lạp cổ đại chịu ảnh hưởng của quan niệm hình học và số học. Đặc trưng khoa học luận của số π là giới hạn kẹp, và chướng ngại khoa học luận của số π là bản chất vô tỉ.

- ***Số π trong nền văn minh Trung Hoa cổ đại***

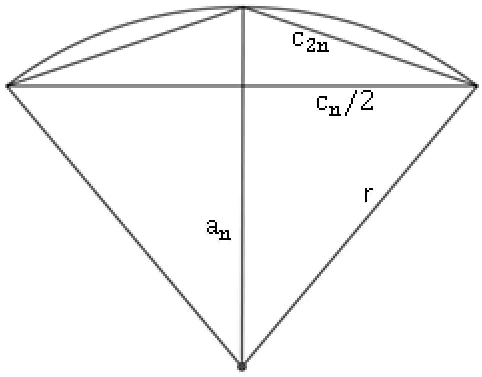
Giá trị của số π đã xuất hiện trong tác phẩm kinh điển toán học *Cửu chương về nghệ thuật tính toán* (Jiuzhang Suanshu[6]) của Trung Hoa Cổ đại, gọi tắt là *Cửu chương*, được biên soạn dưới thời nhà Hán (206 TCN-220 CN). Việc sử dụng giá trị 3 của số π trong toán học Trung Hoa thời kì đầu hầu như không phải là lí do biện minh cho sự phụ thuộc vào Lưỡng Hà của người Babylon cổ đại, đặc biệt vì việc tìm kiếm các giá trị chính xác hơn, từ những thế kỉ đầu tiên của kỉ nguyên Cơ đốc giáo, đã diễn ra dai dẳng ở Trung Hoa hơn những nơi khác. Vào thế kỉ thứ III, Liu Hui, một nhà toán học và là nhà bình luận quan trọng về *Cửu chương*, đã rút ra giá trị xấp xỉ 3,14 cho số π, bằng cách sử dụng 96-giác đều và xấp xỉ 3,14159 bằng cách xem xét 3072-giác đều (Merzbach & Boyer, 2011, p.180).

Trong bài bình luận của riêng mình trong *Cửu chương*, Liu Hui đã lưu ý rằng giá trị "3" cho tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của hình tròn đơn vị là không chính xác. Ông dễ dàng tính được rằng diện tích của một đa giác đều 12 cạnh nội tiếp trong đường tròn đó cũng là 3. Do đó, ông kết luận, diện tích hình tròn phải lớn hơn 3. Thực tế, Liu Hui sau đó đã tiến hành tính gần đúng diện tích này bằng một lập luận liên quan đến việc dựng các đa giác đều nội tiếp với số cạnh ngày càng tăng. Lập luận này tương tự cách xác định số π của Archimedes bằng cách sử dụng chu vi của đa giác đều. Liu Hui viết: "Số cạnh càng lớn thì sự khác biệt giữa diện tích hình tròn và diện tích của các đa giác đều nội tiếp của nó càng nhỏ. Chia đi chia lại các cạnh của đa giác đều cho đến khi không thể chia thêm nữa sẽ được một đa giác đều trùng với đường tròn, và không có phần nào bị bỏ sót". Nghĩa là, mặc dù ông không sử dụng lập luận phản chứng như trong phương pháp vét cạn của Eudoxus, nhưng cuối cùng ông giả định rằng các đa giác trên thực tế sẽ "làm cạn kiệt" đường tròn (Katz, 2009, p.201).

[6] Tiếng Anh là *Nine Chapters on the Mathematical Art.*

Lập luận của Liu Hui có thể được mô tả như sau bằng cách xét một đa giác đều *n* cạnh nội tiếp trong một đường tròn bán kính r. Gọi c_n là độ dài cạnh của đa giác nội tiếp, a_n là độ dài đường vuông góc từ tâm hình tròn đến cạnh đa giác, và S_n là diện tích của đa giác đều (Hình 3). Lập luận bắt đầu với $c_6 = r$. Tổng quát, ta có:

$$a_n = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2},\ c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + (r - a_n)^2},\ \text{thì } S_{2n} = 2n\frac{1}{2}\frac{c_n}{2}r = \frac{1}{2}nrc_n.$$



Hình 3. *Xét tại một cạnh của đa giác đều n cạnh nội tiếp* (Katz, 2009, p.202)

Liu Hui tính được S_{2n} với $n = 96$ trong trường hợp $r = 10$ là $314\frac{64}{625}$, tương đương với giá trị của π là 3,141024, và sau đó lưu ý rằng sẽ "thuận tiện" khi lấy 3,14 làm giá trị gần đúng của π và bỏ qua phần phân số. Tuy nhiên, hai thế kỉ sau, Zu Chongzhi (429-501) đã quyết định tiến hành tính toán sâu hơn.

