TÍNH COMPACT, LIÊN THÔNG CỦA TẬP HỢP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TIẾN HÓA

LÊ HOÀN HÓA*, LÊ THỊ PHƯƠNG NGỌC**

I. GIỚI THIỆU

Trong các bài báo [1], [2] gần đây các tác giả đã chỉ ra được tính khác rỗng, compact và liên thông của các tập hợp nghiệm của một số phương trình vi phân, tích phân. Trong bài báo này, chúng tôi lại tiếp tục nghiên cứu tính chất đó cho tập hợp các nghiệm của bài toán tiến hóa: (I) $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases}$ và bài toán tiến hóa ngược thời gian: (II) $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$, trong đó A là toán tử tuyến tính tự liên hợp, không âm trong không gian Hinbe H, $f : H \longrightarrow H$ liên tục và χ thuộc H cho trước.

Bài toán tiến hóa là bài toán đã được rất nhiều nhà Toán học nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau, chẳng hạn như: Dan Henry [3], Jackk. Hale [4], Richard E.Ewing [5], Nguyễn Thành Long và Alain Phạm Ngọc Định [6][7],... Trong [6], [7] các tác giả nghiên cứu bài toán tiến hóa dưới dạng bài toán ngược thời gian:

$\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 < t < 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$ trong đó A là toán tử tuyến tính tự liên hợp, không âm trong không gian Hinbe H; χ thuộc H cho trước và $f: H \longrightarrow H$ liên tục thỏa điều kiện lipchitz địa phương. Trong [3],[4] và [5](dạng bài toán ngược với vế phải bằng không) ở phần tổng quát hóa, các tác giả đã xét bài toán với toán tử A ở dạng tổng quát hơn, dưới khái niệm"sectorial". Dựa trên lý thuyết bậc tô pô của trường vectơ compact, các tính chất của toán tử tuyến tính tự liên hợp không âm trong không gian Hinbe và một số kết quả của các bài báo nói trên, trong mục 2 chúng tôi chứng minh được tập hợp các nghiệm của các bài toán (I), (II) khác rỗng, compact và liên thông.

Chúng tôi nhắc lại định lý Krasnosel'skii-Perov (xem [2]) ở đây để sử dụng cho chứng minh ở mục 2.

---

* Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM.
** Trường Cao đẳng Sư phạm Nha Trang.

Cho $(E, |.|)$ là không gian Banach, D là tập con mở và bị chặn của E và $T: \overline{D} \to E$ là toán tử compact. Giả sử $0 \notin (I-T)\delta D$ và $\deg(I-T, D, 0) \neq 0$. Giả sử T thỏa thêm điều kiện:

$$(*)\begin{cases} \text{Với mọi } \varepsilon > 0, \text{có toán tử compact } T_\varepsilon \text{ sao cho } \quad |T_\varepsilon(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \overline{D} \\ \text{và với mỗi h mà } |h| < \varepsilon, \text{phương trình } x = T_\varepsilon(x) + h \text{ có nhiều nhất} \\ \text{một nghiệm trên } \overline{D}. \end{cases}$$

Khi đó tập các điểm bất động của T khác rỗng, compact và liên thông.

II. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Cho H là không gian Hinbe và chuẩn được sinh ra bởi tích vô hướng trên H được ký hiệu là $|.|$.

- Xét phương trình **(I)** $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases}$

và phương trình **(II)** $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$ với giả thiết :

(1). A là toán tử tuyến tính tự liên hợp, không âm trong không gian Hinbe H.

(2). $f : H \longrightarrow H$ liên tục, thỏa điều kiện: Tồn tại một số không đổi C dương (lớn tuỳ ý) và số tự nhiên n để $|f(x)| \le C|x|^{2n+1}$, $\forall x \in H$. Ta có:

Định lý 1 :

Tập hợp các nghiệm của phương trình (I) khác rỗng, compact và liên thông.

Định lý 2 :

Tập hợp các nghiệm của phương trình (II) khác rỗng, compact và liên thông.

Chứng minh định lý 1:

Gọi $X_1 = C([0,1], H)$ là không gian Banach các ánh xạ liên tục trên [0, 1], nhận giá trị trong không gian Hinbe H với chuẩn $\|.\|$ thông thường, $\|u\| = \sup\{|u(t)|, t \in [0, 1]\}$, $u \in X_1$. Không sợ nhầm lẫn, ta cũng ký hiệu chuẩn của các ánh xạ liên tục trong các không gian tương ứng là $\|.\|$.

