

Bài báo nghiên cứu VỀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ CỦA ĐẠI SỐ LIE HEISENBERG

Dương Quang Hòa^{1*}, Hà Văn Hiếu², Nguyễn Thị Mộng Tuyền³

¹Trường Đại học Tài chính – Marketing, Việt Nam

²Trường Đại học Kinh tế – Luật, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

³Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Dương Quang Hòa – Email: hoa.duongquang@ufm.edu.vn

Ngày nhận bài: 06-9-2024; Ngày nhận bài sửa: 31-12-2024; Ngày duyệt đăng: 05-09-2025

TÓM TẮT

Đại số Lie Heisenberg đóng vai trò quan trọng trong cả toán học và vật lý, đặc biệt là trong cơ học lượng tử. Các đại số này giúp chúng ta biểu diễn nguyên lý không chắc chắn và các mối quan hệ giao hoán giữa các biến cổ trong cơ học lượng tử. Nhiều khía cạnh và tính chất cùng những ứng dụng của đại số Lie Heisenberg đã được nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi tập trung vào biểu diễn rời rạc của đại số Lie Heisenberg. Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu về đồ thị giao hoán của họ tất cả các đại số Lie Heisenberg. Từ đó chỉ ra hình dáng của chúng, và nêu một số đặc trưng quan trọng như là tính liên thông và đường kính.

Từ khóa: đồ thị giao hoán; liên thông; đường kính; Đại số Lie Heisenberg

1. Mở đầu

Đại số Lie Heisenberg đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học và vật lý, từ lý thuyết biểu diễn đến cơ học lượng tử. Tầm quan trọng của đại số này bắt nguồn từ việc nó cung cấp một cấu trúc toán học cho việc mô hình hóa mối quan hệ giao hoán giữa các quan sát lượng tử, một khía cạnh căn bản của thế giới lượng tử. Một trong những ứng dụng quan trọng nhất của đại số Lie Heisenberg là trong mô hình hóa *nguyên lý không chắc chắn của Heisenberg* (Heisenberg, 1927). Nguyên lý này xác định rằng có một mức độ không chắc chắn trong việc đo lường hai quan sát lượng tử cơ bản là vị trí và động lượng. Đại số Lie Heisenberg cũng đóng một vai trò quan trọng trong *lý thuyết biểu diễn* (Humphreys, 1972). Nhờ vào những tính chất đặc biệt của mình, đại số Lie Heisenberg là một công cụ mạnh mẽ trong việc nghiên cứu cấu trúc và tính chất của các biểu diễn của các nhóm và đại số Lie khác.

Trong khi đó, mối quan hệ giữa các cấu trúc toán học (như nhóm, vành, đại số) và lý thuyết đồ thị đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên khắp thế giới. Nhiều kết quả thú vị đã được chứng minh và mở ra những ứng dụng mới để nghiên cứu cả hai vấn đề nêu trên (Anderson & Badawi, 2008; Anderson, 2011; Akbari et al., 2004, 2006, 2008; Dorbidi, 2023; Miguel, 2016; Cao et al., 2023). Trong mạch nghiên cứu ấy, thì mối quan hệ

Cite this article as: Duong, Q. H., Ha, V. H., & Nguyen, T. M. T. (2025). On some graph properties of Heisenberg Lie Algebras. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 22(10), 1859-1866. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.10.4490\(2025\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.10.4490(2025))

giữa các đại số Lie và lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực nghiên cứu thú vị trong toán học, nơi các cấu trúc đại số của đại số Lie có thể được phản ánh lại thông qua các mối quan hệ của lý thuyết đồ thị, mở ra những cách tiếp cận mới để hiểu và khám phá tính chất của cả hai lĩnh vực (Wang & Xia, 2017). Một đại số Lie có thể được biểu diễn dưới dạng một đồ thị, trong đó các đỉnh của đồ thị tương ứng với các phần tử không nằm trong tâm của đại số Lie đó và các cạnh của đồ thị biểu diễn mối quan hệ giao hoán giữa các đỉnh. Thông qua đó, các phương pháp và kỹ thuật của lý thuyết đồ thị có thể được áp dụng để phân tích cấu trúc của các đại số Lie. Mối quan hệ qua lại giữa một cấu trúc đại số (đại số Lie) và một cấu trúc rời rạc (đồ thị) cung cấp một khía cạnh mới và sâu sắc trong việc nghiên cứu cấu trúc và tính chất của cả hai lĩnh vực, mở ra những sự liên kết và ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học và vật lý. Trong bài báo xuất bản năm 2017, Wang và Xia đã nghiên cứu mối quan hệ này cho các đại số Lie đơn. Trong bài nghiên cứu này, chúng tôi sẽ nghiên cứu về những tính chất quan trọng của đồ thị của các Đại số Lie Heisenberg. Hai đặc trưng cơ bản của những đồ thị này là tính liên thông và đường kính cũng sẽ được xác định một cách cụ thể.

