

DẠY HỌC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM TRONG MỐI QUAN HỆ LIÊN MÔN VỚI VẬT LÝ

NGÔ MINH ĐỨC*

TÓM TẮT

Dạy học liên môn là xu hướng mới giúp học sinh thấy được những ứng dụng của kiến thức toán trong các khoa học khác. Phần đầu bài báo sẽ chỉ ra các nghĩa của khái niệm đạo hàm và tìm hiểu những ứng dụng của chúng trong chương trình vật lý phổ thông. Kết quả của phân tích này sẽ chỉ ra những điểm cần tính đến để đảm bảo được mối quan hệ liên môn giữa toán học và vật lý liên quan đến khái niệm này. Kết quả phân tích sách giáo khoa toán sau đó sẽ cho thấy mối quan hệ liên môn này đã được quan tâm đến hay chưa.

Từ khóa: dạy học liên môn, đạo hàm, tốc độ biến thiên.

ABSTRACT

Teaching the concept of derivative in Physics interdisciplinarily

Interdisciplinary teaching is a new trend which can help students see the application of mathematical knowledge in other scientific fields. The first part of the article will show the significance of derivative and figure out their applications in high-school Physics. The results of this analysis identifies issues worth considering to ensure the interdisciplinary relationship between Mathematics and Physics related to this concept. The results of the analysis of Math textbooks later reveals if this relationship has been taken into account or not.

Keywords: interdisciplinary teaching, derivative, rate of change.

Hiện nay liên quan đến việc đổi mới phương pháp dạy học toán, có hai xu hướng đang rất được quan tâm: dạy học liên môn và dạy học theo mô hình hóa. Dạy học theo hai xu hướng này là một cách mang lại nghĩa cho các kiến thức toán học, giúp học sinh nhận thấy ứng dụng hiệu quả của toán học trong thực tiễn cuộc sống cũng như trong các khoa học khác. Và nếu phải tìm ra một khái niệm toán học nào có nhiều những ứng dụng đa dạng và hiệu quả thì đạo hàm có lẽ là một ứng cử viên sáng giá. Cũng phải nói thêm rằng, vật lý chính là mảnh đất màu mỡ nhất để chúng ta có thể gieo trồng những ứng dụng đa dạng này của đạo hàm. Lịch sử hình thành và tiến triển của khái niệm đạo hàm còn cho ta thấy được mối quan hệ gắn bó tương hỗ giữa đạo hàm và vật lý. Vật lý cung cấp những bài toán mà việc giải quyết chúng là động lực thúc đẩy ra đời khái niệm đạo hàm (bài toán tìm vận tốc vật thể). Theo chiều ngược lại, đạo hàm đem đến một công cụ toán học đầy quyền lực để nghiên cứu và giải quyết nhiều vấn đề khác nhau trong vật lý.

* ThS, Email: thienhamath@gmail.com

Từ những điểm đó chúng tôi cho rằng, để việc dạy học khái niệm đạo hàm đạt được nhiều hiệu quả hơn thì cần phải đặt nó trong mối quan hệ liên môn với vật lí. Và nếu như thế thì sách giáo khoa (SGK) toán Việt Nam hiện nay khi đưa vào khái niệm đạo hàm có tính đến mối quan hệ liên môn này hay chưa? Việc tìm hiểu câu trả lời cho vấn đề trên cũng chính ta mục tiêu mà bài báo của chúng tôi muốn hướng đến.

Để thực hiện yêu cầu này, công việc mà chúng tôi đặt ra cho mình là tìm hiểu trước tiên các nghĩa của đạo hàm và những ứng dụng của chúng trong chương trình vật lí phổ thông. Kế tiếp đó là phân tích SGK toán để khảo sát xem SGK đưa vào quy trình tiếp cận khái niệm này như thế nào? Các nghĩa nào của đạo hàm có thể xuất hiện, nghĩa nào cần phải xuất hiện thì lại đã không có cơ hội hình thành trong quan hệ cá nhân của học sinh. Các tổ chức toán học nào liên quan đến khái niệm đạo hàm và liên quan đến việc ứng dụng đạo hàm trong các bài toán vật lí. Từ kết quả của những nghiên cứu này, chúng tôi sẽ biết được thể chế dạy học toán hiện nay liên quan đến khái niệm đạo hàm đã đảm bảo được mối quan hệ liên môn với vật lí hay chưa.