<u>Bước 1 : Ta chứng minh định lý 1 đúng khi $\chi = 0$.</u>

Gọi $X_1^* = \{ u \in X_1 / u(0) = 0 \}$.

- Đặt $T: X_1^* \longrightarrow X_1$ sao cho $T(u) = u_t + Au$, tức là $T(u)(t) = u_t(t) + A(u(t))$, $\forall t \in [0, 1]$. (3)

Đặt $F : X_1 \longrightarrow X_1$

$u \longrightarrow F(u)$ sao cho $F(u)(t) = f(u(t)),\ \forall t \in [0, 1]$. (4)

Bổ đề 1 : Với giả thiết (1) và $f : H \longrightarrow H$ liên tục, các tính chất sau là đúng:

i. T là toán tử tuyến tính liên tục và khả nghịch. T^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục.

ii. Toán tử F là toán tử compact.

iii. Toán tử $T^{-1}F$ là toán tử compact.

Chứng minh bổ đề 1:

i. T là toán tử tuyến tính liên tục do u_t, A là các toán tử tuyến tính liên tục và u_1, u_2 thuộc X_1^* thì ku_1+lu_2 cũng thuộc X_1^* $(k, l \in R)$.

Hơn nữa T là song ánh nên T khả nghịch. Thật vậy:

$\forall g \in X_1$, rõ ràng phương trình (5) $\begin{cases} u_t + Au = g(t) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất

$u \in X_1^*$. Nghiệm đó được xác định như sau : $u(t) = e^{-tA}(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A} g(s)ds$.

Suy ra phương trình $Tu = g$ có nghiệm duy nhất $u \in X_1^*$.

Theo định lý ánh xạ mở ta có T^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục và hiển nhiên $\|T^{-1}\| > 0$.

ii. Rõ ràng F liên tục. Điều này có được do f, u liên tục. Khi đó nếu $u \longrightarrow u_0$ thì $\forall t \in [0,1]$, $u(t) \longrightarrow u_0(t) \Rightarrow \forall t \in [0, 1]$, $f(u(t)) \longrightarrow f(u_0(t)) \Rightarrow F(u) \longrightarrow F(u_0)$.

Mặt khác: Lấy B bị chặn trong X_1, ta chứng minh được F(B) compact tương đối trong X_1 bằng cách sử dụng định lý Ascoli-Azela như sau:

Ta có: F(B) đẳng liên tục. Vì: $\forall u \in X_1$ (nói riêng $\forall u \in B$), f_0u liên tục trên [0, 1] nên f_0u liên tục đều trên $[0, 1] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall t, t' \in [0, 1]$ ta có:

$$0 < |t-t'| < \delta \Rightarrow |f_0u(t) - f_0u(t')| < \varepsilon \Rightarrow |F(u)(t) - F(u)(t')| < \varepsilon.$$

F(B) bị chặn đều . Vì:

Do B bị chặn nên $\exists C' > 0$: $\|u\| \le C'$, $\forall u \in B \Rightarrow |u(t)| \le C'$ $\forall u \in B$, $\forall t \in [0, 1]$,

$\Rightarrow u(t) \in \overline{S}(0, C')$, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall u \in B$ ở đây $\overline{S}(0, C')$ là hình cầu đóng có tâm tại 0 và có bán kính C' trong không gian Hinbe H.

$\Rightarrow f(u(t)) \in f(\overline{S}(0,C'))$. Ta lại có $f(\overline{S}(0,C'))$ là tập compact trong H do $f(\overline{S}(0,C'))$ là ảnh của tập compact $\overline{S}(0,C')$ trong H qua ánh xạ f liên tục. Như thế $f(\overline{S}(0,C'))$ bị chặn trong H. Suy ra $\exists$ m>0: $\left|f(v)\right| \le m, \forall v \in \bar{S}(0,C')$. Nên $\left|f(u(t))\right| \le m, \forall t \in [0,1]$, $\forall u \in B$, do đó $\left|F(u)(t)\right| \le m, \forall t \in [0,1], \forall u \in B$. Tóm lại F là toán tử compact.

iii. Vì F là toán tử compact, T^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục nên $T^{-1}F : X_1 \longrightarrow X_1^*$ là toán tử compact.