2. Một số kí hiệu và khái niệm cơ bản

Phần này trình bày một cách sơ lược các khái niệm cơ bản của Lý thuyết đồ thị và Lý thuyết Đại số Lie. Bạn đọc có thể xem chi tiết hơn ở tài liệu Chartrand (1996), Šnobl và Winternitz (2014).

Một đồ thị đơn, vô hướng (sau đây gọi tắt là đồ thị) là một cặp có thứ tự, $G = (V, E)$, bao gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$ và tập cạnh $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \text{ và } x \neq y\}$. Hai đỉnh phân biệt u và v được gọi là kề nhau nếu $\{u, v\}$ thuộc E . Một đường nối v_1 và v_k trong G là một dãy các đỉnh đôi một phân biệt $v_1, v_2, \dots, v_k$ sao cho $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Chúng ta sẽ kí hiệu đường này là $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Độ dài của đường $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ được định nghĩa là $k - 1$. Khoảng cách giữa hai đỉnh u và v , kí hiệu là $\text{dist}(u, v)$, là độ dài của đường ngắn nhất nối chúng. Nếu mọi cặp đỉnh phân biệt của G được nối bởi ít nhất một đường, ta nói rằng G là liên thông. Ngược lại, ta nói G không liên thông. Đường kính của đồ thị G , kí hiệu $\text{diam}(G)$, được định nghĩa như sau:

$$\text{diam}(G) = \sup\{\text{dist}(u, v) : u \neq v\}.$$

Cho U là một tập con khác rỗng của V . Ta định nghĩa đồ thị con của G cảm sinh bởi U là đồ thị bao gồm tập đỉnh U và tập cạnh $\{\{x, y\} \in E \mid x, y \in U\}$. Đồ thị con của G được gọi là một thành phần liên thông của G nếu nó được cảm sinh bởi một tập hợp lớn nhất các đỉnh sao cho đồ thị con đây là đồ thị liên thông. Tập hợp các tập đỉnh của tất cả các thành phần liên thông của G tạo thành một phân hoạch của V . Một đồ thị được gọi là đầy đủ nếu mọi cặp đỉnh phân biệt đều kề nhau. Ta sẽ kí hiệu đồ thị đầy đủ có n đỉnh là K_n và có tập đỉnh $S \subseteq V$ là K_S . Đồ thị G được gọi là r -chính quy bậc n , nếu nó bao gồm n đỉnh sao cho mỗi đỉnh đều kề nhau với đúng r đỉnh khác.

Cho $(L, [\cdot, \cdot])$ là một đại số Lie xác định trên một trường $\mathbb{F}$ nào đó. Khi đó tâm của L , kí hiệu $Z(L)$, được xác định như sau:

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, y] = 0, \forall y \in L\}.$$

Với mỗi $x \in L$, ta định nghĩa toán tử liên hợp $\text{ad}_x : L \rightarrow L$ là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $\text{ad}_x(y) := [x, y]$.

