TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 22, Số 1 (2025): 39-49
Website: https://journal.hcmue.edu.vn
ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 22, No. 1 (2025): 39-49
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.1.4159(2025)

Bài báo nghiên cứu

TÍCH CỦA CÁC MA TRẬN TOÀN PHƯƠNG VÔ HẠN TRÊN TRƯỜNG

Vũ Minh Tâm, Đoàn Cao Minh Trí**
Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
**Tác giả liên hệ: Đoàn Cao Minh Trí – Email: minhtridoancao06@gmail.com*
Ngày nhận bài: 09-3-2024; ngày nhận bài sửa: 14-6-2024; ngày duyệt đăng: 27-6-2024

TÓM TẮT

Cho F là một trường và $p(x)$ là một đa thức bậc hai trong $F[x]$. Kí hiệu $T_\infty(F)$ là vành tất cả các ma trận tam giác trên F. Một ma trận $A \in T_\infty(F)$ được gọi là ma trận toàn phương đối với $p(x)$ hoặc đơn giản là ma trận $p(x)$ - toàn phương nếu $p(A)=0$. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự phân tích của các ma trận trong $T_\infty(F)$ thành tích của các ma trận $p(x)$ - toàn phương trong $T_\infty(F)$. Chúng tôi chứng minh được rằng: Với $k \geq 4$ là số nguyên dương, mọi ma trận trong $T_\infty(F)$ có các phần tử trên đường chéo chính là d^{s_i} $(2 \leq s_i \leq k-2)$ đều có thể biểu diễn thành tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_\infty(F)$ với $p(x)$ là đa thức bậc hai có hai nghiệm $\lambda_1 = d, \lambda_2 = 1$. Đây là một kết quả khá đẹp vì từ nó chúng tôi có thể dễ dàng thu được một kết quả nổi tiếng của tác giả Slowik (Słowik, 2013), cũng như mở ra hướng tiếp theo cho các nghiên cứu sau này.

Từ khóa: ma trận đối hợp; ma trận toàn phương; ma trận vô hạn; tích của các ma trận

1. Giới thiệu

Phân tích ma trận trên trường thành tích của các ma trận có tính chất đặc biệt như ma trận lũy đơn, ma trận đối hợp…, đã thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau.

Xuyên suốt bài báo này, chúng tôi luôn giả sử F là một trường và n là một số nguyên dương. Chúng tôi kí hiệu:

- $\mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$ là vành tất cả các ma trận vuông cấp n trên F;
- $\mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$, $\mathrm{SL}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$ lần lượt là nhóm tuyến tính tổng quát và nhóm tuyến tính đặc biệt bậc n trên F;
- I_n là ma trận đơn vị trong $\mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$;
- $\mathrm{UT}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$ là tập hợp tất cả các ma trận tam giác trên trong $\mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathrm{F})$ sao cho các hệ số nằm trên đường chéo chính của chúng bằng 1.

Cite this article as: Vu Minh Tâm, & Doan Cao Minh Tri (2025). On the products of quadratic infinite matrices over fields. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 22*(1), 39-49.

Một ma trận $A \in M_n(F)$ được gọi là ma trận lũy đơn chỉ số k (tương ứng, ma trận đối hợp) nếu $(A - I_n)^k = 0$ (tương ứng, $A^2 - I_n = 0$). Khi F là trường số phức $\mathbb{C}$, Fong và Sourour (Fong & Sourour, 1986) đã nghiên cứu nhóm sinh bởi các ma trận lũy đơn và chỉ ra được rằng mọi ma trận trong nhóm $SL_n(\mathbb{C})$ đều là tích của ba ma trận lũy đơn (không giới hạn về chỉ số). Sau đó, Wang và Wu (Wang & Wu, 1991) đã chứng minh được một kết quả mạnh hơn như sau: Mọi ma trận trong nhóm $SL_n(\mathbb{C})$ là tích của nhiều nhất bốn ma trận lũy đơn chỉ số 2. Ngoài ra, Gustafson (Gustafson et al., 1976) đã chỉ ra được rằng mọi ma trận có định thức bằng 1 hoặc -1 đều có thể phân tích được thành tích của bốn ma trận đối hợp. Hơn nữa, "bốn" là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này.

