BÀI TOÁN HỖN HỢP CHO PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN CHỨA TOÁN TỬ KIRCHHOFF

NGUYỄN THÀNH LONG[1], LÊ THỊ PHƯƠNG NGỌC[2]

1. Giới thiệu

Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} - B\left(\|u_r\|_0^2\right)\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = f(r,u), \ 0<r<1, \ 0<t<T, \\ \left|\lim\limits_{r\to 0_+}\sqrt{r}\,u_r(r,t)\right| < +\infty, \\ u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r), \quad u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r), \quad \|u_r\|_0^2 = \int_0^1 r|u_r(r,t)|^2 dr, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó hằng số $h>0$ và các hàm số $B, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là cho trước. Liên quan đến bài toán (1.1) là bài toán sau đây mà nhiều công trình nghiên cứu đã đề cập, chẳng hạn trong [6, 7, 13, 15, 16]:

$$\begin{cases} v_{tt} - B_1\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v = f_1(x,v), \ (x,t)\in\Omega_1\times(0,T), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + hv = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega_1\times(0,T), \\ hay\ \ v = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega_1\times(0,T), \\ v(x,0) = \tilde{v}_0(x), \ v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), \qquad x\in\Omega_1, \end{cases} \tag{1.2}$$

ở đây $\|\nabla v\|^2 = \int_{\Omega_1}|\nabla v(x,t)|^2 dx = \int_{\Omega_1}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx$, Ω_1 là một miền bị chặn trong IR^N với biên $\partial\Omega_1$ đủ trơn và ν là véctơ pháp tuyến đơn vị trên biên $\partial\Omega_1$, hướng ra phía ngoài.

Với $N=1$ và $\Omega_1=(0,L)$, phương trình $(1.2)_1$ xuất phát từ bài toán mô tả dao động phi tuyến của một dây đàn hồi [7].

---

[1] Tiến sĩ, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TP.HCM.
[2] Khoa Tự nhiên, Trường Cao đẳng Sư phạm Nha Trang.

$$\rho h v_{tt} - \left(P_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial v}{\partial y}(y,t) \right|^2 dy \right) v_{xx} = 0, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

ở đây v là độ võng, x là biến không gian, t là biến thời gian, ρ là khối lượng riêng, h là thiết diện, L là chiều dài sợi dây ở lúc ban đầu, E là môđun Young và P_0 là lực căng lúc ban đầu.

Trong [3], Carrier cũng đã thiết lập một bài toán có dạng:

$$v_{tt} - \left(P_0 + P_1 \int_0^L v^2(y,t)dy \right) v_{xx} = 0,$$

trong đó P_0 và P_1 là các hằng số.

Trường hợp Ω_1 là quả cầu đơn vị mở trong IR^N và các hàm $v, f, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ phụ thuộc vào x thông qua r với $r^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$, ta đặt:

$$v(x,t) = u(|x|,t),\ f_1(x,t) = f(|x|,t),\ \tilde{v}_0(x) = \tilde{u}_0(|x|),\ \tilde{v}_1(x) = \tilde{u}_1(|x|),$$

thì:

$$-B_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v = -B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 r^\gamma dr \right)(u_{rr} + \frac{\gamma}{r}u_r),\ \gamma = N-1,$$

ở đây $B(\eta) = B_1(\omega_N \eta)$ và ω_N diện tích mặt cầu đơn vị trong IR^N. Khi đó (1.2) viết lại như sau:

$$\begin{cases} u_{tt} - B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 r^\gamma dr \right)(u_{rr} + \frac{\gamma}{r}u_r) = f(r,u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ u_r(1,t) + hu(1,t) = 0,\quad 0 < t < T, \\ hay \qquad u(1,t) = 0,\quad 0 < t < T, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r),\quad u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r),\quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Với $N = 2$, $(1.3)_1$ là phương trình sóng phi tuyến hai chiều mô tả dao động của màng đơn vị $\Omega_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Trong quá trình dao động, bề mặt của màng Ω_1 và sức căng tại các điểm khác nhau trên đó thay đổi theo thời gian. Điều kiện trên biên mô tả những ràng buộc đàn hồi, trong đó h là hằng số có một ý nghĩa cơ học nào đó. Điều kiện biên $(1.1)_2$ hiển nhiên sẽ được thỏa mãn nếu u là một nghiệm cổ điển của bài toán (1.1), chẳng hạn như $u \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T)) \cap C^2(\Omega \times (0,T))$. Điều kiện này thường được sử dụng trong sự liên hệ với các không gian Sobolev có trọng r [2, 14].

Trường hợp phương trình $(1.3)_1$ không chứa số hạng $(\gamma / r)u_r$ $(\gamma = 0)$, thì $(1.3)_1$ có dạng:

$$u_{tt} - B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 dr\right)u_{rr} = f(r,u). \tag{1.4}$$

Khi $f = 0$, bài toán Cauchy hay bài toán hỗn hợp (1.4) đã được nhiều tác giả nghiên cứu; xem [5, 20] và các tài liệu tham khảo được nêu trong đó. Tổng quan các kết quả thuộc về lĩnh vực Toán học của mô hình Kirchhoff có thể được tìm thấy trong các tài liệu [18, 19]. Mederios [17] cũng đã nghiên cứu bài toán (1.1) trên một tập mở và bị chặn Ω của IR^3, với $f = f(u) = -bu^2$, $b > 0$ là hằng số cho trước. Hosoya và Yamada [6] đã nghiên cứu bài toán (1.4)-$(1.3)_{3,4}$ với $f = f(u) = -\delta|u|^\alpha u$, trong đó $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong [11], các tác giả cũng đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình:

$$u_{tt} + \lambda\Delta^2 u - B\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \varepsilon|u_t|^{\alpha-1}u_t = F(x,t),\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1.5}$$

ở đây $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$, Ω là một tập mở và bị chặn của IR^3.

Trường hợp có thành phần $(1/r)u_r$ xuất hiện trong phương trình $(1.1)_1$ ta phải khử bỏ hệ số $1/r$ bằng cách sử dụng các không gian Sobolev có trọng thích hợp [2, 8, 14].

Trong bài báo này, chúng tôi liên kết bài toán (1.1) với thuật giải xác định bởi một dãy qui nạp $\{u_m\}$ như sau:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - B\left(\|\nabla u_m\|_0^2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) = f(r,u_{m-1}) + (u_m - u_{m-1})\frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}), \tag{1.6}$$

$0 < r < 1$, $0 < t < T$, với u_m thoả $(1.1)_{2,3}$ và số hạng đầu tiên được chọn là $u_0 = 0$. Với $f \in C^2([0,1]\times IR)$ và $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \leq B(\eta) \leq \bar{d}_0\eta^p + \tilde{d}_0$, $|B'(\eta)| \leq \bar{d}_1\eta^{p-1} + \tilde{d}_1$, trong đó $b_0 > 0$, $p > 1$, và $\bar{d}_0, \tilde{d}_0$, $\bar{d}_1, \tilde{d}_1 \geq 0$ là các hằng số cho trước, cùng với một số điều kiện phụ, chúng tôi chứng minh rằng bài toán (1.1) có duy nhất một nghiệm yếu và dãy lặp $\{u_m\}$ hội tụ bậc hai về nghiệm yếu này. Kết quả thu được là đã tổng quát hơn các kết quả trước đây trong[4, 12, 15, 16].