Định nghĩa 1. (Wang & Xia, 2017) Cho L là đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$ với tâm $Z(L)$, đồ thị giao hoán của L , kí hiệu $\Gamma(L) = (V_L, E_L)$, là một đồ thị với tập đỉnh và tập cạnh như sau:

$$V_L = L \setminus Z(L) \quad \text{và} \quad E_L = \{[x, y] \mid x \neq y \text{ và } [x, y] = 0\}.$$

Để thuận tiện, ta sẽ kí hiệu $\text{CC}_{\mathbb{F}}(L)$ là tập hợp tất cả các thành phần liên thông của $\Gamma(L)$. Chú ý rằng đồ thị giao hoán $\Gamma(L)$ của một đại số Lie L là hữu hạn khi và chỉ khi trường $\mathbb{F}$ là một trường hữu hạn, tức là $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Do đó, trong trường hợp $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, số các thành phần liên thông của $\Gamma(L)$ là hữu hạn, và ta kí hiệu số này là $|\text{CC}_{\mathbb{F}_q}(L)|$. Để thuận tiện, từ giờ trở đi, một không gian vectơ có tập sinh là $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ sẽ được ký hiệu là $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ và đối với một tập con S bất kì của một không gian vectơ, ta sẽ kí hiệu S^* là tập hợp các phần tử khác vectơ 0 của S , tức là $S^* := S \setminus \{0\}$. Ví dụ như với một vectơ x bất kì thuộc L thì ta có $\langle x \rangle^* = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{F}, \lambda \neq 0\}$.

3. Các kết quả chính

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày các kết quả chính về tính liên thông của đồ thị giao hoán của tất cả các đại số Lie Heisenberg. Trong trường hợp chúng liên thông, ta sẽ xác định đường kính của các đồ thị, trong trường hợp ngược lại, ta sẽ chỉ ra tất cả các thành phần liên thông của chúng. Nếu như bổ sung thêm điều kiện $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, thì ta sẽ xác định số thành phần liên thông và phác thảo hình dạng của chúng. Nhắc lại rằng, một đại số Lie Heisenberg $(2m + 1)$ chiều ($m \geq 1$) trên trường $\mathbb{F}$, kí hiệu h_{2m+1} , là một đại số Lie với cơ sở và móc Lie xác định như sau:

$$h_{2m+1} = \langle x_i, y_i, z \mid i = 1, \dots, m \rangle : [x_i, y_i] = z, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Mệnh đề 2. Với m là một số nguyên dương bất kì, thì đồ thị giao hoán của đại số Lie Heisenberg h_{2m+1} có những tính chất sau:

- i. Nếu $m = 1$ thì $\Gamma(h_3)$ không liên thông,
- ii. Nếu $m \geq 2$ thì $\Gamma(h_{2m+1})$ liên thông. Hơn nữa, đường kính của đồ thị giao hoán của h_{2m+1} bằng 2, tức là $\text{diam}(\Gamma(h_{2m+1})) = 2$.

Chứng minh.

Trước tiên, ta dễ dàng tính được $Z(h_{2m+1}) = \langle z \rangle = L^1$ với mọi m .

i. Với $m = 1$, đại số Lie Heisenberg $h_3 = \langle x_1, y_1, z \rangle$ được xác định bởi: $[x_1, y_1] = z$. Ta sẽ chứng minh đồ thị giao hoán của h_3 không liên thông bằng cách chỉ ra một thành phần liên thông thực sự của $\Gamma(h_3)$. Thực vậy, với mọi $a, c \in \mathbb{F}$ sao cho $a \neq 0$, thì ta có thể kiểm tra trực tiếp sự tương đương sau:

$$[ax_1 + cz, ax_1 + \beta y_1 + \gamma z] = 0 \Leftrightarrow a\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Từ đó suy ra, với $a \neq 0$ và c bất kì, các đỉnh kề nhau với $ax_1 + cz$ cũng phải có dạng $ax_1 + \gamma z$ với $\alpha \neq 0$. Do đó, các đỉnh trong tập hợp $\{ax_1 + cz : a \neq 0\}$ kề với nhau và không kề với bất kì đỉnh nào khác. Nói một cách khác, đồ thị con của $\Gamma(h_3)$ cảm sinh bởi tập hợp các đỉnh có dạng $\{ax_1 + cz : a \neq 0\}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma(h_3)$. Ý thứ nhất được chứng minh hoàn toàn.

ii. Giả sử $m \geq 2$. Khi đó với hai đỉnh u, v tùy ý của $\Gamma(h_{2m+1})$, ta luôn có:

$$\dim(\text{Ker}(\text{ad}_u)) = (2m + 1) - \dim(\text{Im}(\text{ad}_u)) = 2m,$$

$$\dim(\text{Ker}(\text{ad}_v)) = (2m + 1) - \dim(\text{Im}(\text{ad}_v)) = 2m.$$

