ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA TÍNH FREDHOLM CỦA TOÁN TỬ VI PHÂN HÀM TUYẾN TÍNH

TRẦN HỮU BỔNG*

Xét toán tử vi phân hàm dạng:

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + A \ : C^m \to C$$

với $C = C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $C^m = C^m(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Toán tử L được gọi là giải chuẩn tắc nếu ImL là không gian con kín. Toán tử giải chuẩn tắc L được gọi là n-chuẩn tắc nếu nhân của nó KerL hữu hạn chiều và được gọi là d-chuẩn tắc nếu chiều của không gian thương $C/_{\operatorname{Im} L}$ hữu hạn. Toán tử L được gọi là FREDHOLM nếu nó n-chuẩn tắc và d-chuẩn tắc.

Trong [1] tác giả đã chứng minh điều kiện cần và đủ để toán tử $L = L^m_\infty \to L_\infty$ là FREDHOLM. Vấn đề đặt ra là nghiên cứu bài toán tương tự khi $L : C^m \to C$. Đến nay kết quả mới chỉ nhận được điều kiện cần.

GIẢ THIẾT: Họ các toán tử

$S(\tau)AS(-\tau)$ (với $(S(\tau)x)(t) = x(t+\tau)$, $t,\tau \in \mathbb{R}$) có tính chất:

$\forall \tau_n \in \mathbb{R}$, $|\tau_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ tồn tại dãy con (τ_{n_k}) sao cho dãy các toán tử

$A_k = S(\tau_{n_k})AS(-\tau_{n_k})$ có tính chất: $\forall x \in C^m$ tồn tại $y \in C$ sao cho

$\|f(A_k x - y)\| \to 0$ khi $k \to \infty$, $\forall f \in c_0(\mathbb{R})$ ($c_0(\mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với giá hữu hạn)

Từ đó suy ra tồn tại toán tử $\widetilde{A} \in \left[C^m, C\right]$ sao cho

$$y = \widetilde{A}x \ , \forall x \in C^m$$

$\widetilde{A}$ gọi là toán tử giới hạn. Tập các toán tử giới hạn của A được ký hiệu H(A).

ĐỊNH LÝ 1 [1] Các mệnh đề sau tương đương:

1/ Toán tử $L : C^m \to C$ là n-chuẩn tắc.

---

* Khoa Toán – Tin, Đại học Sư phạm Tp.HCM.

2/ $Ker(\frac{d^m}{dt^m}+\widetilde{A})=\{0\}, \forall \widetilde{A}\in H(A)$

3/ Tồn tại số $M>0$ hàm $f\in c_0^m(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\|x\|_{C^m}\le M(\|Lx\|_C+\|fx\|_{C^m}),\ \forall x\in C^m$$

ĐỊNH LÝ 2. Nếu toán tử L là d-chuẩn tắc thì phương trình

$$\widetilde{L}x=f,\ \forall \widetilde{L}\in H(L),\ f\in C,\ \text{ở đây}\ \ \widetilde{L}=\frac{d^m}{dt^m}+\widetilde{A}$$

có ít nhất một nghiệm trong C^m.

Chứng minh. Vì ImL là không gian con kín và không gian thương $C/_{\operatorname{Im}L}$ hữu hạn chiều, cho nên phần bù trực giao $(\operatorname{Im}L)^{\perp}$ là không gian con hữu hạn và tồn tại không gian W hữu hạn sao cho

$$C=\operatorname{Im}L\oplus W\quad [2]$$

Giả sử $g_1,g_2,...,g_m\in C, v_1,v_2,...,v_m\in(\operatorname{Im}L)^{\perp}$ những phần tử độc lập

Tuyến tính sao cho $v_i(g_j)=\delta_{ij}$ và

$$C=\operatorname{Im}L\oplus<g_1,g_2,...,g_m>$$

Do toán tử L giải chuẩn tắc nên phương trình

$$Lx=f-\sum_{i=1}^{m}v_i(f)g_i$$

có nghiệm x thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|x\|_{C^m}\le N\|f\|_C$$

trong đó N là hằng số không phụ thuộc vào f.

Ký hiệu x_k là nghiệm của phương trình:

$$Lx=(S(-\tau_k)f)-\sum_{i=1}^{m}v_i(S(-\tau_k)f)g_i$$

với f có giá hữu hạn. Khi đó hàm $y_k(t)=x_k(t+\tau_k)$ thỏa mãn phương trình:

$$(S(\tau_k)LS(-\tau_k))y=f-\sum_{i=1}^{m}v_i(S(-\tau_k)f)(S(\tau_k)g_i)$$

và ước lượng $\|y\|_{C^m}\le N\|f\|_C$.

Vì dãy hàm $(S(-\tau_k)f)(t)$ c-hội tụ đến 0 khi $k \to \infty(|\tau_k| \to \infty)$, nên $v_t(S(-\tau_k)f) \to 0(k \to \infty)$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử dãy (y_k) c-hội tụ trong C^m đến $y \in C^m$. Rõ ràng y thỏa mãn phương trình

$$\tilde{L}y = f$$

và ước lượng $\|y\|_{C^m} \le N\|f\|_C$

Cho $f \in C$ là hàm bất kỳ. Xét dãy hàm với $(\alpha_k f)(t) = \alpha(\frac{t}{k})f(t)$.