1. Nghĩa của đạo hàm và các ứng dụng trong chương trình vật lí phổ thông

1.1. Các nghĩa của khái niệm đạo hàm

Trong lịch sử toán học, đạo hàm của hàm số tại một điểm (nếu tồn tại) có thể mang nhiều ý nghĩa khác nhau vì gắn với những đặc trưng khác nhau:

Nghĩa hình học: Đạo hàm tại một điểm bằng với hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm ấy.

Nghĩa xấp xỉ: Một hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì có thể xấp xỉ nó bằng một hàm số tuyến tính (hàm số tiếp tuyến) quanh lân cận x_0 của theo công thức xấp xỉ:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số đặc trưng cho tốc độ thay đổi (biến thiên) của hàm số theo biến số của nó.

1.2. Ứng dụng đạo hàm trong chương trình vật lí phổ thông

Khái niệm đạo hàm được sử dụng trong chương trình vật lí phổ thông với hai mục đích chính:

- Đặc trưng cho tốc độ biến thiên tức thời của một đại lượng vật lí (chủ yếu là biến thiên theo thời gian). Thuật ngữ “đặc trưng tốc độ biến thiên” được chúng tôi dùng theo nghĩa: Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 phản ánh tương quan về tốc độ tiến về 0 của Δy so với Δx khi $x \rightarrow x_0$. Nói riêng, đạo hàm dương tại x_0 cho thấy hàm sẽ đồng biến trong một lân cận của x_0 , $f'(x_0)$ càng lớn thì $f(x)$ sẽ tăng càng nhanh khi x tăng một lượng nhỏ so với x_0 (tương tự cho đạo hàm âm). Từ “tốc độ” lấy ý tưởng từ vật lí đề cập đến sự tăng (giảm) nhanh hay chậm của y theo x

- Giải thích các xấp xỉ sử dụng trong vật lí: Các xấp xỉ trong vật lí có thể được giải thích theo công thức xấp xỉ affin: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Xấp xỉ này hiểu theo

nghĩa hình học là xấp xỉ đường cong bằng tiếp tuyến của nó quanh lân cận của tiếp điểm.

1.2.1. Ứng dụng nghĩa tốc độ biến thiên trong vật lý

- **Trong SGK Vật lý lớp 10 và 11**

Trước khi khái niệm đạo hàm được đưa vào dạy chính thức ở chương trình toán cuối năm 11, khái niệm này đã xuất hiện ngầm ẩn ở khá nhiều tính huống khác nhau trong SGK Vật lý lớp 10 và 11. Ở các tình huống này, nó đặc trưng cho tốc độ biến đổi tức thời của một đại lượng $u(t)$ nào đó theo thời gian và được xác định bằng tỉ số $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ khi Δt rất bé (tiến dần đến 0).

Chẳng hạn với định nghĩa “vận tốc tức thời” trong chương “Động học chất điểm” SGK Vật lý 10 ban nâng cao (tr.13 - 14 và tr.22):

“Xét vận tốc trung bình của chất điểm chuyển động thẳng trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$. Chọn Δt rất nhỏ, nhỏ đến mức gần bằng 0... Khi đó v_{tb} đặc trưng cho độ nhanh chậm và chiều của chuyển động. Ta có thể dùng vector vận tốc trung bình khi Δt rất nhỏ để đặc trưng cho phương chiều, độ nhanh chậm của chuyển động và gọi đó là vector vận tốc tức thời tại thời điểm t ...”