Do đó,

$$\dim(\text{Ker}(\text{ad}_u) \cap \text{Ker}(\text{ad}_v)) \geq 2m - 2 \geq 2.$$

Vì vậy, luôn tồn tại một đỉnh $w \in V_{h_{2m+1}}$ sao cho $w \in \text{Ker}(\text{ad}_u) \cap \text{Ker}(\text{ad}_v)$. Hay nói cách khác, $\{u, w, v\}$ là một đường nối u và v . Từ đây suy ra:

$$\text{dist}(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V_{h_{2m+1}}$$

Mặt khác, dễ dàng thấy $\text{dist}(x_1, y_1) \geq 2$ vì $[x_1, y_1] \neq 0$.

$$\text{Do vậy } \text{diam}(\Gamma(h_{2m+1})) = 2. \quad \square$$

Để phác thảo hình dạng của đồ thị giao hoán của các đại số Lie Heisenberg, chúng ta sẽ xem xét hạn chế chúng trên các trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Kết quả được phát biểu trong mệnh đề bên dưới.

Mệnh đề 3. Xét một đại số Lie Heisenberg h_{2m+1} trên một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$ được định nghĩa như trên. Khi đó:

i. Nếu $m = 1$ thì $\Gamma(h_3)$ bao gồm $q + 1$ thành phần liên thông, mỗi thành phần liên thông là một đồ thị đầy đủ gồm $q(q - 1)$ đỉnh, như sau:

$$\text{CC}_{\mathbb{F}_q}(h_3) = \{K_{\langle x_1 \rangle^* + \langle z \rangle}, K_{\langle x_1 + b_1 y \rangle^* + \langle z \rangle} \mid b_1 \in \mathbb{F}_q\}.$$

ii. Nếu $m \geq 2$ thì $\Gamma(h_{2m+1})$ là một đồ thị r -chính quy bậc $q(q^{2m} - 1)$, với $r = q^{2m} - q - 1$.

Chứng minh.

Trước tiên, ta dễ dàng nhận thấy rằng $Z(h_{2m+1}) = \langle z \rangle = L^1$ với mọi m . Ta sẽ chứng minh từng trường hợp như sau:

i. Với $m = 1$, đại số Lie Heisenberg $h_3 = \langle x_1, y_1, z \rangle$ được xác định bởi: $[x_1, y_1] = z$. Tập đỉnh của đồ thị này được xác định như sau:

$$V_{h_3} = \{a_1 x_1 + b_1 y_1 + cz \mid a_1, b_1, c \in \mathbb{F}_q, (a_1, b_1) \neq (0, 0)\}.$$

Lấy

$$u = a_1 x_1 + b_1 y_1 + cz; \quad v = a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'z$$

là 2 đỉnh tùy ý của $\Gamma(h_3)$. Lưu ý rằng vì u, v là 2 đỉnh của $\Gamma(h_3)$ nên ta có:

$$(a_1, b_1) \neq (0, 0); \text{ và } (a'_1, b'_1) \neq (0, 0).$$

Dựa theo hằng số cấu trúc của h_3 , ta dễ dàng chứng minh được:

$$[u, v] = 0 \Leftrightarrow a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = 0.$$

Do đó, với mọi đỉnh u, v như trên, ta có:

- Nếu $a_1 = 0$ thì $[u, v] = 0 \Leftrightarrow a'_1 = 0$. Từ đó suy ra, các đỉnh trong tập hợp $\{b_1 x_1 + cz \mid b_1 \in \mathbb{F}_q^*, c \in \mathbb{F}_q\}$ đôi một kề nhau và không kề với bất kì đỉnh nào nằm ngoài tập hợp này. Điều này có nghĩa là, đồ thị con của $\Gamma(h_3)$ cảm sinh bởi tập hợp

$\{a_1x_1 + cz \mid a_1 \in \mathbb{F}_q^*, c \in \mathbb{F}_q\}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma(h_3)$ và thành phần liên thông này là một đồ thị đầy đủ với $q(q-1)$ đỉnh. Lưu ý rằng:

$$\{a_1x_1 + cz \mid a_1 \in \mathbb{F}_q^*, c \in \mathbb{F}_q\} = \langle x_1 \rangle^* + \langle z \rangle.$$