Niềm đam mê của người Trung Hoa với giá trị của số π đạt đến đỉnh điểm trong nghiên cứu của Zu Chongzhi (429-501), một nhà toán học và thiên văn học lỗi lạc của Trung Hoa. Zu Chongzhi cho rằng 3,1415927 là giá trị "thừa" và 3,1415926 là "giá trị thiếu" của π (Merzbach & Boyer, 2011, p.181). Zu Chongzhi đã thiết lập được các bất đẳng thức 3,1415926 < π < 3,1415927 bằng cách sử dụng đa giác đều có 24.576 cạnh (Lam & Ang, 1986). Những tính toán giúp ông đạt được những giới hạn này dường như được hỗ trợ bởi con trai ông là Zu Chengzhi, có lẽ đã nằm trong một trong những cuốn sách của ông đã bị thất lạc. (Merzbach & Boyer, 2011, p. 181).

Như vậy, trong nền văn minh Trung Hoa cổ đại, số π xuất hiện ngầm ẩn, có hình thức thể hiện là khái niệm tiền toán học vì số π chưa được gọi tên và chưa được định nghĩa, và có cơ chế hoạt động là đối tượng nghiên cứu và công cụ ngầm ẩn. Quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành của số π là quan niệm hình học, và đặc trưng khoa học luận là "vét cạn hình tròn".

- ***Số π trong nền văn minh Ấn Độ***

Cuộc cách mạng nông nghiệp ở các thung lũng sông Ấn Độ có lẽ đã diễn ra gần như cùng thời điểm dọc theo thung lũng sông Nile của Ai Cập, thung lũng Euphrates và Tigris của Lưỡng Hà. Sự chậm trễ biểu kiến của toán học Ấn Độ so với toán học Babylon, Ai Cập và Hi Lạp có thể đơn giản là do con người còn thiếu hiểu biết về lịch sử Ấn Độ thời kì đầu. Có nhiều bằng chứng gián tiếp về toán học Hindu. Giống như nền văn minh Lưỡng Hà, người Ấn Độ cổ đại đã biết Định lí Pythagoras từ rất lâu trước khi Pythagoras ra đời, và có bằng chứng cho thấy thiên văn học Ấn Độ giáo (Hindu) đã ở trình độ rất tiên tiến. Tuy nhiên, các ghi chép trực tiếp đã bị thất lạc, và bộ tài liệu đầu tiên có được là *Siddhantas* hay các hệ thống về thiên văn học, được xuất bản vào khoảng năm 400 SCN, mặc dù kiến thức chứa đựng trong đó tất nhiên là lâu đời hơn nhiều (Beckmann, 1971, p.22).

Một tài liệu của bộ *Siddhantas*, xuất bản năm 380 sau Công nguyên, sử dụng giá trị $\pi = 3\frac{177}{1250} = 3{,}1416$, khác biệt rất ít so với giá trị lục thập phân $\pi = 3 + 8/60 + 30/(60)^2$ được người Hi Lạp sử dụng sớm hơn nhiều. Kiến thức ban đầu của Ấn Độ giáo đã được Aryabhata[7] tóm tắt trong công trình Aryabhatiya, viết vào năm 499. Cuốn sách này đưa ra giải pháp cho nhiều vấn đề, nhưng thường không có gợi ý về cách chúng được tìm ra. Trong số đó, có một phát biểu như sau:

Cộng 4 với 100, nhân với 8 và cộng 62.000. Kết quả là xấp xỉ chu vi của một vòng tròn có đường kính là 20.000. (Beckmann, 1971, p.28)