Khái niệm tốc độ biến thiên còn xuất hiện trong “định luật Fa-ra-đây về cảm ứng điện từ” SGK Vật lý 11 Nâng cao (tr.186):

“...độ lớn của suất điện động cảm ứng trong mạch kín tỉ lệ với **tốc độ biến thiên của từ thông qua mạch**... Nếu trong khoảng thời gian Δt đủ nhỏ, từ thông qua mạch biến thiên một lượng $\Delta \Phi$ thì $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ là **tốc độ biến thiên của từ thông**... Công thức xác

định suất điện động cảm ứng được viết dưới dạng sau: $e_c = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ”

Như vậy, do nhu cầu của mình SGK vật lý đã sớm đưa vào khái niệm tốc độ biến thiên tức thời và hiểu nó như là giới hạn của tốc độ biến thiên trung bình $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ khi Δt dần về 0. Điều này đáng lẽ ra đã tạo thời cơ thuận lợi cho việc hình thành được nghĩa tốc độ biến thiên khi dạy học khái niệm đạo hàm trong chương trình môn toán nếu như chúng ta tận dụng được mối quan hệ liên môn này.

- **Trong SGK Vật lý 12**

Lúc này, thể chế vật lý cho rằng đạo hàm đã được giảng dạy chính thức cuối năm lớp 11 ở SGK toán, vì vậy khái niệm đạo hàm và các nghĩa của nó không cần phải xuất hiện một cách “ngầm ẩn” nữa. Nói riêng nghĩa tốc độ biến thiên của đạo hàm đã xuất hiện một cách tường minh và rõ ràng trong nhiều tình huống khác nhau. Chúng tôi sẽ dẫn ra đây một số ví dụ tiêu biểu:

Đầu tiên là định nghĩa khái niệm “gia tốc góc” trong bài “Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định”:

Gia tốc góc tức thời (gọi tắt là gia tốc góc) của vật rắn quay quanh một trục ở thời điểm t là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của tốc độ góc ở thời điểm đó và được xác định bằng đạo hàm của tốc độ góc theo thời gian.

Chúng ta sẽ phân tích kỹ hơn định nghĩa này: Một mặt gia tốc là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của tốc độ góc, mặt khác nó được xác định một cách rõ ràng là đạo hàm của tốc độ góc theo thời gian. Định nghĩa này chỉ ra rằng đạo hàm đã xuất hiện ở đây với nghĩa đặc trưng cho tốc độ biến thiên của một đại lượng. Nói cách khác nếu một đại lượng vật lý là đặc trưng cho tốc độ biến thiên của một đại lượng khác thì nó có thể được xác định bằng đạo hàm của đại lượng đó.

Ở một tình huống khác, bài “Điện từ trường” trong phần “Điện trường biến thiên và từ trường” SGK Vật lý 12 ban cơ bản (tr.109) có đoạn:

“... Vậy, biểu thức của dòng điện i sẽ có dạng: $i = C \frac{dE}{dt}$ (21.2)

Biểu thức (21.2) cho thấy có sự liên quan mật thiết giữa cường độ dòng điện trong mạch với **tốc độ biến thiên của cường độ điện trường** trong tụ điện.”

Trong nhận định này rõ ràng rằng SGK Vật lý đã đưa ra cách hiểu $\frac{dE}{dt}$ là tốc độ biến thiên của cường độ điện trường E .

Thêm vào đó, những tình huống đạo hàm xuất hiện “ngầm ẩn” trước đây thì bây giờ đã được chính xác hóa. Chẳng hạn với khái niệm “suất điện động” trong bài “Định luật cảm ứng điện từ” ở lớp 11 được xác định là: *suất điện động cảm ứng tỉ lệ với tốc độ biến thiên tức thời của từ thông theo thời gian và được xác định bằng* $e_c = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (với Δt rất bé). Nhưng cũng khái niệm này thì trong bài “Đại cương về dòng điện xoay chiều” (tr.63) của SGK lớp 12 được trình bày như sau:

Vì từ thông Φ qua cuộn dây biến thiên theo t nên trong cuộn dây xuất hiện suất điện động cảm ứng được tính theo định luật Fa-ra-đây:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$$

Bước chuyển tiếp này tưởng chừng là diễn ra tự nhiên, nhưng thật ra nó chỉ hợp lý nếu như đặc trưng tốc độ biến thiên của khái niệm đạo hàm được hình thành trong thể chế dạy học toán mà thôi.