Bổ đề 1 chứng minh xong.

- Rõ ràng : $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \; T(u)(t) = f(u((t)) = F(u)(t), \forall t \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \; u(t) = T^{-1}F(u)(t) \quad , \forall t \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \; u = T^{-1}F(u).$$

Nên u là nghiệm của phương trình: $u_t + Au = f(u)$, $t\in[0,1]$ thỏa điều kiện đầu $u(0) = 0$ khi và chỉ khi u là điểm bất động của toán tử $T^{-1}F$. Từ đó tập các nghiệm của phương trình $u_t + Au = f(u)$, $t\in [0,1]$ thỏa điều kiện đầu $u(0) = 0$ chính là tập các điểm bất động của $T^{-1}F$. Nếu ta chứng minh được tập các điểm bất động của toán tử $T^{-1}F$ khác rỗng và compact, liên thông thì bước 1 sẽ hoàn toàn được chứng minh.

- Xét phương trình : $\begin{cases} u_t + Au = \lambda f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases} ,\forall \lambda \in [0,1]$ (6),

trong đó toán tử A và f thỏa các điều kiện (1),(2) (như vậy bài toán (I) là trường hợp đặc biệt của bài toán (6) khi $\lambda = 1$).

Ta cần chứng minh tập nghiệm của (6) bị chặn. Nghĩa là chứng minh có một số dương không đổi M để mọi nghiệm u(t) của (6) đều thỏa điều kiện : $|u(t)| \le M, \forall t\in [0,1]$, $\forall \lambda\in [0,1]$. (7). Chứng minh như sau:

Nếu u(t), $t\in [0,1]$ là nghiệm của (6) thì: $(u_t, u) = -(Au, u) + \lambda (f(u), u)$ và $u(0) = 0$.

Trường hợp 1: $-(Au, u) + \lambda (f(u), u) \le 0$. Khi đó $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = (u_t, u) \le 0$.

Như thế $|u(t)|^2$ là hàm giảm trên [0,1]. Mà $|u(0)|^2 = 0$, nên $|u(t)|^2 = 0, \forall t \in [0,1]$, điều kiện (7) thỏa mãn.

Trường hợp 2: $-(Au, u) + \lambda (f(u), u) > 0$. Hiển nhiên ở đây $(f(u),u) > 0$ vì $(Au,u) \ge 0$.

Nếu với số dương N (lớn tuỳ ý) chọn trước mà $|u(t)| \le N, \forall t\in [0,1]$, $\forall \lambda\in [0,1]$ thì điều kiện (7) thỏa mãn.

Nếu không như thế, từ (2) ta có : $|f(u(t))| \le C\,|u(t)|^{2n+1}, \forall t \in [0,1]$.

Suy ra $(u_t,u) = -(Au,u) + \lambda (f(u), u) \le \lambda (f(u), u) \le |f(u)|\,|u| \le C\,|u(t)|^{2n+2}$.

Hay $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \le C\,|u(t)|^{2n+2}$.

Đặt $y(t) = |u(t)|^2$, $t \in [0,1]$. Đây là hàm số thực liên tục và tăng trên [0,1].

Ta có $\frac{dy}{dt} \le 2C\,y(t)^{n+1}, \forall t \in [0,1] \Rightarrow \frac{dy}{dt} \le 2C\,y(t)^{n+1}, \forall t \in [t_0,1]$ với $t_0 \to 0$.

Suy ra $\int_{t_0}^{t}\frac{y'}{y^{n+1}}dt \le 2C\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow \frac{1}{y^n(t)} \ge \frac{1}{y^n(t_0)} - 2nC$.

Vì $y^n(t_0) \to 0$ khi $t_0 \to 0^+$ nên với số dương không đổi m (chọn đủ bé) ta có:

$\exists\, \delta > 0$ sao cho với $t_0 \in (0, 2\delta)$ thì $y^n(t_0) < \frac{1}{m + 2nC}$.

Chọn $t_0 = \delta$. Ta có $\frac{1}{y^n(t_0)} - 2nC > m$. Suy ra $\frac{1}{y^n(t)} > m \Leftrightarrow y(t)^n < \frac{1}{m}$, $\forall t \in [\delta,1]$.