Những năm gần đây, người ta cũng dành nhiều sự quan tâm đến bài toán phân tích ma trận vô hạn thành tích của các ma trận có các tính chất đặc biệt như đã kể trên. Nhắc lại rằng $M_\infty(F)$ là tập hợp tất cả các ma trận vô hạn trên F và I_∞ là ma trận đơn vị trong $M_\infty(F)$, $T_\infty(F)$ là vành tất cả các ma trận tam giác trên trong $M_\infty(F)$. Kí hiệu $UT_\infty(F)$ là tập hợp các ma trận trong $T_\infty(F)$ sao cho các hệ số nằm trên đường chéo chính bằng 1. Trong một nghiên cứu gần đây của Słowik (Słowik, 2013), bà đã chứng minh được rằng mọi ma trận trong $T_\infty(F)$ sao cho các hệ số nằm trên đường chéo chính bằng 1 hoặc -1 đều có thể biểu diễn được thành tích của năm ma trận đối hợp. Vào năm 2017, Xin Hou, Shangzhi và Quingquing Zheng (Hou et al., 2017) đã chỉ ra rằng với R là vành kết hợp có đơn vị là 1, thì mọi ma trận trong $UT_\infty(R)$ có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận lũy đơn chỉ số 2. Chúng tôi nhận thấy rằng các ma trận đối hợp và lũy đơn chỉ số 2 trong các kết quả trên đều thỏa tính chất là nghiệm của một đa thức bậc hai $p(x) \in F[x]$, mà ở phần tiếp theo chúng sẽ được gọi là các ma trận toàn phương đối với $p(x)$. Đây cũng chính là động lực để chúng tôi thực hiện bài nghiên cứu này. Cụ thể, chúng tôi chứng minh được rằng: Với $k \geq 4$ là số nguyên dương, mọi ma trận trong $T_\infty(F)$ có các phần tử trên đường chéo chính là d^{s_i} $(2 \leq s_i \leq k-2)$ đều có thể biểu diễn thành tích của k ma trận toàn phương đối với $p(x)$ trong $T_\infty(F)$, với $p(x)$ là đa thức bậc hai có hai nghiệm $\lambda_1 = d$, $\lambda_2 = 1$.

2. Kiến thức chuẩn bị

Đầu tiên, chúng tôi đưa ra định nghĩa thế nào là một ma trận toàn phương đối với $p(x)$ trong $T_\infty(F)$:

Định nghĩa 2.1. *Cho $R = T_\infty(F)$ hoặc $R = T_n(F)$ và $p(x)$ là một đa thức bậc hai trong $F[x]$. Ma trận $A \in R$ sao cho $p(A) = 0$ được gọi là một ma trận toàn phương đối với $p(x)$ hoặc đơn giản là một ma trận $p(x)$-toàn phương.*

Ví dụ 2.2.

- Ma trận đối hợp là ma trận toàn phương đối với $p(x) = x^2 - 1$.
- Ma trận lũy đơn chỉ số hai là ma trận toàn phương đối với $p(x) = (x-1)^2$.

Kể từ đây, nếu không giải thích gì thêm thì ta hiểu $p(x) = x^2 - cx + d \in F[x]$ là một đa thức bậc hai có hai nghiệm $\lambda_1 = d, \lambda_2 = 1$.

Ví dụ 2.3. Ta dễ dàng kiểm tra được: Nếu A là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_n(F)$ $(n \le 2)$ thì A là một trong các dạng sau đây

$$(\lambda_1), (\lambda_2), \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ với } a \in F.$$

Chúng ta dễ dàng kiểm tra được các nhận xét sau đây.