2. Các không gian hàm và kết quả chuẩn bị

Đặt $\Omega = (0,1)$. Ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ và $W^{m,p}(\Omega)$. Với mỗi hàm $v \in C^0(\overline{\Omega})$, ta định nghĩa $\|v\|_0 = \left(\int_0^1 r|u_r(r,t)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$ và V_0 là đầy đủ hoá của không gian $C^0(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\|\cdot\|_0$. Tương tự, với mỗi hàm $v \in C^1(\overline{\Omega})$, ta định nghĩa $\|v\|_1 = \left(\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2\right)^{1/2}$ và V_1 là đầy đủ hoá của $C^1(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\|\cdot\|_1$. Ta chú ý rằng các chuẩn $\|.\|_0$ và $\|.\|_1$

có thể được định nghĩa lần lượt từ các tích vô hướng $\langle u,v\rangle = \int_0^1 ru(r)v(r)dr$ và $\langle u,v\rangle + \langle u',v'\rangle$. Dễ dàng chứng minh được rằng V_0 và V_1 là các không gian Hilbert với các tích vô hướng tương ứng như trên. Mặt khác, V_1 được nhúng liên tục và nằm trù mật trong V_0. Đồng nhất V_0 với V_0' (đối ngẫu của V_0), ta có $V_1 \hookrightarrow V_0 \equiv V_0' \hookrightarrow V_1'$. Để chỉ cặp đối ngẫu giữa V_1 và V_1', ta cũng dùng ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Bây giờ, với mỗi $h > 0$, ta đặt:

$$a(u,v) = hu(1)v(1) + \int_0^1 ru'(r)v'(r)dr,\ u,v \in V_1. \qquad (2.1)$$

Khi đó, $a(\cdot,\cdot)$ là dạng song tuyến tính, đối xứng. Nhờ định lý Lax-Milgram, tồn tại duy nhất một toán tử tuyến tính liên tục $A: V_1 \to V_1'$ sao cho $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ $\forall u,v \in V_1$. Hơn nữa $Au \equiv \frac{-1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})$ trong V_1' và ngoài ra ta còn có các bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. [2]. *Dạng song tuyến tính, đối xứng xác định bởi (2.1) là liên tục trên $V_1 \times V_1$ và cưỡng bức trên V_1, nghĩa là:*

(i) $|a(u,v)| \le C_1\|u\|_1\|v\|_1$,

(ii) $|a(v,v)| \ge C_0\|v\|_1^2$,

với mọi $u,v \in V_1$, ở đây $C_0 = \frac{1}{2}\min\{1,h\}$ và $C_1 = 1 + (1+\sqrt{2})h$.

Bổ đề 2.2. *Tồn tại một cơ sở trực chuẩn Hilbert $\{\widetilde{w}_j\}$ của V_0 gồm các hàm riêng $\widetilde{w}_j$ tương ứng với các giá trị riêng λ_j* sao cho:

(i) $0 < \lambda_1 \le \lambda_j \uparrow +\infty$ *khi* $j \to +\infty$,

(ii) $a(\widetilde{w}_j, v) = \lambda_j\langle\widetilde{w}_j, v\rangle,\ \forall v \in V_1, \forall j \in IN$.

Chứng minh của bổ đề 2.2 có thể tìm thấy trong [23: trang 87, định lí 7.7].

Ta có chú ý rằng, từ (ii), $\{\widetilde{w}_j/\sqrt{\lambda_j}\}$ là cơ sở trực chuẩn trong V_1.

Tiếp theo, với mỗi $v \in C^2(\overline{\Omega})$ ta đặt:

$$\|v\|_2 = \left(\int_0^1 r[|v(r)|^2 + |v'(r)|^2 + |Av(r)|^2]dr\right)^{1/2}, \qquad (2.2)$$

và định nghĩa V_2 là đầy đủ hoá của không gian $C^2(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\|.\|_2$. Cũng chú ý rằng V_2 cũng là không gian Hilbert đối với tích vô hướng:

$$\langle u,v\rangle + \langle u',v'\rangle + \langle Au, Av\rangle. \qquad (2.3)$$

Mặt khác ta cũng có thể định nghĩa V_2 như là $V_2 = \{v \in V_1 : Av \in V_0\}$.

Liên quan giữa các không gian V_0, V_1 và V_2 ta có các bổ đề sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong [2].

Bổ đề 2.3. *Các phép nhúng* $V_2 \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow V_0$ *là compact.*

Bổ đề 2.4. *Với mọi* $v \in V_2$,

(i) $\|v'\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|Av\|_0$,

(ii) $\|v''\|_0 \le \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|Av\|_0$,

(iii) $\|v\|^2_{L^\infty(\Omega)} \le \left(2\|v\|_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|Av\|_0\right)\|v\|_0$.

Với một không gian Banach X, ta sẽ kí hiệu chuẩn trên X là $\|\cdot\|_X$ và X' là đối ngẫu của X. Ký hiệu $L^p(0,T;X), 1 \le p \le \infty$, là không gian Banach gồm tất cả các hàm đo được $u:(0,T) \to X$, sao cho:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\|u(t)\|_X, \quad \text{với } p = \infty.$$

Ta kí hiệu $u(t)$, $\dot{u}(t) = u'(t) = u_t(t)$, $\ddot{u}(t) = u''(t) = u_{tt}(t)$, $u_r(t)$, $u_{rr}(t)$ để chỉ $u(r,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t)$, $\frac{\partial u}{\partial r}(r,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t)$, lần lượt.

Trong các mục sau chúng tôi sẽ xét bài toán giá trị biên và ban đầu (1.1) với các giả thiết sau:

(H_1) $\tilde{u}_1 \in V_1$, $\tilde{u}_0 \in V_2$,

(H_2) $B \in C^1(IR_+)$, sao cho các hằng số $b_0 > 0$, $p > 1$, và $\bar{d}_0, \tilde{d}_0$, $\bar{d}_1, \tilde{d}_1 \ge 0$ thoả:

(i) $b_0 \le B(\eta) \le \bar{d}_0\eta^p + \tilde{d}_0$, $\forall \eta \ge 0$,

(ii) $|B'(\eta)| \le \bar{d}_1\eta^{p-1} + \tilde{d}_1$, $\forall \eta \ge 0$,

(H_3) $f \in C^2([0,1]\times IR)$.