1.2.2. Ứng dụng nghĩa xấp xỉ trong vật lý

Một ứng dụng quan trọng khác của đạo hàm trong vật lý đó là để giải thích các xấp xỉ. Chúng ta đều biết rằng, vật lý sử dụng rất nhiều các xấp xỉ hàm số trong nghiên cứu của mình. Không ngoại lệ, chúng tôi phát hiện thấy ở chương trình vật lý phổ thông xuất hiện những xấp xỉ hàm mặc định được thừa nhận mà không giải thích.

Trong bài phương trình dao động của con lắc đơn SGK Vật lý 12 ban nâng cao có nêu nhận xét sau: *Khi α nhỏ ($\alpha \ll 1 \text{ rad}$) có thể coi gần đúng $\sin \alpha \approx \alpha$.*

Sách Bài tập Vật lí 12 Nâng cao (tr.79) còn đưa ra thêm các xấp xỉ khác: Với $\varepsilon \ll 1$, có thể dùng những công thức gần đúng:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon; \sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$$

Nói riêng, nếu xét tại $x_0 = 0$, thì hàm số $y = \sin x$ sẽ có phương trình tiếp tuyến là: $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \cos 0 \cdot x + 0 \Leftrightarrow y = x$. Thế nên việc xấp xỉ hàm số bởi tiếp tuyến của nó sẽ cho ta xấp xỉ hàm: $\sin x \approx x$, khi x trong lân cận của 0 (x rất bé).

Lẽ dĩ nhiên việc giải thích hay chứng minh các xấp xỉ nói trên là nhiệm vụ của toán học (vì nếu không thế thì học sinh sẽ đặt câu hỏi vì đâu mà có được những xấp xỉ này). Và bởi vì thể chế dạy học vật lí cần sử dụng các xấp xỉ hàm số nên để hợp lí hơn thì chương trình giảng dạy toán phải giải quyết nhu cầu này một cách ổn thỏa.

Tóm lại, trong thể chế dạy học vật lí, khái niệm đạo hàm được sử dụng với nghĩa tường minh là đặc trưng cho tốc độ biến thiên và là công cụ để giải thích các xấp xỉ. Vì thế, việc ứng dụng công cụ đạo hàm trong vật lí chỉ thực sự hợp lí và nổi khớp nếu như quá trình dạy học nó trong chương trình toán phổ thông có thể làm xuất hiện được những đặc trưng cơ bản này.

Những luận điểm trên là cơ sở để chúng tôi đi đến kết luận: **Việc dạy học khái niệm đạo hàm thật sự cần thiết phải đặt trong mối quan hệ liên môn với vật lí.**

Rõ ràng hơn, quan điểm liên môn này thể hiện ở chỗ: Quá trình dạy học khái niệm đạo hàm cần phải làm xuất hiện được ở học sinh hai đặc trưng cơ bản: đặc trưng tốc độ biến thiên tức thời và đặc trưng xấp xỉ. Theo quan điểm của chúng tôi thì quan trọng hơn là đặc trưng tốc độ biến thiên. Sự thiếu vắng đặc trưng này trong mối quan hệ cá nhân của học sinh có thể ngăn cản việc ứng dụng nó một cách hiệu quả trong dạy học vật lí.

2. Khái niệm đạo hàm trong thể chế dạy học toán

Trong khuôn khổ một bài báo khoa học chúng tôi sẽ chỉ trình bày tóm lược những kết quả từ việc phân tích thể chế dạy học toán liên quan đến khái niệm đạo hàm (Một phân tích đầy đủ và chi tiết hơn, các bạn có thể tham khảo trong luận văn: *Khái niệm đạo hàm trong dạy học toán và vật lí ở trường phổ thông* của cùng tác giả [2]).

2.1. Về cách tiếp cận khái niệm

Việc dạy học khái niệm đạo hàm vẫn được SGK nhìn nhận theo quan điểm liên môn khi đề cập đến vai trò của công cụ này trong các ngành khoa học khác đặc biệt là vật lí. Hơn nữa, SGK còn đưa ra hai bài toán vật lí là bài toán tìm vật tốc tức thời và tìm cường độ dòng điện để dẫn dắt tới khái niệm đạo hàm.