Nhận xét 2.4. *Cho k là một số nguyên dương. Kí hiệu $R = T_\infty(F)$ hoặc $R = T_n(F)$, với $n \ge 1$. Giả sử $R^\times$ là tập hợp tất cả phần tử khả nghịch trong R. Khi đó*

1. Nếu A là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R thì với mọi ma trận $P \in R^\times$, ma trận $P^{-1}AP$ cũng là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

2. Nếu A là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R thì với mọi ma trận $P \in R^\times$, ma trận $P^{-1}AP$ cũng là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Chứng minh.

1. Cho A là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R và P là một ma trận trong $R^\times$. Khi đó, ta có

$$A^2 - cA + dI = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^2 - c(P^{-1}AP) + dI &= P^{-1}(A^2 - cA + dI)P \\ &= P^{-1}.0.P \\ &= 0,\end{aligned}$$

nên $P^{-1}AP$ cũng là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

2. Cho A là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R và P là một ma trận trong $R^\times$. Khi đó, ta có thể viết

$$A = A_1A_2...A_k,$$

với $A_i, 1 \le i \le k$ là các ma trận $p(x)$-toàn phương trong R. Suy ra

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= P^{-1}(A_1A_2...A_k)P \\ &= (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)...(P^{-1}A_kP).\end{aligned}$$

Từ khẳng định 1., $P^{-1}A_iP$ là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R với mọi $i \in \{1,2,...,k\}$. Do đó, ma trận $P^{-1}AP$ cũng là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Cho $A_1, A_2, \dots$ là các ma trận có cấp hữu hạn hoặc vô hạn trên F. Khi đó, ta định nghĩa tổng trực tiếp của ma trận trên là ma trận khối có các khối nằm trên đường chéo chính là $A_1, A_2, \dots$ và kí hiệu là $\mathrm{Diag}(A_1, A_2, \dots)$ hoặc $\bigoplus_{i\ge 1} A_i$.

Nhận xét 2.5. *Cho k là một số nguyên dương. Kí hiệu $R = T_\infty(F)$ hoặc $R = T_n(F)$, với $n \ge 1$. Khi đó*

1. Nếu A_i là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R với mọi $i \ge 1$, thì $A = \bigoplus_{i\ge 1} A_i$ cũng là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

2. Nếu $p(x)$ có một nghiệm bằng 1 và A_i là tích của k_i ma trận $p(x)$-toàn phương trong R, với $1 \le k_i \le k$, $i \ge 1$, thì $A = \bigoplus_{i\ge 1} A_i$ là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Chứng minh

1. Vì với mỗi $i \ge 1$, ta có A_i là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R. Khi đó A_i có thể được biểu diễn dưới dạng

$$A_i = A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k},\ i \ge 1,$$

trong đó A_{i_j}, $1 \le j \le k$ là các ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Mặt khác, với mỗi $j \in \{1, 2, \dots k\}$, ta có

$$p\left(\bigoplus_{i\ge 1} A_{i_j}\right) = \bigoplus_{i\ge 1} p\left(A_{i_j}\right) = 0.$$

Do đó, $\bigoplus_{i\ge 1} A_{i_j}$ cũng là một ma trận $p(x)$-toàn phương trong R. Điều này dẫn đến

$$A = \bigoplus_{i\ge 1} A_i = \bigoplus_{i\ge 1}\left(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\bigoplus_{i\ge 1} A_{i_j}\right)$$

là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

2. Vì $p(x)$ có một nghiệm là 1 nên $p(I) = 0$ hay ma trận I là một $p(x)$-toàn phương trong R. Khi đó, chúng ta bổ sung $k - k_i \ge 0$ ma trận đơn vị I trong phân tích A_i thành tích của k_i ma trận $p(x)$-toàn phương trong R và thu được A_i là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R với mọi $i \ge 1$.

Cuối cùng, áp dụng khẳng định 1., ta thu được $A = \bigoplus_{i\ge 1} A_i$ là tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Bổ đề 2.6 dưới đây là mở rộng của Bổ đề 2.1 trong bài báo của Słowik (Słowik, 2013). Bổ đề được phát biểu như sau:\

Bổ đề 2.6.