Ứng với bất kì $M > 0$ cho trước, với f thoả các giả thiết (H_3) ta đặt:

$$\begin{cases} \bar{K}_0 = \bar{K}_0(M,f) = \sup\limits_{(r,u)\in \bar{A}} |f(r,u)|, \\ \bar{K}_1 = \bar{K}_1(M,f) = \sup\limits_{(r,u)\in \bar{A}} \left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,u)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(r,u)\right|, \\ \bar{K}_2 = \bar{K}_2(M,f) = \sup\limits_{(r,u)\in \bar{A}} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial u}(r,u)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(r,u)\right|, \end{cases} \tag{2.4}$$

ở đây $\overline{A} = \overline{A}(M) = \left\{ (r,u) : 0 \le r \le 1, |u| \le M\sqrt{2 + 1/\sqrt{2}} \right\}$.

Cũng ứng với bất kỳ $M > 0$ và $T > 0$, cho trước, với B và f thoả các giả thiết (H_2) và (H_3) tương ứng ta đặt:

$$W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;V_2) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;V_1), \ddot{v} \in L^2(0,T;V_0),$$
$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V_2)} \le M, \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;V_1)} \le M, \|\ddot{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} \le M\},$$
$$W_1(M,T) = \{v \in W(M,T) : \ddot{v} \in L^\infty(0,T;V_0)\}.$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1), trước hết ta xây dựng một dãy $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$, với các hằng số $M > 0, T > 0$ thích hợp sẽ được chọn sau, bằng phương pháp qui nạp. Dãy qui nạp này sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (1.1).

3. Sự hội tụ cấp hai

Dãy qui nạp (phi tuyến) $\{u_m\}$ được xây dựng bởi quy tắc sau:

Cho trước $u_0 \equiv 0$ và giả sử rằng:

$$u_{m-1} \in W_1(M,T), \tag{3.1}$$

Ta liên kết bài toán (1.1) với bài toán biến phân: Tìm $u_m \in W_1(M,T)$ $(m \ge 1)$ sao cho

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v\rangle + B\left(\|\nabla u_m(t)\|_0^2\right)a(u_m(t),v) = \langle f(r,u_{m-1}),v\rangle \\ \qquad + \langle (u_m - u_{m-1})\dfrac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}),v\rangle, \qquad \forall v \in V_1, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, \quad \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lí 3.1. *Giả sử $(H_1)-(H_3)$ đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0, T > 0$ sao cho với $u_0 \equiv 0$, tồn tại một dãy quy nạp $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ xác định bởi* (3.1), (3.2).

Chú thích 1. Trong [2] thuật giải (3.2) đã được xét với $B \equiv 1$, $f = f(u)$.

Chứng minh định lí 3.1. Chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin được giới thiệu bởi Lions [8], và tiến hành qua nhiều bước dưới đây:

Bước 1. *Xấp xỉ Galerkin.* Xét cơ sở trực chuẩn $\{w_j\}$, với $w_j = \tilde{w}_j / \sqrt{\lambda_j}$ như trong bổ đề 2.2. Đặt:

$$u_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{mj}^{(k)}(t) w_j, \tag{3.3}$$

trong đó $c_{mj}^{(k)}(t)$ thoả mãn hệ phương trình vi phân thường sau:

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle + b_m^{(k)} a(u_m^{(k)}(t), w_j) = \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle, \ 1 \le j \le k, \\ u_m^{(k)}(0) = \widetilde{u}_{0k}, \ \dot{u}_m^{(k)}(0) = \widetilde{u}_{1k}, \end{cases} \tag{3.4}$$

ở đây:

$$\begin{cases} b_m^{(k)}(t) = B\left(\left\| \nabla u_m^{(k)}(t) \right\|_0^2 \right) = B\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left| c_{mj}^{(k)}(t) \right|^2 \right), \\ F_m^{(k)}(r,t) = f_m(r,t,u_m^{(k)}) = f(r,u_{m-1}) + \left(u_m^{(k)} - u_{m-1}\right) \dfrac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}), \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\widetilde{u}_{0k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} w_j \to \widetilde{u}_0, \ \text{ trong } V_2 \text{ mạnh}, \tag{3.6}$$

$$\widetilde{u}_{1k} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} w_j \to \widetilde{u}_1, \ \text{ trong } V_1 \text{ mạnh}. \tag{3.7}$$

Với giả sử u_{m-1} thoả (3.1), bổ đề sau đây cho ta tính tồn tại nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ của hệ (3.4).

Bổ đề 3.2. *Giả sử* $(H_1)-(H_3)$ *đúng. Khi đó với các hằng số* $M > 0, T > 0$ *cố định, hệ phương trình* (3.4)-(3.7) *có duy nhất một nghiệm* $u_m^{(k)}(t)$ *trên đoạn* $[0, T_m^k] \subset [0,T]$.

***Chứng minh bổ đề* 3.2.** Hệ (3.4)-(3.7) được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} \ddot{c}_{mj}^{(k)}(t) = -\lambda_j b_m^{(k)}(t) c_{mj}^{(k)}(t) + \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle, \ 1 \le j \le k, \\ c_{mj}^{(k)}(0) = \alpha_j^{(k)}(0), \ \dot{c}_{mj}^{(k)}(0) = \beta_j^{(k)}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Hệ phương trình này tương đương với hệ phương trình tích phân sau:

$$\begin{aligned} c_{mj}^{(k)}(t) = \alpha_j^{(k)} + \beta_j^{(k)} t &+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left\langle f(r,u_{m-1}) - u_{m-1} \frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}), w_j \right\rangle ds \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^{k} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}) w_i, w_j \right\rangle c_{mi}^{(k)}(s) ds \\ &- \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau B\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left| c_{mi}^{(k)}(s) \right|^2 \right) c_{mj}^{(k)}(s) ds, \qquad 1 \le j \le k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Không sợ nhầm lẫn, để cho gọn ta có thể bỏ đi chỉ số m, khi đó hệ (3.9) có thể viết lại dưới dạng:

$$c = H[c], \tag{3.10}$$

ở đây:

$$H[c]=(H_1[c],\dots,H_k[c]),\qquad c=(c_1,\dots,c_k),$$

$$\begin{aligned} H_j[c](t)=q_j(t)&+\int_0^t d\tau\int_0^\tau\sum_{i=1}^k\left\langle\frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1})w_i,w_j\right\rangle c_i(s)ds\\ &-\lambda_j\int_0^t d\tau\int_0^\tau B\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i c_i^2(s)\right)c_j(s)ds,\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$q_j(t)=\alpha_j^{(k)}+\beta_j^{(k)}t+\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left\langle f(r,u_{m-1})-u_{m-1}\frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}),w_j\right\rangle ds,\ 1\le j\le k.$$

Với mỗi $T_m^{(k)}\in(0,T]$ và $\rho>0$ sẽ được chọn sau này, ta đặt:

$$Y=C^0\left([0,T_m^{(k)}];IR^k\right),\ S=\{c\in Y:\|c\|_Y\le\rho\},$$

ở đây $\|c\|_Y=\sup_{0\le t\le T_m^{(k)}}|c(t)|_1,\ |c(t)|_1=\sum_{j=1}^k|c_j(t)|$, với mọi $c=(c_1,\dots,c_k)\in Y$.