Tuy nhiên quá trình đưa ra và giải quyết các bài toán vật lí chỉ nhằm mục tiêu làm xuất hiện nhu cầu phải tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, mà không giải thích ý nghĩa của giới hạn này như là tốc độ biến thiên tức thời của hàm số theo biến của nó.

2.2 Về định nghĩa của đạo hàm

SGK định nghĩa đạo hàm là giới hạn (nếu tồn tại): $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Để thuận lợi cho nghĩa tốc độ biến thiên xuất hiện, khái niệm số gia $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ cần được hiểu như là sự biến thiên của hai đại lượng x và y . Theo đó tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sẽ cho thấy được tốc độ biến thiên trung bình của y theo x . Nhưng theo nghiên cứu của các tác giả trước chẳng hạn, kết quả của tác giả Nguyễn Thị Cẩm Trinh trong Luận văn Thạc sĩ: *Nghiên cứu didactic về Δx trong Toán học và trong Vật lý*: “ Δx chỉ đóng vai trò là một kí hiệu hình thức, vai trò đối tượng lẫn công cụ đều mờ nhạt trong tri thức được tiếp thu... Δx chỉ sống được khi gắn với mô hình Vật lý” [8].

Chúng tôi nhận thấy rằng ý niệm về số gia như là sự gia tăng (biến thiên) không thể hiện rõ ràng trong cách hiểu của học sinh, cùng với đó quan niệm về tốc độ biến thiên cũng sẽ khó xuất hiện trong thể chế dạy học toán.

2.3 Về ý nghĩa vật lý của đạo hàm

SGK chỉ dừng lại ở việc đưa vào ba công thức tính vận tốc, gia tốc và cường độ dòng điện bằng đạo hàm. Việc SGK không tiến xa hơn để chỉ ra được ý nghĩa tổng quát về tốc độ biến thiên ẩn bên dưới các ứng dụng này có thể ngăn cản việc ứng dụng đạo hàm trong các tình huống khác của vật lý.

2.4 Về đặc trưng xấp xỉ của đạo hàm

Đặc trưng xấp xỉ của đạo hàm thể hiện ở công thức xấp xỉ:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

Theo đó một hàm số có đạo hàm có thể được xấp xỉ bởi hàm số tiếp tuyến (hàm tuyến tính) ở gần lân cận của tiếp điểm và đạo hàm chính là hệ số bậc nhất của hàm tuyến tính này. SGK đưa ra xấp xỉ (*) dưới dạng một công thức tính gần đúng trong bài “Vi phân” và hình thành xấp xỉ này không đi từ con đường xấp xỉ hình học (xấp xỉ đồ thị bằng tiếp tuyến của nó quanh lân cận tiếp điểm) mà đi từ định nghĩa đạo hàm theo giới hạn. Hơn nữa, một kết quả nghiên cứu của tác giả Bùi Thị Thu Hiền [7] cũng đã chỉ ra nghĩa xấp xỉ hàm của khái niệm đạo hàm không hề tồn tại trong quan hệ cá nhân của học sinh.

2.5 Các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đạo hàm

Chúng tôi thấy rằng trong thể chế dạy học toán không có một kiểu nhiệm vụ nào liên quan đến nghĩa tốc độ biến thiên của khái niệm đạo hàm. Chỉ trừ ra một trường hợp duy nhất trong SGK Nâng cao 12 phần “Tính đơn điệu của hàm số” (Bài 10/tr 9):

Trong bài toán này có yêu cầu tính “tốc độ tăng dân số trong từng năm”, tuy nhiên dường như ý thức được nghĩa tốc độ tăng của đạo hàm chưa được hình thành

trong quan niệm của học sinh nên trước khi đặt câu hỏi, SGK có đưa vào một thông báo: “Đạo hàm của hàm số biểu thị tốc độ tăng dân số...”

Các phân tích thể chế SGK toán ở trên đã chỉ ra rằng **nghĩa tốc độ biến thiên và nghĩa xấp xỉ khó có khả năng xuất hiện trong mối quan hệ cá nhân của các em học sinh** (một thực nghiệm được tác giả tiến hành đã kiểm chứng nhận định này). SGK không nhấn mạnh và làm rõ các nghĩa này dẫn đến quá trình ứng dụng đạo hàm như là một công cụ nghiên cứu và học tập vật lý gặp nhiều khó khăn. Bên cạnh đó việc lãng tránh các kiểu nhiệm vụ liên quan đến hai đặc trưng cơ bản này của đạo hàm càng cho thấy rằng, thể chế dạy học toán không hề muốn tạo điều kiện cho các nghĩa này có thể hình thành và tồn tại trong quan niệm cá nhân của học sinh.