1. Nếu hai ma trận $A=(a_{ij})$ *và* $B=(b_{ij})$ *trong* $\mathrm{T_n}(\mathrm{F})$, *với* $n\geq 1$, *thỏa mãn* $a_{ii}=b_{ii}=d$ *và* $a_{i,i+1}=b_{i,i+1}\neq 0$ *với mọi* $i\in\{1;2;...;n\}$ *thì tồn tại một ma trận* $\mathrm{P}\in \mathrm{UT_n}(\mathrm{F})$ *thỏa mãn* $A=P^{-1}BP$.

2. Nếu hai ma trận $A=(a_{ij})$ *và* $B=(b_{ij})$ *trong* $\mathrm{T_\infty}(\mathrm{F})$ *thỏa mãn* $a_{ii}=b_{ii}=d$ *và* $a_{i,i+1}=b_{i,i+1}\neq 0$ *với mọi* $i\geq 1$ *thì tồn tại một ma trận* $\mathrm{P}\in \mathrm{UT_n}(\mathrm{F})$ *thỏa mãn* $A=P^{-1}BP$.

Chứng minh.

Trong chứng minh của bổ đề này chúng tôi chỉ trình bày chứng minh của khẳng định 2. còn khẳng định 1. được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Đầu tiên, ta thấy rằng

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} d & a_{12} & & & * \\ & d & a_{23} & & \\ & & d & a_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} d & & & & \\ & d & & & \\ & & d & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{12}d^{-1} & & & * \\ & 1 & a_{23}d^{-1} & & \\ & & 1 & a_{34}d^{-1} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{dI.A'}.$$

Theo Bổ đề 2.1 trong bài báo của Slowik (Słowik, R. 2013), tồn tại một ma trận $\mathrm{P}\in\mathrm{UT_\infty}(\mathrm{F})$ thỏa mãn

$$\mathrm{A'}=\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a_{12}d^{-1} & & & \\ & 1 & a_{23}d^{-1} & & \\ & & 1 & a_{34}d^{-1} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\mathrm{P}.$$

Suy ra

$$\mathrm{A}=\mathrm{dI.P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a_{12}d^{-1} & & & \\ & 1 & a_{23}d^{-1} & & \\ & & 1 & a_{34}d^{-1} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} d & a_{12} & & & \\ & d & a_{23} & & \\ & & d & a_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\mathrm{P}$$

Tương tự, tồn tại ma trận $\mathrm{Q}\in\mathrm{UT_\infty}(\mathrm{F})$ thỏa mãn

$$B = Q^{-1}\begin{pmatrix} d & b_{12} & & & \\ & d & b_{23} & & \\ & & d & b_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}Q.$$

Khi đó, ta có

$$A = P^{-1}\left(QBQ^{-1}\right)P = \left(Q^{-1}P\right)^{-1} B\left(Q^{-1}P\right),$$

và $Q^{-1}P \in UT_{\infty}(F)$. Như vậy, bổ đề trên được chứng minh.

3. Chứng minh kết quả chính

Trước tiên, chúng tôi chứng minh một bổ đề quan trọng sẽ được dùng trong chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 3.1. *Cho* $R = T_{\infty}(F)$ *hoặc* $R = T_n(F)$, *với* $n \geq 1$. *Nếu* $A = (a_{ij}) \in R$ *thỏa mãn* $a_{ii} = d$ *và* $a_{i,i+1} \neq 0$ *với mọi* i *thì* A *là tích của hai ma trận* $p(x)$*-toàn phương trong* R.