Rõ ràng S là tập con đóng khác rỗng của Y và ta có toán tử $H:Y\to Y$.

Sau đây, ta sẽ chọn $\rho>0$ và $T_m^{(k)}\in(0,T]$ sao cho:

(i) H ánh xạ S vào chính nó,

(ii) $H^n\equiv H[H^{n-1}]$ là ánh xạ co với một số tự nhiên $n\in IN$ nào đó.

(i) Trước hết ta chú ý rằng với mọi $c=(c_1,\dots,c_k)\in S$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k\lambda_i c_i^2(s)}\le\sqrt{\lambda_k}\ \rho,\tag{3.12}$$

và do đó

$$B\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i c_i^2(s)\right)\le\left(\bar d_0\left|\sum_{i=1}^k\lambda_i c_i^2(s)\right|^p+\tilde d_0\right)\le\bar d_0\lambda_k^p\rho^{2p}+\tilde d_0.\tag{3.13}$$

Từ (3.11)- (3.13), ta có :

$$|H_j[c](t)|_1=|q_j(t)|_1+\overline{D}_\rho\int_0^t d\tau\int_0^\tau|c(s)|_1ds\le\|q\|_Y+\tfrac12\overline{D}_\rho t^2\|c\|_Y,\tag{3.14}$$

ở đây $\overline{D}_\rho=\overline{D}_\rho(\rho,k,M,T,m)=k\overline{K}_1+\lambda_k\left(\bar d_0\lambda_k^p\rho^{2p}+\tilde d_0\right)$.

Chọn $\rho>\|q\|_Y$ và $T_m^{(k)}\in(0,T]$ sao cho $0<T_m^{(k)}\le\sqrt{\frac{2}{\rho\overline{D}_\rho}\left(\rho-\|q\|_Y\right)}$. Khi đó:

$$\|H[c]\|_Y\le\|q\|_Y+\tfrac12\overline{D}_\rho T_m^{(k)\,2}\rho\le\rho,\ \forall c\in S,$$

nghĩa là toán tử H ánh xạ S vào chính nó.

(ii) Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng với mọi $c,d\in S$, với mọi $t\in[0,T_m^{(k)}]$,

$$\left|H^n[c](t)-H^n[d](t)\right|_1=\left|H[H^{n-1}[c]](t)-H[H^{n-1}[d]](t)\right|_1$$
$$\leq \frac{1}{(2n)!}\widetilde{D}_\rho^n t^{2n}\|c-d\|_Y,\ \forall n\in IN, \tag{3.15}$$

ở đây $\widetilde{D}_\rho=\widetilde{D}_\rho(\rho,k,M,T,m)=k\overline{K}_1+\lambda_k\left(\overline{d}_0\lambda_k^p\rho^{2p}+\widetilde{d}_0\right)+2\rho^2\lambda_k^2\left(\overline{d}_1\lambda_k^{p-1}\rho^{2p-2}+\widetilde{d}_1\right)$.

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=1$, (3.15) đúng. Thật vậy, với mọi $j=1,2,...,k$, với mọi $t\in[0,T_m^{(k)}]$, ta có:

$$\begin{aligned}\left|H_j[c](t)-H_j[d](t)\right|&\leq \overline{K}_1\int_0^t d\tau\int_0^\tau |c(s)-d(s)|_1 ds\\ &+\lambda_k\left(\overline{d}_0\lambda_k^p\rho^{2p}+\widetilde{d}_0\right)\int_0^t d\tau\int_0^\tau|c_j(s)-d_j(s)|ds\\ &+\lambda_k\int_0^t d\tau\int_0^\tau|B'(\xi)|\left|\sum_{i=1}^k\lambda_i\left(c_i^2(s)-d_i^2(s)\right)\right||d_j(s)|ds,\end{aligned}\tag{3.16}$$

trong đó: $\xi=\theta\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i c_i^2(s)\right)+(1-\theta)\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i d_i^2(s)\right)\leq\lambda_k\rho^2,\ \ 0<\theta<1.$

Từ các bất đẳng thức:

$|B'(\xi)|\leq\overline{d}_1|\xi|^{p-1}+\widetilde{d}_1\leq\overline{d}_1\lambda_k^{p-1}\rho^{2p-2}+\widetilde{d}_1,$

$\left|\sum_{i=1}^k\lambda_i\left(c_i^2(s)-d_i^2(s)\right)\right|\leq 2\lambda_k\rho|c(s)-d(s)|_1,$

và (3.16) ta thu được:

$$\left|H[c](t)-H[d](t)\right|_1\leq\widetilde{D}_\rho\int_0^t d\tau\int_0^\tau |c(s)-d(s)|_1 ds\leq\tfrac{1}{2}\widetilde{D}_\rho t^2\|c-d\|_Y.$$

Giả sử (3.15) đúng với $n\geq 1$. Khi đó với mọi $c,d\in S$, với mọi $t\in[0,T_m^{(k)}]$,

$$\begin{aligned}\left|H^{n+1}[c](t)-H^{n+1}[d](t)\right|_1&=\left|H[H^n[c]](t)-H[H^n[d]](t)\right|_1\\ &\leq\widetilde{D}_\rho\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left|H^n[c](s)-H^n[d](s)\right|_1 ds\\ &\leq\frac{1}{(2n+2)!}\widetilde{D}_\rho^{n+1}t^{2n+2}\|c-d\|_Y,\end{aligned}$$

Và chứng minh qui nạp được hoàn tất.

Từ (3.15), ta có:

$$\left\|H^n[c]-H^n[d]\right\|_Y\leq\frac{1}{(2n)!}\widetilde{D}_\rho^n(T_m^{(k)})^{2n}\|c-d\|_Y\leq\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{\widetilde{D}_\rho}\ T\right)^{2n}\|c-d\|_Y.$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{\widetilde{D}_\rho}\,T\right)^{2n}=0$, nên tồn tại $n\in IN$ sao cho $\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{\widetilde{D}_\rho}\,T\right)^{2n}<1$. Như thế $H^n:S\to S$ là ánh xạ co và do đó, H có một điểm bất động duy nhất. Suy ra hệ phương trình (3.4)-(3.7) có duy nhất một nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ trên đoạn $[0,T_m^{(k)}]\subset[0,T]$. Bổ đề 3.2 được chứng minh.

Các ước lượng sau cho phép ta lấy $T_m^{(k)}=T$.