3. Kết luận

Một mặt thể chế dạy học vật lý (thể chế I_1) đưa ra các tình huống xuất hiện nghĩa tốc độ biến thiên tức thời của một đại lượng và nếu tận dụng được sẽ tạo thuận lợi cho việc hình thành nghĩa này trong thể chế dạy toán (thể chế I_2).

Mặt khác, I_1 cũng đặt ra một nhiệm vụ quan trọng cho I_2 khi đòi hỏi I_2 phải làm xuất hiện được hai đặc trưng cơ bản của đạo hàm (đặc biệt là nghĩa tốc độ biến thiên). Bởi lẽ chỉ khi hình thành được những nghĩa này, việc ứng dụng đạo hàm trong dạy học vật lý ở trường phổ thông mới có thể diễn ra nối khớp và hiệu quả.

Rõ ràng rằng, việc dạy học khái niệm đạo hàm rất cần phải đặt trong mối quan hệ liên môn với vật lý để học sinh không những có thể hiểu rõ bản chất của khái niệm mà còn có thể ứng dụng hiệu quả nó trong các ngành khoa học khác.

Và nếu như thế thì SGK toán Việt Nam hiện nay chưa tính đến một cách thỏa đáng mối quan hệ liên môn với vật lý. Hệ lụy của thiếu sót này không những ngăn cản việc thấu hiểu khái niệm đạo hàm của học sinh một cách thực chất mà còn tạo ra hàng rào ngăn cản các em thấy được các ứng dụng đa dạng của khái niệm quan trọng này trong vật lý và cả các ngành khoa học khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Thị Hoài Châu (2014), “Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm”, *Tạp chí Khoa học*, Trường Đại học Sư phạm TPHCM, (65).
2. Ngô Minh Đức (2013), *Khái niệm đạo hàm trong dạy học Toán và Vật lý ở trường phổ thông*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TPHCM.
3. Nguyễn Thế Khôi (Tổng chủ biên), Phạm Quy Tư (Chủ biên), Lương Tấn Đạt, Lê Chân Hùng, Nguyễn Ngọc Hưng, Phạm Đình Thiết, Bùi Trọng Tuấn, Lê Trọng Tường (2014), *Vật lý 10 (Nâng cao)*, Nxb Giáo dục.

4. Nguyễn Thế Khôi (Tổng chủ biên), Vũ Thanh Khiết (Chủ biên), Nguyễn Đức Hiệp, Nguyễn Ngọc Hưng, Nguyễn Đức Thâm, Phạm Đình Thiết, Vũ Đình Túy, Phạm Quý Tư (2014), *Vật lí 12 (Nâng cao)*, Nxb Giáo dục.
5. Nguyễn Thế Khôi (Tổng chủ biên), Nguyễn Phúc Thuận (Chủ biên), Nguyễn Ngọc Hưng, Vũ Thanh Khiết, Phạm Xuân Quế, Phạm Đình Thiết, Nguyễn Trần Trác (2014), *Vật lí 11 (Nâng cao)*, Nxb Giáo dục,.
6. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Vũ Tuấn (Chủ biên), Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Việt Yên (2014), *Đại số và Giải tích 11*, Nxb Giáo dục.
7. Bùi Thị Thu Hiền (2007), *Mối liên hệ giữa tiếp tuyến và đạo hàm*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
8. Nguyễn Thị Cẩm Trinh (2010), *Nghiên cứu didactic về Δx trong toán học và trong vật lí*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
9. Judith, V. G. (1983), *The changing concept of change: The Derivative from Fermat to Weierstrass*, Mathematics Magazine, University of California, Los Angeles.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 22-6-2015; ngày phản biện đánh giá: 14-7-2015;
ngày chấp nhận đăng: 22-9-2015)