Chứng minh. Trước tiên, trong trường hợp hữu hạn, ta xét ma trận

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} d & a_{12} & & & * \\ & d & a_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & d \end{pmatrix} \in R = T_n(F),$$

trong đó $a_{i,i+1} \neq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Ta chứng minh rằng A là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong R. Ta xét các trường hợp sau:

Với $n = 1$, ta có

$$A = (d) = (\lambda_1)(\lambda_2),$$

là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Với $n = 2$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} d & a_{12} \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & a_{12}\lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Với $n \geq 3$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: n là số chẵn. Ta đặt

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12}\lambda_1^{-1} & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \lambda_1 & a_{34}\lambda_1^{-1} & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_1 & a_{n-1,n}\lambda_1^{-1} \\ & & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

và

$$Y=\begin{pmatrix}\lambda_2 &&&&&&\\ &\lambda_1 & a_{23}\lambda_2^{-1} &&&&\\ && \lambda_2 &&&&\\ &&& \ddots &&&\\ &&&& \lambda_1 & a_{n-2,n-1}\lambda_2^{-1} &\\ &&&&& \lambda_2 &\\ &&&&&& \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Dựa vào Nhận xét 2.5, ý 1, ta dễ dàng kiểm tra hai ma trận X, Y là các ma trận $p(x)$-toàn phương trong R và

$$XY=\begin{pmatrix} d & a_{12} &&& * \\ & d & a_{23} && \\ && \ddots & \ddots & \\ &&& \ddots & a_{n-1,n} \\ &&&& d\end{pmatrix}.$$

Vì $a_{i,i+1} \neq 0$ với mọi $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ nên theo Bổ đề 2.6, ý 1, tồn tại ma trận $P \in UT_n(F)$ thỏa mãn $A = P^{-1}XYP$. Theo Nhận xét 2.4, ý 2, do XY là tích của hai ma trận toàn phương trong R nên A cũng là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Trường hợp 2: n là số lẻ. Ta đặt

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12}\lambda_1^{-1} &&&&&&\\ & \lambda_2 &&&&&&\\ && \lambda_1 & a_{34}\lambda_1^{-1} &&&&\\ &&& \lambda_2 &&&&\\ &&&& \ddots &&&\\ &&&&& \lambda_1 & a_{n-2,n-1}\lambda_1^{-1} &\\ &&&&&& \lambda_2 &\\ &&&&&&& \lambda_1\end{pmatrix}$$

và

$$Y=\begin{pmatrix}\lambda_2 &&&&&&&&\\ & \lambda_1 & a_{23}\lambda_2^{-1} &&&&&&\\ && \lambda_2 &&&&&&\\ &&& \lambda_1 & a_{45}\lambda_2^{-1} &&&&\\ &&&& \lambda_2 &&&&\\ &&&&& \ddots &&&\\ &&&&&& \lambda_1 & a_{n-1,n}\lambda_2^{-1} \\ &&&&&&& \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Tương tự với trường hợp n chẵn, ta chứng minh được A là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong R.

Với $R = T_\infty(F)$, ta xét ma trận

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} d & a_{12} & & & * \\ & d & a_{23} & & \\ & & d & a_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in R$$

trong đó $a_{i,i+1} \neq 0$ với mọi $i \geq 1$. Khi đó, ta đặt

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12}\lambda_1^{-1} & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \lambda_1 & a_{34}\lambda_1^{-1} & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \lambda_1 & a_{56}\lambda_1^{-1} & \\ & & & & & \lambda_2 & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

và

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & & & & \\ & \lambda_1 & a_{23}\lambda_2^{-1} & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & \\ & & & \lambda_1 & a_{23}\lambda_2^{-1} & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tương tự như trường hợp $R = T_n(F)$, ta chứng minh được A là tích của hai ma trận $p(x)$- toàn phương trong $T_\infty(F)$.

Hệ quả 3.2. *Cho* $R = T_\infty(F)$ *hoặc* $R = T_n(F)$, *với* $n \geq 1$. *Nếu* $A = (a_{ij}) \in R$ *thỏa mãn* $a_{ii} = d$ *và* $a_{i,i+j} = 0$ *với mọi* $i \geq 1$, $j \geq 2$ *thì* A *là tích của hai ma trận* $p(x)$*-toàn phương trong* R.