Bước 2. *Ước lượng tiên nghiệm*

Đặt:

$$S_m^{(k)}(t)=X_m^{(k)}(t)+Y_m^{(k)}(t)+\int_0^t\left\|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\right\|_0^2ds, \tag{3.17}$$

ở đây

$$\begin{cases} X_m^{(k)}(t)=\left\|\dot{u}_m^{(k)}(t)\right\|_0^2+b_m^{(k)}(t)a\left(u_m^{(k)}(t),u_m^{(k)}(t)\right),\\ Y_m^{(k)}(t)=a\left(\dot{u}_m^{(k)}(t),\dot{u}_m^{(k)}(t)\right)+b_m^{(k)}(t)\left\|Au_m^{(k)}(t)\right\|_0^2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Từ (3.4), ta suy ra

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t)&=S_m^{(k)}(0)+\int_0^t b_m^{(k)\prime}(s)\left[a\left(u_m^{(k)}(s),u_m^{(k)}(s)\right)+\left\|Au_m^{(k)}(s)\right\|_0^2\right]ds\\ &\quad+2\int_0^t\left\langle F_m^{(k)}(s),\dot{u}_m^k(s)\right\rangle ds+2\int_0^t a\left(F_m^{(k)}(s),\dot{u}_m^{(k)}(s)\right)ds\\ &\quad-\int_0^t b_m^{(k)}(s)\left\langle Au_m^{(k)}(s),\ddot{u}_m^{(k)}(s)\right\rangle ds+\int_0^t\left\langle F_m^{(k)}(s),\ddot{u}_m^{(k)}(s)\right\rangle ds. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Do (3.6) - (3.7), đẳng thức:

$S_m^{(k)}(0)=\left\|\widetilde{u}_{1k}\right\|_0^2+a\left(\widetilde{u}_{1k},\widetilde{u}_{1k}\right)+B\left(\left\|\nabla\widetilde{u}_0\right\|_0^2\right)\left(a\left(\widetilde{u}_{0k},\widetilde{u}_{0k}\right)+\left\|A\widetilde{u}_{0k}\right\|_0^2\right)$ chứng tỏ rằng ta luôn luôn chọn được số $M>0$, không phụ thuộc vào k,m sao cho $S_m^{(k)}(0)\le M^2/6$. Sử dụng các bổ đề 2.1-2.4 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$, sau khi đánh giá cho các tích phân trong vế phải của (3.19), ta thu được:

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t)&\le\tfrac{M^2}{2}+TD_0(M)+D_1(M)\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds+D_2\int_0^t\left(S_m^{(k)}(s)\right)^2ds\\ &\quad+D_3\int_0^t\left(S_m^{(k)}(s)\right)^{p+1}ds+D_4\int_0^t\left(S_m^{(k)}(s)\right)^{2p+1}ds, \end{aligned} \tag{3.20}$$

ở đây

$$\begin{cases} D_0(M) = 3\left(\frac{3}{2}\overline{K}_0^{\,2} + 3\overline{K}_1^{\,2}M^2\right) + \frac{27}{4}\left(\frac{1}{2}\overline{K}_0^{\,2} + \overline{K}_1^{\,2}M^2\right) \\ \qquad + 6C_1\left[\frac{3}{4}\overline{K}_0^{\,2} + \frac{3}{2}\overline{K}_1^{\,2}M^2 + \overline{K}_1^{\,2}(1+\sqrt{2}M)^2 + 2\overline{K}_2^{\,2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}M)^2M^2\right], \\ D_1(M) = 3\left(\dfrac{3\overline{K}_1^{\,2}}{b_0C_0} + 1\right) + \dfrac{3C_1}{b_0C_0}\left[7\overline{K}_1^{\,2} + 4\overline{K}_2^{\,2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}M)^2\right] + \dfrac{9\widetilde{d}_0^{\,2}}{2b_0} + \dfrac{27}{4b_0C_0}\overline{K}_1^{\,2}, \\ D_2 = \dfrac{3\widetilde{d}_1(1+b_0)}{b_0^{\,2}C_0}, \quad D_3 = \dfrac{3\widetilde{d}_1(1+b_0)}{b_0^{\,p+1}C_0^{\,p}}, \quad D_4 = \dfrac{9\widetilde{d}_0^{\,2}}{2b_0^{\,2p+1}C_0^{\,2p}}. \end{cases}$$

Sử dụng các bất đẳng thức:

$$x^2 \le \tfrac{2}{2p+1}x^{2p+1} + \tfrac{2p-1}{2p+1}, \qquad \forall x \ge 0,\ \forall p \ge 1/2,$$

$$x^{p+1} \le \tfrac{p+1}{2p+1}x^{2p+1} + \tfrac{p}{2p+1}, \qquad \forall x \ge 0,\ \forall p > 0,$$

từ (3.20), ta thu được:

$$S_m^{(k)}(t) \le \widetilde{\eta}_0 + \widetilde{\eta}_1\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds + \widetilde{\eta}_2\int_0^t \left(S_m^{(k)}(s)\right)^{2p+1}ds, \tag{3.21}$$

với

$$\begin{cases} \widetilde{\eta}_0 = \widetilde{\eta}_0(M,T) = M^2/2 + T\left[D_0(M) + \frac{2p-1}{2p+1}D_2 + \frac{p}{2p+1}D_3\right], \\ \widetilde{\eta}_1 = \widetilde{\eta}_1(M) = D_1(M), \\ \widetilde{\eta}_2 = \frac{2}{2p+1}D_2 + \frac{p+1}{2p+1}D_3 + D_4. \end{cases} \tag{3.22}$$

Khi đó ta có bổ đề sau

***Bổ đề* 3.3.** *Tồn tại một hằng số $T > 0$ không phụ thuộc vào k, m sao cho:*

$$S_m^{(k)}(t) \le M^2, \quad \forall t \in [0,T], \text{ với mọi } k \text{ và } m.$$

Chứng minh bổ đề 3.3. Đặt:

$$S(t) = \widetilde{\eta}_0 + \widetilde{\eta}_1\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds + \widetilde{\eta}_2\int_0^t \left(S_m^{(k)}(s)\right)^{2p+1}ds,\ 0 \le t \le T. \tag{3.23}$$

Rõ ràng

$$\begin{cases} S(t) > 0,\ 0 \le S_m^{(k)}(t) \le S(t), \quad 0 \le t \le T, \\ S'(t) - \widetilde{\eta}_1 S(t) \le \widetilde{\eta}_2 S^{2p+1}(t), \quad 0 \le t \le T, \\ S(0) = \widetilde{\eta}_0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Đặt $Z(t) = S^{-2p}(t)$, lấy tích phân của $(3.24)_2$, ta có:

$$Z(t) \ge \left(\widetilde{\eta}_0^{\,-2p} + \frac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right)\exp(-2p\widetilde{\eta}_1 T) - \frac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.25}$$