Điều này cho π = 62.832 : 20.000 = 3,1416 như trong *Siddhanta*. Giá trị tương tự cũng được đưa ra bởi Bashkara (sinh năm 1114), người gọi giá trị trên là "chính xác", trái ngược với giá trị "không chính xác" là $3\frac{1}{7}$. Rất có khả năng rằng người Hindu đã đạt đến giá trị trên bằng phương pháp đa giác của Archimedes. Nếu độ dài cạnh của một đa giác đều có *n* cạnh nội tiếp trong một hình tròn là *s*(*n*), khi đó độ dài tương ứng của 2*n* cạnh là $s(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - s^2(n))}}$. Bắt đầu một cách tự nhiên với một hình lục giác đều, tăng gấp đôi số cạnh dẫn đến đa giác có 12, 24, 48, 96, 192 và 384 cạnh. Khi đặt đường kính của hình tròn bằng 100, chu vi của đa giác đều có 384 cạnh là căn bậc hai của 98.694, từ đó $\pi = \sqrt{98694}/100 = 3{,}14156$ ..., là giá trị được đưa ra bởi Aryabhata (Beckmann, 1971, p.28).

Nhà toán học Hindu, Brahmagupta (sinh năm 598) sử dụng giá trị $\pi = \sqrt{10} = 3{,}6227$ ... có lẽ cũng dựa trên phương pháp đa giác của Archimedes. Người ta đã đề xuất rằng vì chu vi của các đa giác có 12, 24, 48 và 96 cạnh, nội tiếp trong một đường tròn có đường kính 10, được cho bởi dãy $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$, nên người Hindu có thể đã giả định (không chính xác) rằng khi tăng gấp đôi số cạnh, chu vi sẽ tiến gần hơn đến giá trị $\sqrt{1000}$ sao cho $\pi = \sqrt{1000/100} = \sqrt{10}$ (Beckmann, 1971, p. 29).

Như vậy, trong nền văn minh Ấn Độ cổ đại, số π cũng xuất hiện ngầm ẩn, có hình thức thể hiện là khái niệm tiền toán học, và có cơ chế hoạt động là công cụ ngầm ẩn. Tương tự với nền văn minh Hi Lạp cổ đại, quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành của số π là quan niệm hình học, và đặc trưng khoa học luận là "vét cạn hình tròn".

[7] Aryabhata hay Aryabhata I (476–550 CN) là nhà toán học – thiên văn học lớn đầu tiên từ thời cổ đại của Ấn Độ.

- ***Số π từ thế kỉ XVII đến nay***

Việc sử dụng chính thức chữ cái Hi Lạp π cho tỉ lệ giữa chu vi và đường kính trong một vòng tròn cũng phần lớn là do Euler, mặc dù lần xuất hiện trước đó được tìm thấy vào năm 1706, một năm trước khi Euler ra đời, trong hai tác phẩm *Synopsis Palmariorum Matheseos,* và *A New Introduction to the Mathematics* của William Jones (1675-1749). Việc Euler sử dụng kí hiệu π vào năm 1737 và sau đó trong nhiều sách giáo khoa phổ biến của ông đã khiến nó được biết đến và sử dụng rộng rãi (Merzbach & Boyer, 2011, p.408).

Trong những năm 1650 và 1660, rất nhiều phương pháp vô hạn đã được phát triển, bao gồm cả phương pháp phân số liên tục vô hạn cho số π do William Brouncker (1620-1684), đưa ra. Thông qua việc sử dụng tích Wallis cho $2/\pi$, bằng cách nào đó Brouncker đã dẫn tới biểu thức:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Hình 4. *Tính Pi bằng phân số liên tục của Brouncker* (Merzbach & Boyer, 2011, p.356)

Vào năm 1761, Lambert đã trình bày chứng minh đầu tiên tại Viện Hàn lâm Khoa học Berlin rằng số π là một số vô tỉ. Lambert đã chứng minh rằng nếu x là một số hữu tỉ khác 0 thì $\tan x$ không thể là số hữu tỉ. Vì $tan\frac{\pi}{4} = 1$ là một số hữu tỉ, nên $\pi/4$ không thể là một số hữu tỉ, do đó π cũng không thể. Tất nhiên, điều này không loại bỏ được câu hỏi về phép cầu phương đường tròn, vì các vô tỉ bậc hai có thể dựng được. Vào khoảng thời gian này, số lượng phép cầu phương hình tròn đã trở nên nhiều đến mức Viện Hàn lâm khoa học Paris đã thông qua một nghị quyết vào năm 1775 rằng không có lời giải nào của bài toán cầu phương sẽ được xem xét chính thức (Merzbach & Boyer, 2011, p.421).