Và hiển nhiên rằng, $\forall t \in [0,\delta]$, $y(t)^n \le y(\delta)^n < \frac{1}{m}$ (do y(t) là hàm tăng trên [0,1]).

Vậy $y(t)^n < \frac{1}{m}$, $\forall t \in [0,1]$. Suy ra điều kiện (7) thỏa mãn.

Do đó tồn tại tập mở và bị chặn D trong X_1 sao cho $u \in D$ và $u \notin \delta D$ (ở đây δD là biên của D), với mọi $\lambda \in [0,1]$. Suy ra mọi nghiệm của phương trình (6) (nếu có), với mọi $\lambda \in [0,1]$ đều chứa trong D nhưng không chứa trong δD.

Vậy ta sẽ xét: $T^{-1}F : \overline{D} \subset X_1 \longrightarrow X_1^*$ và chỉ ra toán tử này thỏa mãn các điều kiện của định lý Krassosel'skii-Perov. Ta có:

- Toán tử $T^{-1}F$ là toán tử compact (bổ đề 1).
- Ánh xạ f: $H \longrightarrow H$ liên tục nên $\forall \varepsilon > 0$, có ánh xạ f_ε: $H \longrightarrow H$ là xấp xỉ lipschitz địa phương của f sao cho $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|}$, $\forall x \in H$.
- Đặt F_ε: $X_1 \longrightarrow X_1$

  $u \longrightarrow F_\varepsilon(u)$ sao cho $F_\varepsilon u(t) = f_\varepsilon(u(t))$, $\forall t \in [0,1]$.

Xét toán tử $T^{-1}F_\varepsilon : \overline{D} \longrightarrow X_1^*$. Từ bổ đề 1 ta có $T^{-1}F_\varepsilon$ là toán tử compact.

Hơn nữa : $\forall u \in X_1$, $\|T^{-1}F_\varepsilon(u) - T^{-1}F(u)\| < \varepsilon$ (8). Vì:

$\|T^{-1}F_\varepsilon(u) - T^{-1}F(u)\| = \|T^{-1}(F_\varepsilon(u) - F(u))\|$ (do T^{-1} là toán tử tuyến tính trên X_1)

Mà: $\forall t \in [0,1], \left|F_\varepsilon(u)(t) - F(u)(t)\right| = \left|f_\varepsilon(u(t)) - f(u(t))\right| < \dfrac{\varepsilon}{\left\|T^{-1}\right\|}$

nên $\quad \left\|F_\varepsilon(u) - F(u)\right\| < \dfrac{\varepsilon}{\left\|T^{-1}\right\|}$.

Suy ra: $\left\|T^{-1}(F_\varepsilon(u) - F(u))\right\| \le \left\|T^{-1}\right\| \left\|F_\varepsilon(u) - F(u)\right\| < \varepsilon$.

Mặt khác, với mỗi h mà $\|h\| < \varepsilon$ phương trình: $u = T^{-1}F_\varepsilon(u) + h$ (9) có nhiều nhất một nghiệm trên $\overline{D}$. Thật vậy:

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của (9). Khi đó : $\begin{cases} u_1 = T^{-1}F_\varepsilon(u_1) + h \\ u_2 = T^{-1}F_\varepsilon(u_2) + h \end{cases}$.

Rõ ràng : $u_1(0) = u_2(0) = h(0)$. Nếu $h(0) = 0$ thì:

$$\begin{cases} u_1 = T^{-1}F_\varepsilon(u_1) + h \\ u_2 = T^{-1}F_\varepsilon(u_2) + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(u_1) = F_\varepsilon(u_1) + T(h) \\ T(u_2) = F_\varepsilon(u_2) + T(h) \end{cases}$$

Suy ra $u_1(t)$, $u_2(t)$ là hai nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} u_t + Au = f_\varepsilon(u) + T(h) \quad 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Phương trình (10) tương đương với phương trình tích phân:

$$u(t) = e^{-tA}(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}(f_\varepsilon(u(s)) + T(h)(s))ds \qquad (10').$$

Sử dụng bổ đề Gronwall và tính Lipschitz địa phương của f_ε trên H, ta chứng minh được $u_1(t) = u_2(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Nếu $h(0) \neq 0$ thì $\begin{cases} u_1(t) - h(0) = T^{-1}F_\varepsilon(u_1)(t) + h(t) - h(0) \\ u_2(t) - h(0) = S^{-1}F_\varepsilon(u_2)(t) + h(t) - h(0) \end{cases}$ (11)

Đặt $v_1(t) = u_1(t) - h(0)$, $v_2(t) = u_2(t) - h(0)$, $k(t) = h(t) - h(0)$.