Chứng minh. Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} d & a_{12} & & & \\ & d & a_{23} & & \\ & & d & a_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in R = T_\infty(F).$$

Dễ thấy ma trận A có thể được viết lại thành tổng trực tiếp của một dãy các ma trận thỏa mãn giả thiết của Bổ đề 3.1. Khi đó, A là tổng trực tiếp của các ma trận là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương. Theo Nhận xét 2.5, ý 2, A là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_\infty(F)$.

Lập luận tương tự cho trường hợp $A \in R = T_n(F)$, ta suy ra A là tích của hai ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_n(F)$.

Cuối cùng, chúng tôi đến với kết quả chính của bài nghiên cứu này. Kết quả chính của chúng tôi được phát biểu như sau:

Định lí 3.3. *Cho $k \ge 4$ là một số nguyên dương. Khi đó, mọi ma trận trong*

$$M_k = \left\{ (a_{ij}) \in T_\infty(F) \mid a_{ii} = d^{s_i}, 2 \le s_i \le k-2 \right\}$$

đều có thể biểu diễn được thành tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_\infty(F)$.

Chứng minh.

Lấy A là một ma trận bất kì thuộc M_k, ta có

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} d^{s_1} & a_{12} & & & * \\ & d^{s_2} & a_{23} & & \\ & & d^{s_3} & a_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in M_k.$$

Khi đó, ta đặt

$$A_1 = \begin{pmatrix} d^{s_1-2} & & & & \\ & d^{s_2-2} & & & \\ & & d^{s_3-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1^{k-s_1-2}d^{s_1-2} & & & & \\ & 1^{k-s_2-2}d^{s_2-2} & & & \\ & & 1^{k-s_3-2}d^{s_3-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng A_1 là tích của $(k-4)$ ma trận $p(x)$-toàn phương trong R và

$$A_1^{-1}A = \begin{pmatrix} d^2 & b_{12} & & & * \\ & d^2 & b_{23} & & \\ & & d^2 & b_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

trong đó $b_{i,i+1} \in F$ với mọi $i \ge 1$. Hơn nữa, bằng cách đặt

$$A_2 = \begin{pmatrix} d & (b_{12}-d)d^{-1} & & & & \\ & d & (b_{23}-d)d^{-1} & & & \\ & & d & (b_{34}-d)d^{-1} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

ta thu được ma trận

$$A_2^{-1}A_1^{-1}A = \begin{pmatrix} d & 1 & & & * \\ & d & 1 & & \\ & & d & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Áp dụng Bổ đề 3.1 và Hệ quả 3.2, ta có $A_2^{-1}A_1^{-1}A$ và A_2 đều là tích của hai ma trận $p(x)$ - toàn phương trong R. Do đó,

$$A_1^{-1}A = A_2\left(A_2^{-1}A_1^{-1}A\right)$$

là tích của bốn ma trận $p(x)$ - toàn phương trong R. Cuối cùng, vì

$$A = A_1\left(A_1^{-1}A\right)$$

nên ta có thể biểu diễn ma trận A thành tích của $(k-4)+4=k$ ma trận $p(x)$ - toàn phương trong R.

Định lí 3.3 là một kết quả mạnh, tổng quát hơn các kết quả trước đây. Từ Định lí này, ta dễ dàng chứng minh được một kết quả nổi tiếng của Słowik như sau

Hệ quả 3.4. *(Định lí 1.1, Słowik, 2013) Cho F là một trường bất kì. Khi đó mọi ma trận trong $T_\infty(F)$ sao cho các phần tử trên đường chéo chính là 1 hoặc -1, đều có thể viết thành tích của năm ma trận đối hợp trong $T_\infty(F)$.*

Chứng minh. Xét $k=5$ và $d=-1$. Khi đó

$$M_5 = \left\{(a_{ij}) \in T_\infty(F) \mid a_{ii} = (-1)^{s_i}, 2 \le s_i \le 3\right\}.$$

Dễ thấy rằng M_5 chính là tập các ma trận trong $T_\infty(F)$ sao cho các phần tử trên đường chéo chính là 1 hoặc -1. Áp dụng Định lí 3.3 ta có mọi ma trận trong M_5 đều có thể viết thành tích của năm ma trận đối hợp trong $T_\infty(F)$.