Chú ý rằng từ (3.22), ta có:

$$\begin{cases} \lim\limits_{T\to 0^+}\left[\left(\widetilde{\eta}_0^{-2p}+\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right)\exp(-2p\widetilde{\eta}_1 T)-\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right]=\left(M^2/2\right)^{-2p}>0, \\ \lim\limits_{T\to 0^+}\left[\left(\widetilde{\eta}_0^{-2p}+\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right)\exp(-2p\widetilde{\eta}_1 T)-\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}-M^{-4p}\right]=\left(4^p-1\right)M^{-4p}>0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Do đó từ (3.26), ta luôn chọn được hằng số $T>0$ sao cho:

$$\begin{cases} \left(\widetilde{\eta}_0^{-2p}+\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right)\exp(-2p\widetilde{\eta}_1 T)-\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}>0, \\ \left(\widetilde{\eta}_0^{-2p}+\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}\right)\exp(-2p\widetilde{\eta}_1 T)-\dfrac{\widetilde{\eta}_2}{\widetilde{\eta}_1}-M^{-4p}>0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Kết hợp (3.24), (3.25), (3.27), ta nhận được:

$$0\le S_m^{(k)}(t)\le S(t)=\frac{1}{\sqrt[2p]{Z(t)}}\le M^2,\quad \forall t\in[0,T].$$

Bổ đề 3.3 được chứng minh. Từ đây, ta có thể lấy $T_m^{(k)}=T$, với mọi k,m, suy ra:

$$u_m^{(k)}\in W_1(M,T), \text{ với mọi } k,m.$$

Và do đó, từ dãy $\{u_m^{(k)}\}$ ta có thể trích ra một dãy con $\{u_m^{(k_i)}\}$ sao cho:

$u_m^{(k_i)}\to u_m$ trong $L^\infty(0,T;V_2)$, yếu *,

$\dot{u}_m^{(k_i)}\to \dot{u}_m$ trong $L^\infty(0,T;V_1)$, yếu *,

$\ddot{u}_m^{(k_i)}\to \ddot{u}_m$ trong $L^2(0,T;V_0)$, yếu ,

ở đây $u_m\in W(M,T)$. Chuyển qua giới hạn trong (3.4), ta có u_m thoả mãn (3.2) trong $L^2(0,T)$, yếu. Mặt khác, bởi (3.1)-(3.2)$_1$ và $u_m\in W(M,T)$, ta có:

$$\ddot{u}_m=-B\left(\|\nabla u_m\|_0^2\right)Au_m+f(r,u_{m-1})\in L^\infty(0,T;V_0).$$

Suy ra $u_m\in W_1(M,T)$. Định lí 3.1 được chứng minh.

Kết quả sau đây cho ta sự hội tụ cấp hai của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu của bài toán (1.1).

Định lí 3.4. *Giả sử $(H_1)-(H_3)$ đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M>0$, $T>0$ sao cho:*

(i) *Bài toán (1.1) có duy nhất một nghiệm yếu $u\in W_1(M,T)$.*

(ii) *Dãy qui nạp $\{u_m\}$ xác định bởi (3.4) - (3.5) hội tụ cấp hai mạnh về nghiệm yếu u của bài toán (1.1) trong không gian $W_1(T)=\{v\in L^\infty(0,T;V_1):\ \dot{v}\in L^\infty(0,T;V_0)\}$ theo nghĩa:*

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \leq C_T \beta_T^{2^m} \quad \forall m,$$

ở đây $0 \leq \beta_T < 1$, C_T *là các hằng số độc lập với* m.

Chú thích 2. Trường hợp phương trình (1.1) không chứa số hạng $(1/r)u_r$, trong [22] cũng thu được kết quả hội tụ cấp hai như định lí 3.4 này. Mặt khác cho dù phương trình (1.1) có chứa số hạng $(1/r)u_r$, kết quả của chúng tôi vẫn tổng quát hơn trường hợp $B \equiv 1$, $f = f(u)$ đã xét trong [2].

Chứng minh định lí 3.4.

a) *Sự tồn tại nghiệm của bài toán* (1.1): Trước hết ta chú ý rằng $W_1(T)$ là không gian Banach đối với chuẩn $\|v\|_{W_1(T)} = \|v\|_{L^\infty(0,T;V_1)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;V_0)}$. ([8])

Ta sẽ chứng minh $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Giả sử $v_m = u_{m+1} - u_m$. Khi đó v_m thỏa mãn bài toán biến phân sau:

$$\begin{cases} \langle \ddot{v}_m(t), w\rangle + b_{m+1}(t)\, a(v_m(t), w) + \big(b_{m+1}(t) - b_m(t)\big)\langle Au_m(t)), w\rangle \\ \qquad\qquad = \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), w\rangle, \ \forall w \in V_1, \\ v_m(0) = \dot{v}_m(0) = 0, \end{cases} \tag{3.28}$$

ở đây:

$$\begin{cases} F_{m+1}(t) - F_m(t) = v_m \dfrac{\partial f}{\partial u}(r, u_m) + \frac{1}{2} v_{m-1}^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(r, \lambda_m), \\ \lambda_m = u_{m-1} + \theta\, v_{m-1}, \ (0 \leq \theta \leq 1), \\ b_{m+1}(t) - b_m(t) = B\big(\|\nabla u_{m+1}(t)\|_0^2\big) - B\big(\|\nabla u_m(t)\|_0^2\big). \end{cases} \tag{3.29}$$

Thay $w = \dot{v}_m$ trong (3.28), sau đó lấy tích phân theo t, ta thu được:

$$\|\dot{v}_m(t)\|_0^2 + b_{m+1}(t)\, a(v_m(t), v_m(t)) = \int_0^t b'_{m+1}(s)\, a(v_m(s), v_m(s))\, ds \tag{3.30}$$

$$-2\int_0^t \Big[B\big(\|\nabla u_{m+1}(s)\|_0^2\big) - B\big(\|\nabla u_m(s)\|_0^2\big)\Big]\langle Au_m(s), \dot{v}_m(s)\rangle ds$$

Tương tự trên, sử dụng các bổ đề 2.1- 2.4 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$, ta sẽ có các đánh giá cho các tích phân J_i, $i = \overline{1,4}$, như sau:

$$J_1 \leq 2(\tilde{d}_1 M^{2p} + \tilde{d}_1 M^2) C_1 \int_0^t \|v_m(s)\|_1^2\, ds, \tag{3.31}$$

$$J_2 \leq 4(\tilde{d}_1 M^{2p} + \tilde{d}_1 M^2) \int_0^t \|v_m(s)\|_1 \|\dot{v}_m(s)\|_0\, ds, \tag{3.32}$$

$$J_3 \leq 2\overline{K}_1 \int_0^t \|v_m(s)\|_0 \|\dot{v}_m(s)\|_0 \, ds \leq 2\overline{K}_1 \int_0^t \|v_m(s)\|_1 \|\dot{v}_m(s)\|_0 \, ds, \tag{3.33}$$

$$J_4 \leq \overline{K}_2 \int_0^t \left\langle v_{m-1}^2(s), |\dot{v}_m(s)| \right\rangle ds \leq 2\overline{K}_2 (1+\sqrt{2}) \int_0^t \|v_{m-1}(s)\|_1^2 \|\dot{v}_m(s)\|_0 \, ds. \tag{3.34}$$