(11) được viết lại như sau: (11') $\begin{cases} v_1(t) = T^{-1}F_\varepsilon(u_1)(t) + k(t) \\ v_2(t) = T^{-1}F_\varepsilon(u_2)(t) + k(t) \end{cases}$

Rõ ràng $k(0) = 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$.

Nên từ (11') ta suy ra được $\begin{cases} T(v_1) = F_\varepsilon(u_1) + T(k) \\ T(v_2) = F_\varepsilon(u_2) + T(k) \end{cases}$

Suy ra $v_1(t)$, $v_2(t)$ là hai nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} u_t + Au = f\varepsilon(u) + T(k) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Tương tự trên ta cũng chứng minh được $v_1 = v_2$. Suy ra $u_1 = u_2$.

Như vậy, $T^{-1}F$ thỏa điều kiện (*) của định lý Krasnosel'skii-Perov(kết hợp (8),(9))

- Cuối cùng ta chỉ ra $T^{-1}F$ không có điểm bất động trên δD và $\deg(I - T^{-1}F, D, 0) \neq 0$.

Ta có $\forall\lambda \in [0,1]$, (6) $\Leftrightarrow T(u) = \lambda f(u) \Leftrightarrow u = T^{-1}(\lambda F(u))$ nên nghiệm u của (6) là điểm bất động của $T^{-1}(\lambda F)$.

Theo trên ta suy ra $T^{-1}(\lambda F)$ không có điểm bất động trên δD, $\forall\lambda \in [0,1]$.

Như thế họ toán tử compact $\varphi_\lambda = T^{-1}(\lambda F) : [0,1] \times \overline{D} \longrightarrow X_1^*$ thỏa các tính chất sau:

φ_λ liên tục; $\varphi_\lambda([0,1] \times \overline{D})$ là tập compact tương đối và $0 \notin (I - \varphi_\lambda)(\delta D)$.

Do tính bất biến đồng luân, ta có: $\deg(I - \varphi_\lambda, D, 0)$ không phụ thuộc λ.

Suy ra $\deg(I - \varphi_0, D, 0) = \deg(I - \varphi_1, D, 0)$ trong đó $I - \varphi_0 = I$; $I - \varphi_1 = I - T^{-1}F$

hay $\deg(I - T^{-1}F, D, 0) = \deg(I, D, 0) = 1$.

Như vậy định lý đúng trong trường hợp $\chi = 0$.

Bước 2 : Xét $\chi \neq 0$.

Với mọi u thuộc tập nghiệm của (I), đặt $u^*: [0,1] \longrightarrow H$ sao cho: $u^*(t) = u(t) - \chi$. Rõ ràng $u^* \in X_1$, $u^*(0) = 0$ và $u^*_t = u_t$.

Suy ra $u_t(t) + Au(t) = f(u) \Leftrightarrow u^*_t(t) + Au^*(t) + A(\chi) = f(u^*(t) + \chi)$

$$\Leftrightarrow u^*_t(t) + Au^*(t) = f(u^*(t) + \chi) - A(\chi).$$

Như thế $u^*(t)$ là nghiệm của phương trình (I)' $\begin{cases} u_t + Au = f^*(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

trong đó $f^*: \quad H \longrightarrow H$

$$x \longrightarrow f^*(x) = f(x + \chi) - A(\chi)$$

thỏa điều kiện (2). Ngược lại, nếu $u^*(t)$ là nghiệm của (I)' thì $u(t) = u^*(t) + \chi$ sẽ là nghiệm của (I). Theo bước 1, ta có tập các nghiệm của (I)' khác rỗng, compact và liên thông. Suy ra tập các nghiệm của (I) cũng khác rỗng, compact, liên thông.

Tóm lại tập các nghiệm của phương trình:

$$\text{(I)}\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases}$$

với các điều kiện (1), (2) là khác rỗng, compact và liên thông.

Chứng minh định lý 2:

Bước 1: Ta chứng minh định lý 2 đúng trong trường hợp $\chi = 0$.

Ký hiệu X_1 như trên và gọi $X_1^{**} = \{ u \in X_1 / u(1) = 0 \}$.