- Nếu $a_1 \neq 0$, thì ta có

$$[u, v] = 0 \Leftrightarrow b'_1 = \frac{a'_1}{a_1} b_1$$

Do đó, mỗi đỉnh trong tập hợp $\{a_1(x_1 + \frac{b_1}{a_1}y_1) + cz \mid a_1 \neq 0, b_1, c \in \mathbb{F}_q\}$ là kề nhau và không kề với bất kì đỉnh nào khác nằm ngoài tập hợp trên. Từ đó suy ra, đồ thị sinh ra bởi tập đỉnh $\langle x_1 + b_1y_1 \rangle^* + \langle z \rangle$ là một thành phần liên thông của $\Gamma(h_3)$, và thành phần liên thông này là một đồ thị đầy đủ có $q(q-1)$ đỉnh.

Tổng kết lại, ta nhận thấy $\Gamma(h_3)$ có tất cả là $q+1$ thành phần liên thông, mỗi thành phần liên thông có $q(q-1)$ đỉnh, như sau:

$$CC_{\mathbb{F}_q}(h_3) = \{K_{\langle x_1 \rangle^* + \langle z \rangle}, K_{\langle x_1 + b_1y_1 \rangle^* + \langle z \rangle} \mid b_1 \in \mathbb{F}_q\}$$

ii. Giả sử $m \geq 2$. Khi đó, tập đỉnh của $\Gamma(h_{2m+1})$ là

$$V_{h_{2m+1}} = \{\sum_{i=1}^m (a_ix_i + b_iy_i) + cz \mid a_i, b_i, c \in \mathbb{F}_q\} \setminus \langle z \rangle.$$

Như vậy đồ thị này có tất cả $q(q^{2m}-1)$ đỉnh. Bây giờ, với mỗi đỉnh tùy ý $u \in V_{h_{2m+1}}$, ta chứng minh u kề nhau với $q^{2m}-q-1$ đỉnh phân biệt trong $V_{h_{2m+1}}$. Thật vậy, giả sử:

$$u = \sum_{i=1}^m (a_ix_i + b_iy_i) + cz.$$

Vì $u \in V_{h_{2m+1}}$ nên các giá trị $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ không thể đồng thời bằng 0.

Lấy

$$v = \sum_{j=1}^m (a'_jx_j + b'_jy_j) + c'z$$

là một đỉnh bất kì trong $V_{h_{2m+1}}$. Ta dễ dàng kiểm tra được:

$$\begin{aligned} [u, v] = 0 &\Leftrightarrow [\sum_{i=1}^m (a_ix_i + b_iy_i) + cz, \sum_{j=1}^m (a'_jx_j + b'_jy_j) + c'z] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (a_ib'_i - a'_ib_i) = 0. \end{aligned}$$

Ta xem $a_i, b_i : i = 1, \dots, m$ là các hằng số và $a'_i, b'_i : i = 1, \dots, m$ là các ẩn số. Lúc đó phương trình $\sum_{i=1}^m (a_ib'_i - a'_ib_i) = 0$ là một phương trình bậc nhất với $2m$ ẩn trên trường $\mathbb{F}_q$, nên số nghiệm không tầm thường của nó là $q^{2m-1}-1$. Từ đây suy ra số đỉnh kề nhau với u là $(q^{2m-1}-1)q-1$ (loại bỏ 1 đỉnh là chính u). Nói cách khác $\Gamma(h_{2m+1})$ là một đồ thị $(q^{2m}-q-1)$ -chính quy bậc $q(q^{2m}-1)$. $\square$

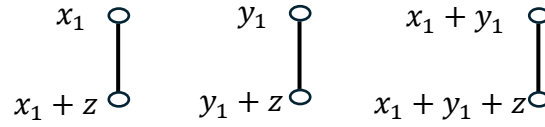
Trong phần còn lại, chúng ta sẽ vẽ minh họa đồ thị giao hoán của các đại số Lie Heisenberg, để cho đơn giản, ta chọn $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ và phác thảo đồ thị $\Gamma(h_3)$ (không liên thông) và $\Gamma(h_5)$ (liên thông) làm đại diện.