Kết hợp (3.30) - (3.34), ta được:

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_m(t)\|_0^2 + b_0 C_0 \|v_m(t)\|_1^2 &\leq 2(\overline{d}_1 M^{2p} + \widetilde{d}_1 M^2) C_1 \int_0^t \|v_m(s)\|_1^2 ds \\ &+ 2\,(2\overline{d}_1 M^{2p} + 2\widetilde{d}_1 M^2 + \overline{K}_1) \int_0^t \|v_m(s)\|_1 \|\dot{v}_m(s)\|_0 \, ds \\ &+ 2\overline{K}_2 (1+\sqrt{2}) \int_0^t \|v_{m-1}(s)\|_1^2 \|\dot{v}_m(s)\|_0 \, ds. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Từ đây, ta suy ra rằng:

$$\Phi_m(t) \leq \left(1 + \tfrac{1}{b_0 C_0}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^2 T\overline{K}_2^{\,2} \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + K_M \int_0^t \Phi_m(s) ds, \tag{3.36}$$

trong đó $\Phi_m(t) = \|\dot{v}_m(t)\|_0^2 + \|v_m(t)\|_1^2$ và

$$K_M = \left(1 + \tfrac{1}{b_0 C_0}\right)\left[1 + \overline{K}_1 + 2(1+C_1)(\overline{d}_1 M^{2p} + \widetilde{d}_1 M^2\right]. \tag{3.37}$$

Sử dụng bổ đề Gronwall cho (3.36), ta nhận được:

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \leq \mu_T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2, \tag{3.38}$$

ở đây $\mu_T = 2(1+\sqrt{2})\sqrt{1 + \frac{1}{b_0 C_0}}\sqrt{T}\ \overline{K}_2 \exp\left(\frac{1}{2} T K_M\right)$. Từ (3.38), ta có:

$$\|u_m - u_{m+p}\|_{W_1(T)} \leq \frac{\beta^{2^m}}{\mu_T (1-\beta)}, \tag{3.39}$$

với mọi m và p, trong đó $\beta = 2M\mu_T < 1$. Vậy $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$ và do đó tồn tại $u \in W_1(T)$ sao cho:

$$u_m \to u \text{ mạnh trong } W_1(T). \tag{3.40}$$

Chú ý là $u_m \in W_1(M,T)$. Khi đó từ dãy $\{u_m\}$ ta có thể lấy ra một dãy con $\{u_{m_j}\}$ sao cho:

$u_{m_j} \to u$ trong $L^\infty(0,T;V_2)$, yếu *,

$\dot{u}_{m_j} \to \dot{u}$ trong $L^\infty(0,T;V_1)$, yếu *,

$\ddot{u}_{m_j} \to \ddot{u}$ trong $L^2(0,T;V_0)$, yếu,

với $u \in W(M,T)$.

Ta lại có, bởi các Bổ đề 2.1- 2.4 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$,

$$\left|\int_0^T \left\langle b_m(t)Au_m(t) - B\left(\|\nabla u(t)\|_0^2\right)Au(t), w(t)\right\rangle dt\right|$$
$$\le C_1(\overline{d}_0 M^{2p} + \widetilde{d}_0)\|u_m - u\|_{L^\infty(0,T;V_1)}\|w\|_{L^1(0,T;V_1)} \tag{3.41}$$
$$+ 2C_1(\overline{d}_1 M^{2p-1} + \widetilde{d}_1 M)\|u_{m-1} - u\|_{W_1(T)}\|u\|_{L^\infty(0,T;V_1)}\|w\|_{L^1(0,T;V_1)},$$

với mọi $w \in L^1(0,T;V_1)$. Từ (3.40), (3.41) ta kết luận rằng:

$$b_m(t)Au_m \to B\left(\|\nabla u(t)\|_0^2\right)Au \text{ trong } L^\infty(0,T;V_1'), \text{ yếu } *. \tag{3.42}$$

Tương tự ta cũng thu được từ $\|f(r,u_{m-1}) - f(r,u)\|_{L^\infty(0,T;V_0)} \le \overline{K}_1\|u_{m-1} - u\|_{L^\infty(0,T;V_1)}$, rằng

$$f(r,u_{m-1}) \to f(r,u) \text{ mạnh trong } L^\infty(0,T;V_0). \tag{3.43}$$

Chuyển qua giới hạn trong (3.2) khi $m = m_j \to \infty$, ta thu được $u \in W_1(M,T)$ là nghiệm của bài toán (1.1).

b) *Tính duy nhất của nghiệm.* Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (1.1) với $u_i \in W_1(M,T)$, $i = 1,2$. Khi đó $v = u_1 - u_2$ thỏa mãn bài toán biến phân sau:

$$\begin{cases} \langle \ddot{v}(t), w\rangle + \widetilde{b}_1(t)a(v(t),w) + \left(\widetilde{b}_1(t) - \widetilde{b}_2(t)\right)\langle Au_2(t), w\rangle \\ \qquad\qquad = \langle \widetilde{f}_1(t) - \widetilde{f}_2(t), w\rangle, \quad \forall w \in V_1, \\ v(0) = \dot{v}(0) = 0, \end{cases} \tag{3.44}$$

ở đây $\widetilde{b}_i(t) = B\left(\|\nabla u_i(t)\|_0^2\right)$, $\widetilde{f}_i(t) = f(r,u_i)$, $i = 1,2$.

Thay $w = \dot{v}$ trong (3.44), sau đó lấy tích phân theo t, ta thu được:

$$\|\dot{v}(t)\|_0^2 + \widetilde{b}_1(t)a(v(t),v(t)) = \int_0^t \widetilde{b}_1'(s)a(v(s),v(s))ds$$
$$-2\int_0^t (\widetilde{b}_1(s) - \widetilde{b}_2(s))\langle Au_2(s), \dot{v}(s)\rangle ds + 2\int_0^t \left\langle \widetilde{f}_1(s) - \widetilde{f}_2(s), \dot{v}(s)\right\rangle ds. \tag{3.45}$$

Sử dụng lại các bổ đề 2.1- 2.4 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$, ta có:

$$\|\dot{v}(t)\|_0^2 + \|v(t)\|_1^2 \le \widetilde{K}_M \int_0^t \left(\|\dot{v}(s)\|_0^2 + \|v(s)\|_1^2\right)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

với $\widetilde{K}_M = \left(1 + \frac{1}{b_0 C_0}\right)\left(2(1 + C_1)(\overline{d}_1 M^{2p} + \widetilde{d}_1 M^2) + \overline{K}_1\right)$.