- Đặt $S : X_1^{**} \longrightarrow X_1$ sao cho $S(u) = u_t + Au$, tức là $S(u)(t) = u_t(t) + A(u(t)), \forall t \in [0, 1]$. (13)

Bổ đề 2: Với giả thiết (1) và $f : H \longrightarrow H$ liên tục, các tính chất sau là đúng:

i. S là toán tử tuyến tính liên tục và khả nghịch. S^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục.

ii. Toán tử $S^{-1}F$ là toán tử compact.

Chứng minh bổ đề 2:

i. S là toán tử tuyến tính liên tục do u_t, A tuyến tính, liên tục.

Hơn nữa S là song ánh nên khả nghịch. Thật vậy:

$\forall g \in X_1$, rõ ràng phương trình (14) $\begin{cases} u_t + Au = g(t) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất $u \in X_1^{**}$. Nghiệm đó được xác định như sau: $u(t) = e^{(1-t)A}(0) - \int_t^1 e^{-(1-s)A} g(s)ds$.

Suy ra phương trình $Su = g$ có nghiệm duy nhất $u \in X_1^{**}$.

Theo định lý ánh xạ mở ta có S^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục và hiển nhiên $\left\| S^{-1} \right\| > 0$.

ii. Tương tự (iii) ở bổ đề 1.

Bổ đề 2 chứng minh xong.

Tương tự như trong chứng minh định lý 1 ở bước 1, nếu ta chứng minh được tập các điểm bất động của toán tử $S^{-1}F$ khác rỗng và compact, liên thông thì định lý 2 sẽ hoàn toàn được chứng minh.

- Xét phương trình : (15) $\begin{cases} u_t + Au = \lambda f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$, $\forall \lambda \in [0,1]$

trong đó toán tử A và f thỏa các điều kiện (1), (2) (như vậy bài toán (II) là trường hợp đặc biệt của bài toán (15) khi $\lambda = 1$).

Ta chứng minh tập nghiệm của (15) bị chặn. Nghĩa là chứng minh có một số dương không đổi M để mọi nghiệm u(t) của (15) đều thỏa điều kiện: $|u(t)| \le M, \forall t \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$. (16). Chứng minh như sau:

Nếu u(t), $t \in [0,1]$ là nghiệm của (15) thì: $(u_t, u) = -(Au, u) + \lambda (f(u), u)$ và $u(1) = 0$.

Trường hợp 1: $-(Au, u) + \lambda (f(u), u) \ge 0$. Khi đó $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = (u_t, u) \ge 0$.

Như thế $|u(t)|^2$ là hàm tăng trên [0,1]. Mà $|u(1)|^2 = 0$, nên $|u(t)|^2 = 0$, $\forall t \in [0,1]$, điều kiện (16) thỏa mãn.

Trường hợp 2: $-(Au, u) + \lambda (f(u), u) < 0 \Leftrightarrow (Au, u) - \lambda (f(u), u) > 0$.

Nếu với số dương N (lớn tùy ý) chọn trước mà $|u(t)| \le N, \forall t \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$ thì điều kiện (16) thỏa mãn.

Nếu không như thế, từ (2) ta có: $|f(u(t))| \le C|u(t)|^{2n+1}, \forall t \in [0,1]$. Ta có thể xem C được chọn thỏa điều kiện $C > \|A\|$.

Khi đó
$$-(u_t,u) = (Au,u) - \lambda (f(u), u) \le |(Au, u)| + |(f(u), u)| \le \|A\|\,|u(t)|^2 + C|u(t)|^{2n+2}.$$

Hay $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \le C(|u(t)|^2 + |u(t)|^{2n+2})$.

Đặt $y(t) = |u(t)|^2$, $t \in [0,1]$. Đây là hàm số thực liên tục và giảm trên [0,1].

Ta có $-\frac{dy}{dt} \le 2C(y + y^{n+1}), \forall t \in [0,1] \Rightarrow \frac{dy}{dt} \le 2C(y + y^{n+1}), \forall t \in [0, t_1]$ với $t_1 \to 1^-$.