• Với trường hợp $\Gamma(h_3)$, ta có:

$$V_{h_3} = \{x_1, y_1, x_1 + y_1, x_1 + z, y_1 + z, x_1 + y_1 + z\}.$$

Đồ thị giao hoán của h_3 có 3 thành phần liên thông, trong đó mỗi thành phần liên thông là một đồ thị đầy đủ với tập đỉnh như sau:

$$\{x_1, x_1 + z\}; \{y_1, y_1 + z\}; \{x_1 + y_1, x_1 + y_1 + z\}.$$

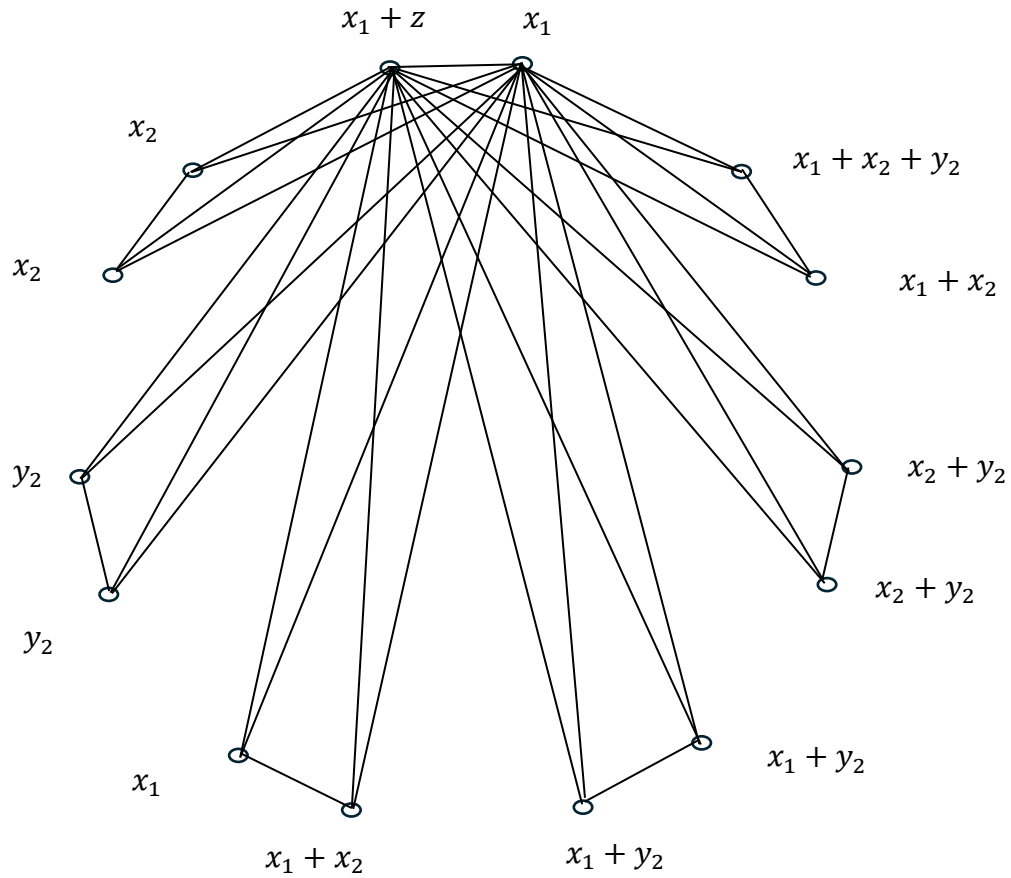


Hình 1. Đồ thị giao hoán của h_3

- Với trường hợp $\Gamma(h_5)$, ta có:

$$V_{h_5} = \{a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2 + cz | a_i, b_i, c \in \mathbb{F}_2\} \setminus \langle z \rangle.$$