Vào năm 1882, trong một bài báo có tựa đề "Über die Zahl π" đăng trên tờ Mathematische Annalen ở Munich, Lindemann (1852-1939) đã chứng minh rằng π là một số siêu việt. Trong bài báo, Lindemann chứng minh rằng phương trình $e^{ix} + 1 = 0$[8] không thể thỏa mãn nếu x là đại số. Kết quả này là câu trả lời cho bài toán cổ điển về phép cầu phương của đường tròn. Để có thể thực hiện được phép cầu phương đường tròn bằng các công cụ Euclide, số π sẽ phải là nghiệm của một phương trình đại số với nghiệm biểu thị bằng căn bậc hai. Vì π không phải là đại số nên hình tròn không thể cầu phương theo các quy tắc cổ điển (Merzbach & Boyer, 2011, p.421).

Như vậy, trong giai đoạn từ thế kỉ XVII đến nay, số π có hình thức thể hiện là khái niệm toán học, có cơ chế hoạt động là đối tượng nghiên cứu. Đặc trưng khoa học luận của

[8] Còn gọi là đồng nhất thức Euler.

số π trong thời kì này là vô tỉ, phân số liên tục, siêu việt, nghiệm phương trình mũ. Quan niệm ảnh hưởng mạnh mẽ lên sự phát triển của số π là đại số, số học, xác suất, và giải tích. Chướng ngại khoa học luận của số π là quan niệm hình học, bởi vì đã phải có một bước nhảy vọt về quan niệm từ hình học và số học sang lượng giác và giải tích để xác định đúng bản chất vô tỉ và siêu việt của số π.

3.2. Nguyên nhân thúc đẩy sự ra đời và các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển của số π

Kết quả phân tích tri thức luận cho thấy số Pi ra đời một cách ngầm ẩn tại các nền văn minh cổ đại khác nhau như Ai Cập, Babylon, Hi Lạp, Trung Hoa cổ đại. Có hai bài toán làm nảy sinh sự ra đời của số Pi là: bài toán tính diện tích của hình tròn đáy của một vựa lúa hình trụ bằng phép phương pháp cầu phương của người Ai Cập cổ đại; bài toán tính diện tích của đa giác đều bằng cách xấp xỉ với hình tròn có bán kính là đoạn nối tâm với một đỉnh của đa giác của người Babylon cổ đại.

Vì sự ra đời của số Pi chịu ảnh hưởng mạnh mẽ của hai quan niệm chính là hình học và số học trong các nền văn minh cổ đại, các nhà toán học cố gắng biểu thị số Pi bằng tỉ số của số nguyên. Vì thế, các tính toán giá trị số Pi có nhiều chênh lệch và gặp phải chướng ngại tri thức luận là bản chất vô tỉ của số Pi.

Quá trình hình thành và phát triển của số π chịu ảnh hưởng của các quan niệm số học, hình học, đại số, lượng giác, và giải tích. Các quan niệm này đã tác động lên phương thức xác định số π dưới dạng tỉ số của chu vi với đường kính của một hình tròn.

4.3. Chướng ngại tri thức luận và các đặc trưng tri thức luận của số π

Chướng ngại tri thức luận của số π gắn liền với quan niệm hình học, mặc dù bản chất của số π là vô tỉ và siêu việt.

Trong quá trình hình thành và phát triển của số π, các đặc trưng tri thức luận được xác định bao gồm:

+ Đặc trưng về *hình thức thể hiện*: khái niệm tiền toán học, khái niệm toán học;
+ Đặc trưng về *cơ chế hoạt động*: công cụ ngầm ẩn, đối tượng nghiên cứu;
+ Đặc trưng về *bản chất*: vô tỉ, siêu việt, phân số liên tục, nghiệm phương trình mũ;
+ Đặc trưng về *giá trị*: xấp xỉ, giới hạn (giới hạn kẹp, vét cạn hình tròn).