Suy ra
$$\int_t^{t_1} -\frac{y'}{y + y^{n+1}}\,dt \le 2C\int_t^{t_1} dt \Rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t_1)}}{y(t_1)}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t)}}{y(t)}\right) \le 2C$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t)}}{y(t)}\right) \ge \ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t_1)}}{y(t_1)}\right) - 2C$$

Vì $y^n(t_1) \to 0$ khi $t_1 \to 1^-$ nên $\ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t_1)}}{y(t_1)}\right) \to +\infty$ khi $t_1 \to 1^-$. Do đó, với số dương không đổi M' (chọn đủ lớn) ta có:

$\exists \delta > 0$ sao cho với $t_1 \in (1-2\delta, 1)$ thì $\ln\left(\frac{\sqrt[n]{1 + y^n(t_1)}}{y(t_1)}\right) > M' + 2C$.

Chọn $t_1 = 1 - \delta$. Ta có $\ln(\frac{\sqrt[n]{1+y^n(t_1)}}{y(t_1)}) - 2C > M'$.

Suy ra $\ln(\frac{\sqrt[n]{1+y^n(t)}}{y(t)}) > M' \Leftrightarrow \sqrt[n]{1+\frac{1}{y^n(t)}} > e^{M'} \Leftrightarrow y(t)^n < \frac{1}{e^{nM'}-1}, \forall t \in [0,1-\delta]$.

Và hiển nhiên rằng, $\forall t \in [1-\delta, 1]$, $y(t)^n \le y(1-\delta)^n < \frac{1}{e^{nM'}-1}$ (do $y(t)$ là hàm giảm trên $[0,1]$).

Vậy $y(t)^n < \frac{1}{e^{nM'}-1}$, $\forall t \in [0,1]$. Suy ra điều kiện (16) thỏa mãn.

Do đó tồn tại tập mở và bị chặn D^* trong X_1 sao cho $u \in D^*$ và $u \notin \delta D^*$ (ở đây δD^* là biên của D^*), với mọi $\lambda \in [0,1]$. Suy ra mọi nghiệm của phương trình (15) (nếu có), với mọi $\lambda \in [0,1]$ đều chứa trong D^* nhưng không chứa trong δD^*.

Vậy ta sẽ xét: $S^{-1}F: \overline{D}^* \subset X_1 \longrightarrow X_1^{**}$ và chỉ ra toán tử này thỏa mãn các điều kiện của định lý Krasnosel'skii-Perov. Ta có $S^{-1}F$ là toán tử compact (bổ đề 2).

- Ta có $f: H \longrightarrow H$ liên tục nên $\forall \varepsilon > 0$, có ánh xạ $f_\varepsilon: H \longrightarrow H$ là xấp xỉ lipschitz địa phương của f sao cho $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < (\varepsilon / \|S^{-1}\|)$

- Đặt $F_\varepsilon: X_1 \longrightarrow X_1$

$u \longrightarrow F_\varepsilon(u)$ sao cho $F_\varepsilon u(t) = f_\varepsilon(u(t)), \forall t \in [0,1]$.

Xét toán tử $S^{-1}F_\varepsilon : \overline{D}^* \longrightarrow X_1^{**}$.

Từ bổ đề 2 ta có $S^{-1}F_\varepsilon$ là toán tử compact.

Hơn nữa: $\forall u \in X_1$, $\|S^{-1}F_\varepsilon(u) - S^{-1}F(u)\| < \varepsilon$ (17)

Mặt khác, $\forall h \in D^*$ mà $\|h\| < \varepsilon$ phương trình: $u = S^{-1}F_\varepsilon(u) + h$ (18) có nhiều nhất một nghiệm trên $\overline{D}^*$. Thật vậy:

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của (18). Rõ ràng $u_1(1) = u_2(1) = h(1)$. Tương tự trên ta chỉ cần chứng minh $u_1 = u_2$ trong trường hợp $h(1) = 0$. Khi đó $u_1 = u_2$ trong trường hợp $h(1) \neq 0$.

Với $h(1) = 0$, ta có $u_1(t)$, $u_2(t)$ là hai nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} u_t + Au = f\varepsilon(u) + S(h) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Phương trình (19) tương đương với phương trình tích phân: (xem[6])

$$u(t) = e^{(1-t)A}(0) - \int_t^1 e^{-(t-s)A}(f_\varepsilon(u(s)) + S(h)(s))ds \quad (19').$$

Như thế: $$u_1(t) = e^{(1-t)A}(0) - \int_t^1 e^{-(t-s)A}(f_\varepsilon(u_1(s)) + S(h)(s))ds$$

$$u_2(t) = e^{(1-t)A}(0) - \int_t^1 e^{-(t-s)A}(f_\varepsilon(u_2(s)) + S(h)(s))ds$$

Ta có $u_1(1) = u_2(1) = 0$.