Đồ thị này có tất cả là $2^5 - 2 = 30$ đỉnh, trong đó mỗi đỉnh bất kỳ đều kề nhau với $2^4 - 2 - 1 = 13$ đỉnh khác, và do đó tạo thành một đồ thị 13-chính quy bậc 30. Vì số lượng đỉnh và cạnh khá nhiều, nên trong hình bên dưới, chúng tôi chỉ vẽ minh họa cách thức một đỉnh được nối với 13 đỉnh kề với nó, và các đỉnh khác cũng được nối theo cách tương tự. Cụ thể ta lấy đỉnh x_1 , chú ý rằng khi đó đỉnh $x_1 + z$ (hơn kém 1 phần tử trong tâm $Z(L)$) luôn kề nhau với x_1 , và cả 2 đỉnh này đều được nối với 12 đỉnh v có dạng: $v = a_1x_1 + a_2x_2 + b_2y_2 + cz$, $(a_1, a_2, b_2) \neq (0,0,0)$ như hình vẽ sau đây:



Hình 2. Minh họa cách nối x_1 với các đỉnh kề trong $\Gamma(h_5)$

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng ta đã xác định được tính liên thông của đồ thị giao hoán của tất cả các đại số Lie Heisenberg. Trong trường hợp đồ thị là liên thông, đường kính của chúng được xác định là bằng 2, và trong trường hợp đồ thị không liên thông, tất cả các thành phần liên thông của nó đều được mô tả tường minh. Ngoài ra, chúng ta cũng phân thảo các đặc trưng và hình dạng của đồ thị giao hoán khi xem xét trên trường số hữu hạn.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

❖ **Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài mã số B2024-SPD-07.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Anderson, D. F., & Badawi, A. (2008). The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 320(7), 2706-2719.
- Anderson, D. F. (2011). Zero-divisor graphs in commutative rings. *Commutative Algebra, Noetherian and Non-Noetherian Perspectives/Springer-Verlag*. <https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7840>
- Akbari, S., Ghandehari, M., Hadian, M., & Mohammadian, A. (2004). On commuting graphs of semisimple rings. *Linear algebra and its applications*, 390, 345-355. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.05.001>
- Akbari, S., Bidkhori, H., & Mohammadian, A. (2008). Commuting graphs of matrix algebras. *Communications in Algebra*, 36(11), 4020-4031. <https://doi.org/10.1080/00927870802174538>
- Akbari, S., & Raja, P. (2006). Commuting graphs of some subsets in simple rings. *Linear algebra and its applications*, 416(2-3), 1038-1047. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.01.006>
- Cao, M. N., Mai, H. B., & Bui, X. H. (2023). On diameters of commuting graphs of matrix algebras over division rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(06), 2550148. <https://doi.org/10.1142/S0219498825501488>
- Chartrand, G. (1996). *Graphs and Digraphs*. Chapman and Hall.
- Dorbidi, H. R. (2023). The diameter of commuting graph of matrix ring of division rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(05), 2550121.
- Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3), 172-198.
- Humphreys, J. E. (1972). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag.
- Miguel, C. (2016). On the diameter of the commuting graph of the matrix ring over a centrally finite division ring. *Linear Algebra and its Applications*, 509, 276-285. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.08.001>
- Šnobl, L., & Winternitz, P. (2014). *Classification and identification of Lie algebras* (Vol. 33). American Mathematical Soc.
- Wang, D., & Xia, C. (2017). Diameters of the Commuting Graphs of Simple Lie Algebras. *J. Lie Theory*, 27, 139-154.

ON SOME GRAPH PROPERTIES OF HEISENBERG LIE ALGEBRAS

Duong Quang Hoa^{1}, Ha Van Hieu², Nguyen Thi Mong Tuyen³*

¹University of Finance - Marketing, Ho Chi Minh City, Vietnam

²University of Economics - Law, Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Vietnam

³Dong Thap University, Vietnam

*Corresponding author: Duong Quang Hoa - Email: hoa.duongquang@ufm.edu.vn

Received: September 06, 2024; Revised: December 31, 2024; Accepted: September 05, 2025

ABSTRACT

Heisenberg Lie Algebras play an important role in both mathematics and physics, in particular in quantum mechanics. These algebras provide a framework for expressing the uncertainty principle and commutation relations between physical quantities in quantum systems. Many aspects, properties, and applications of Heisenberg Lie algebras have been widely studied. In this paper, we focus on the discrete representation of Heisenberg Lie algebras. Specifically, we study the commuting graphs associated with all Heisenberg Lie algebras, describe their structural forms, and present key properties such as connectedness and diameter.

Keywords: commuting graphs; connectedness; diameter; Heisenberg Lie algebras