4. Kết luận

Cho F là một trường và $p(x)$ là đa thức bậc hai trong $F[x]$, có một nghiệm là 1, nghiệm còn lại thuộc $F\backslash\{0\}$. Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được rằng, mọi ma trận trong M_k đều có thể phân tích được thành tích của k ma trận $p(x)$-toàn phương trong $T_\infty(F)$. Ngoài ra, trong chứng minh của Định lí 3.3, chúng tôi có sử dụng Nhận xét 2.5, đây là lí do tại sao chúng tôi giả thiết $p(x)$ có một nghiệm là 1. Ở những nghiên cứu sau, chúng tôi sẽ cố gắng tìm câu trả lời cho vấn đề trên trong trường hợp $p(x)$ là đa thức thuộc $F[x]$ có hai nghiệm bất kì trong $F\backslash\{0\}$.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Fong, C. K., & Sourour, A. R. (1986). The group generated by unipotent operators. *Proceedings of the American Mathematical Society, 97*(3), 453-458. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840628-0

Gustafson, W. H., Halmos, P. R., & Radjavi, H. (1976). Products of involutions dedicated to Olga Taussky Todd. *Linear Algebra and its Applications, 13,* 157-162. https://doi.org/10.1016/0024-3795(76)90054-9

Hou, X. (2019). Decomposition of infinite matrices into products of commutators of involutions. *Linear Algebra and its Applications, 563,* 231-239. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.11.001

Hou, X., Li, S., & Zheng, Q. (2017). Expressing infinite matrices over rings as products of involutions. *Linear Algebra and its Applications, 532*, 257-265. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.07.001

Mai, H. B., Truong, H. D., & Nguyen, T. T. H. (2023). A certain decomposition of infinite invertible matrices over division algebras. *Linear and Multilinear Algebra, 71*(12), 1948-1956. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2091508

Słowik, R. (2013). Expressing infinite matrices as products of involutions. *Linear Algebra and its Applications*, 438(1), 399-404. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.07.032

Wang, J. H., & Wu, P. Y. (1991). Products of unipotent matrices of index 2. *Linear Algebra and its Applications, 149,* 111-123. https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90329-U

ON THE PRODUCTS OF QUADRATIC INFINITE MATRICES OVER FIELDS

Vu Minh Tâm, Doan Cao Minh Tri*

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Doan Cao Minh Tri – Email: minhtridoancao06@gmail.com*

Received: March 09, 2024; Revised: June 14, 2024; Accepted: June 27, 2024

ABSTRACT

Let F be a field, and $p(x)$ a quadratic polynomial is given in $F[x]$. We denote by $T_\infty(F)$ the ring of infinite upper triangular matrices over F. A matrix $A \in M_\infty(F)$ is called a quadratic matrix with respect to $p(x)$ if $p(A)=0$. In this article, we will investigate the decomposition of infinite matrices in $T_\infty(F)$ as products of quadratic matrices with respect to $p(x)$ in $T_\infty(F)$. Our main result states that for any positive integer k ($k \geq 4$), every matrix in $T_\infty(F)$ whose diagonal entries are equal to d^{s_i} $(2 \leq s_i \leq k-2)$ can be expressed as a product of at most k quadratic matrices with respect to $p(x)$ in $T_\infty(F)$, where $p(x) \in F[x]$ is a quadratic polynomial has two roots $\lambda_1 = d$, $\lambda_2 = 1$. This result is significant as it provides a direct derivation of a well-known theorem by Słowik (2013) and opens new directions for further research in the decomposition of infinite matrices and their applications.

Keywords: Infinite matrices; Involutions; Products of matrices; Quadratic matrices