Đặt $a = \min\{b\in[0,1] / u_1(t) = u_2(t), \forall t\in[b,1]\}$. Ta chứng minh a= 0.

Giả sử 0< a (hiển nhiên a≤1). Ta chứng minh điều này vô lý.

Vì f_ε lipschitz địa phương trên H, nên có số r > 0 để f_ε thỏa điều kiện lipschitz trên hình cầu $B_r = \{x\in H / |x - u_1(a)| < r\}$ với hệ số lipschitz là k > 0. Vì $u_1(t)$, $u_2(t)$ liên tục trên [0,1] nên có số δ>0 để $u_1(t)$, $u_2(t)$ thuộc B_r với mọi t thuộc [a -δ , a].

Từ đó: $$|u_1(t) - u_2(t)| \le \left|\int_t^a e^{-(t-s)A}(f_\varepsilon(u_1(s)) - f_\varepsilon(u_2(s)))ds\right|$$

$$\le \int_t^a |(f_\varepsilon(u_1(s)) - f_\varepsilon(u_2(s)))|ds \le k\int_t^a |(u_1(s) - u_2(s)|ds$$

Áp dụng bổ đề Gronwall ta suy ra $u_1(t) = u_2(t)$, ∀t∈ [a-δ , a]. Điều này mâu thuẫn với cách chọn a nói trên.

Như vậy $S^{-1}F$ thỏa điều kiện (*) của định lý Krasnosel'skii-Perov.

Cuối cùng, tương tự như trong chứng minh định lý ở bước 1, ta cũng chứng minh được $S^{-1}F$ không có điểm bất động trên δD* và deg (I - $S^{-1}F$, D*, 0) ≠ 0. Bước 1 hoàn thành.

<u>Bước 2</u> : <u>Chứng minh định lý 2 khi $\chi \neq 0$</u> (tương tự như chứng minh bước 2 ở định lý 1)

Tóm lại tập các nghiệm của phương trình:

$$(\text{II}) \begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$$

với các điều kiện (1), (2) là khác rỗng, compact và liên thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] L. H. Hóa - V. T. T. Nhiều - N. T. Phương, (7-10/09/2002), *The connectivity and compactness of solution sets*. Hội nghị Toán học toàn quốc, Huế, Chương trình và tóm tắt các báo cáo, 82 - 83.

[2] L. H. Hóa - L. T. P. Ngọc, (12/2002), *Tính liên thông và tính compact của tập hợp nghiệm*, Hội nghị Khoa học Toán-Tin học, ĐHSP Tp. HCM.

[3] Dan Henry, (1981), *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York.

[4] Jack K.Hale, (1988), *Asympotic behavior of dissipative systems*, Mathematical surveys and monographs, No. 25. American Mathematical Society.

[5] Richard E. Ewing, (4/1975), *The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations*. SIAM J. Math. Anal. Vol 6, No. 2.

[6] Nguyen Thanh Long - Alain Pham Ngoc Dinh, (1994), *Approximation of a parabolic nonlinear evolution equation backwards in time*. Inverse Problem 10, 905-914. Printed in the UK.

[7] Nguyen Thanh Long - Alain Pham Ngoc Dinh, (1996), *Note on a regularization of a parabolic nonlinear evolution equation backwards in time*. Inverse Problem 12, 455-462. Printed in the UK.

Tóm tắt:

Tính Compact, liên thông của tập hợp nghiệm của bài toán tiến hóa

Bài báo này chứng tỏ rằng tập hợp tất cả các nghiệm của các phương trình sau là khác rỗng, compact và liên thông: *(I)* $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases}$

$$(II)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$$

Công cụ chính là lý thuyết bậc tôpô của trường vectơ compact và các tính chất của toán tử tự liên hợp, không âm trong không gian Hinbe.

Abstract:

The connected Compactness of the set of solutions of the evolution problem

The paper proves that for the following equations the sets of solutions are nonempty, compact and connected: (I) $\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases}$

$$(II)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$$

The main tools are the topological degree theory of compact vector field and properties of the non-negative, self-adjoint operator.