4. Kết luận

Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử số π cho thấy số Pi ra đời từ bài toán tính diện tích hình tròn đáy của một vựa lúa hình trụ bằng phương pháp cầu phương hình tròn, và làm rõ được bản chất số vô tỉ và siêu việt của số Pi. Hai bản chất này đã gây ra nhiều khó khăn trong việc tính toán giá trị của nó trong các nền văn minh cổ đại chịu nhiều ảnh hưởng của hai quan niệm hình học và số học như Ai Cập, Babylon, Hi Lạp, Trung Quốc. Vì thế, bản chất vô tỉ và siêu việt là chướng ngại tri thức luận của số Pi trong quá trình hình thành và phát triển cũng chính là chướng ngại tri thức luận cho người học ngày nay. Trong suốt hàng thiên niên kỉ, số π thể hiện dưới hình thức khái niệm tiền toán học và ngầm ẩn qua tỉ số của chu vi và đường kính của hình tròn. Kết quả nghiên cứu tri thức luận số Pi cũng cho thấy việc tính diện tích và chu vi hình tròn là không thể chính xác tuyệt đối. Tuy nhiên, việc lấy giá trị xấp xỉ của số Pi đến nhiều chữ số thập phân trong các tính toán sẽ cho kết quả tốt hơn. Sau cùng, việc làm rõ nguồn gốc của số π giúp giải đáp các câu hỏi thường xuyên nhất ở người học là số π ra đời như thế nào, tại sao lại có giá trị là 3,14, và có thể làm cơ sở cho thiết kế thực nghiệm dạy học làm rõ ý nghĩa của số Pi.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Beckmann, P. (1971). *A history of* π *(Pi)* (3rd ed.). The Golem Press.

Chace, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Virginia.

Chevallard, Y. (1991). Basic Concepts of Didactics: Perspectives Provided by an Anthropological Approach. In: Douady, R., & Mercier, A., (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics, Mathematical and Computer Publications* (pp.160-163). Rennes.

Friberg, J. (2007). *Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics*. New Jersey: World Scientific.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3rd ed.). Pearson.

Lam, L. Y., & Ang, T. S. (1986). Circle Measurements in Ancient China. *Historia Mathematica*, *13*, 325-340.

Le, T. H. C. (2017). Su can thiet cua phan tich tri thuc luan doi voi cac nghien cuu ve hoat dong day hoc va dao tao giao vien. [Proceedings of the sixth international conference on mathematics teaching]. *Actes du sixième colloque international en didactique des mathématiques* (pp.17-39), Ho Chi Minh City University of Education,

Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Park, J. (2018). Cultural and mathematical meanings of regular octagons in Mesopotamia: Examining Islamic art designs. *Journal of History Culture and Art Research*, *7*(1), 301-318.

Park, J. (2020). Controversial History of Pi in Ancient Egypt, Old Babylonia, and Ancient Greek Mathematics. *Journal for History of Mathematics*, *33*(4), 223-236.

Phillips, G. (1981). Archimedes the numerical analyst. *The American Mathematical Monthly*, *88*(3), 165-169.

A HISTORICAL – EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF PI (π)

Nguyen Ai Quoc**, *Phan Van Anh

Saigon University, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: naquoc@sgu.edu.vn*

Received: January 18, 2024; Revised: April 24, 2024; Accepted: August 27, 2024

ABSTRACT

This article presents a historical epistemological analysis that clarifies the formation and development of π, identifies key conceptions influencing this process, and determines the epistemological characteristics of π. The research employed historical epistemological methods, reviewing litertaure on the history of π. The findings reveal that π appeared implicitly in the mathematical works of ancient civilizations, including the Egyptians, Babylonians, Greeks, Chinese, and Indians. Concepts from geometry, algebra, arithmetic analysis have influenced the formation and development of π. Notably, the geometric conception posed an epistemological obstacle despite π's true nature as an irrational and transcendental number. The research results contribute to the epistemological understanding of the history of mathematics, offering valuable insights for mathematics teachers in designing instructional scenarios for teaching the concept of π and providing a foundation for further research in mathematical studies related to π.

Keywords: π ; irrational numbers; historical epistemology; quadrature of the circle; ratio of circumference and diameter; transcendent numbers