Áp dụng bổ đề Gronwall, ta suy ra $\|\dot{v}(t)\|_0^2 + \|v(t)\|_1^2 = 0$, $\forall t \in [0,T]$, hay $u_1 = u_2$. Tính duy nhất của nghiệm được chứng minh.

c) Khẳng định (ii) của định lí 3.4 được suy ra từ (3.39), (3.40) và do đó định lí 3.4 được chứng minh hoàn tất.

Chú thích 3. Một số kết quả liên quan đến trường hợp phương trình (1.1) không chứa số hạng $(1/r)u_r$ cũng được xét trong [4, 13, 16, 17, 22].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R.A. Adams (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork.

[2] D.T.T. Binh, A.P.N. Dinh, N.T. Long (2001), *Linear recursive schemes associated with the nonlinear wave equation involving Bessel's operator*, Math. Comp. Modelling, **34**, 541-556.

[3] G.F. Carrier (1945), *On the nonlinear vibrations problem of elastic string*, Quart. J. Appl. Math. 3, 157-165.

[4] A.P.N. Dinh, N.T. Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19**, 45-63.

[5] Y. Ebihara, L.A. Medeiros, M.M. Minranda (1986), *Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation*, Nonlinear Anal. **10**, 27-40.

[6] M. Hosoya, Y. Yamada (1991), *On some nonlinear wave equation I: Local existence and regularity of solutions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math. 38, 225-238.

[7] G.R. Kirchhoff (1876), *Vorlesungen ˘ber Mathematiche Physik*: Mechanik, Teuber, Leipzig, Section **29**.7.

[8] J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod; Gauthier -Villars, Paris.

[9] N.T. Long, A.P.N. Dinh (1995), *Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance*, Comp. Math. Appl. **30**, 63-78.

[10] N.T. Long, A.P.N. Dinh (1992), *On the quasilinear wave equation*: $u_{tt} - \Delta u + f(u,u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19**, 613-623.

[11] N.T. Long, A.P.N. Dinh (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24**, 1261-1279.

[12] N.T. Long, et al. (1993), *On the nonlinear vibrations equation with a coefficient containing an integral*, Comp. Maths. Math. Phys. **33**, 1171-1178.

[13] N.T. Long, T.N. Diem (1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u, u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29**, 1217 - 1230.

[14] N.T. Long, T.M. Thuyet (1999), *On the existence, uniqueness of solution of the nonlinear vibrations equation*, Demonstratio Math. **32**, 749-758.

[15] N.T. Long, A.P.N. Dinh, D.T.T. Binh (1999), *Mixed problem for some semilinear wave equation involving Bessel's operator*, Demonstratio Math. **32**, 77-94.

[16] N.T. Long, A.P.N. Dinh, T.N. Diem (2002), *Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator*, J. Math. Anal. Appl. 267, 116-134.

[17] N.T. Long (2002), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - B(t, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. **274**, 102-123.

[18] L.A. Medeiros (1994), *On some nonlinear perturbation of Kirchhoff-Carrier operator*, Comp. Appl. Math. **13**, 225-233.

[19] L.A. Medeiros, J. Limaco, S.B. Menezes (2002), *Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part one*, J. Comput. Anal. Appl. **4**, No. 2, 91-127.

[20] LA. Medeiros, J. Limaco, S.B. Menezes (2002), *Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part two*, J. Comput. Anal. Appl. **4**, No. 3, 211-263.

[21] S.I. Pohozaev (1975), *On a class of quasilinear hyperbolic equation*, Math. USSR. Sb. **25**, 145-158.

[22] E.L. Ortiz, A.P.N. Dinh (1987), *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. **18**, 452-464.

[23] R.E. Showater (1994), *Hilbert space methods for partial differential equations*, Electronic J. Diff. Equat., Monograph **01**.

Tóm tắt:

BÀI TOÁN HỖN HỢP CHO PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN CHỨA TOÁN TỬ KIRCHHOFF

Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán sau:

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\|u_r\|_0^2\right)\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = f(r,u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left|\lim\limits_{r\to 0_+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty, \quad u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \widetilde{u}_0(r), \quad u_t(r,0) = \widetilde{u}_1(r), \quad \|u_r\|_0^2 = \int_0^1 r\left|u_r(r,t)\right|^2 dr, \end{cases}$$

ở đây hằng số $h>0$ và các hàm số $B, f, \widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1$ là cho trước. Với giả thiết $f \in C^2([0,1]\times IR)$ và $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \le B(\eta) \le \bar{d}_0\eta^p + \widetilde{d}_0$, $|B'(\eta)| \le \bar{d}_1\eta^{p-1} + \widetilde{d}_1$, trong đó $b_0 > 0$, $p > 1$, $\bar{d}_0, \widetilde{d}_0$, $\bar{d}_1, \widetilde{d}_1 \ge 0$ là các hằng số, chúng tôi liên kết bài toán (P) với một dãy qui nạp $\{u_m\}$ mà sự tồn tại nghiệm địa phương được chứng minh bằng phương pháp Galerkin, phương pháp điểm bất động và lí luận về tính compact thông dụng trong các không gian Sobolev có trọng thích hợp. Dãy $\{u_m\}$ này sẽ được chứng minh là hội tụ cấp hai về nghiệm yếu của bài toán (P).

Abstract:

A MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR WAVE EQUATION INVOLVING KIRCHHOFF'S OPERATOR

In this paper we consider the nonlinear wave equation:

$$(P)\quad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\|u_r\|_0^2\right)\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = f(r,u), \; 0<r<1, \; 0<t<T, \\ \left|\lim_{r\to 0_+} \sqrt{r}\,u_r(r,t)\right| < +\infty, \quad u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \widetilde{u}_0(r), \quad u_t(r,0) = \widetilde{u}_1(r), \quad \|u_r\|_0^2 = \int_0^1 r\,|u_r(r,t)|^2\,dr, \end{cases}$$

where $B, f, \widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1$ are given functions and $h>0$ is a given constant. With the hypothesis $f \in C^2([0,1]\times IR)$ and coefficient function $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \le B(\eta) \le \bar{d}_0\eta^p + \widetilde{d}_0$, $|B'(\eta)| \le \bar{d}_1\eta^{p-1} + \widetilde{d}_1$, where $b_0 > 0$, $p > 1$, $\bar{d}_0, \widetilde{d}_0$, $\bar{d}_1, \widetilde{d}_1 \ge 0$ are given constants, we first associate this problem with a recursive scheme {Um} which the existence of a local and unique weak solution demonstrated by Galerkin's method in Sobolev spaces with appropriate weight and a standard compactness argument. Next, we show the quadratic convergence of the scheme corresponding to the solution of the original problem.