Còn $\alpha(t)$ là hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $0 \le \alpha(t) \le 1, \alpha(t) = 1 khi |t| \le 1, \alpha(t) = 0 khi |t| \ge 2$

Vì $\|\alpha_k f\|_C$ bị chặn, nên phương trình $\tilde{L}x = \alpha_k f$ có nghiệm x_k bị chặn trong C^m và c-giới hạn của (x_k) thuộc C^m và $\tilde{L}x = f$.

Từ định lý 1 và định lý 2 suy ra định lý sau:

ĐỊNH LÝ 3. Nếu toán tử L là FREDHOLM thì toán tử $\tilde{L}$ có toán tử ngược bị chặn $\tilde{L}^{-1} : C \to C^m, \forall \tilde{L} \in H(L)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Trần Hữu Bổng, (1992), *Về tính FREDHOLM của toán tử vi phân-hàm tuyến tính*, DAN, T.324, N.4, tr.757-759. (tiếng Nga)

[2]. X .G.Crây, (1971), *Phương trình tuyến tính trong không gian Bana*. M. (tiếng Nga)

Tóm tắt:

Điều kiện cần của tính Fredholm của toán tử vi phân hàm tuyến tính

Trong bài báo chúng tôi chứng minh điều kiện cần tính Fredholm của toán tử vi phân trong không gian các hàm liên tục trên trục số.

Abstract:

The necessary condition of the Fredholm of the linear functional differential operator

In this paper, we prove the necessary condition of the Fredholm of the linear functional – differential operator in the space of continium functions on the number ace.

CHỈNH HÓA BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MOMENT

ĐẶNG ĐỨC TRỌNG, PHẠM HOÀNG QUÂN*

I. MỞ ĐẦU

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt nhằm xác định phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu $t = 0$ từ phân bố nhiệt độ đo được tại thời điểm sau đó, chẳng hạn tại $t = 1$. Bài toán này còn có thể coi như một bài toán điều khiển: bài toán điều khiển phân bố nhiệt độ ban đầu ($t = 0$) để có thể nhận được phân bố nhiệt độ như ý muốn tại thời điểm $t = 1$. Đây là bài toán không chỉnh theo nghĩa là nó không luôn luôn tồn tại nghiệm và ngay cả khi nghiệm của bài toán tồn tại thì nó lại không phụ thuộc liên tục theo dữ kiện. Bài toán này được rất nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát. Chúng ta có thể tham khảo [1], trong đó ngoài các tài liệu trích dẫn phong phú, tác giả còn cho ta một cái nhìn tổng quan về các phương pháp khảo sát cũng như chỉ ra những vấn đề còn bỏ ngỏ của bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Trong [3], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa như là tổ hợp tuyến tính một số hữu hạn các hàm riêng của toán tử $-\Delta$. Trong [4], tác giả chỉnh hóa bài toán trong trường hợp tổng quát như là một phương trình vi phân trong không gian Hilbert trừu tượng, trong [6], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov, trong [2], tác giả đưa bài toán thành bài toán moment và chỉnh hóa bằng đa thức Legendre.

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ bằng cách chuyển về bài toán moment. Sau đó chúng tôi chỉnh hóa bằng cách sử dụng đa thức Müntz – Legendre áp dụng vào bài toán moment.

II. ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Cho dãy $\{x_n\}, \{y_m\} \subset \mathbb{R}$.

Xét phương trình nhiệt

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

---

* Khoa Toán – Tin, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM.

Ta xét bài toán tìm $u(x,y,0)=v(x,y)$ biết giá trị của u tại một dãy điểm $(x_n, y_m, 1)$.

Đặt

$$G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right\} \quad (2)$$

Tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(u\nabla G-G\nabla u)+\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu)=0$$

trên miền $-n<\xi<n, -n<\eta<n, 0<\tau<t-\varepsilon$ với $0<\varepsilon<t$, sau đó cho $n\to\infty$ và $\varepsilon\downarrow 0$, chúng ta nhận được

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,t,\xi,\eta,0)v(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (3)$$

Cho $t\to 1$, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4}\right]d\xi d\eta=4\pi u(x,y,1). \quad (4)$$

Gọi $N>e$ và đặt $D=[-\ln N,+\infty)\times[-\ln N,+\infty)$.

Giả sử $\operatorname{supp} v\subset D$.

Phương trình (4) trở thành

$$\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}v(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4}\right]d\xi d\eta=4\pi u(x,y,1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (5)$$

trong đó $u(x,y,1)$ là hàm giải tích theo x và y, được giả sử thuộc về $L^2(\mathbb{R}^2)$.

III. ĐƯA VỀ BÀI TOÁN MOMENT VÀ CHỈNH HÓA

Cho $x=x_n$ và $y=y_n$, $n,m\in\mathbb{N}$. Để bài toán đơn giản, ta xét

$$x_n=-2(1+\alpha_n),\ y_m=-2(1+\alpha_m).$$

Phương trình (5) suy ra

$$\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}v(\xi,\eta)e^{-\frac{(x_n-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}{4}}d\xi d\eta=4\pi u(x_n,y_m,1) \quad (6)$$

với n, m = 0, 1, 2, ...

Đặt $\xi=-\ln(Ns)$ và $\eta=-\ln(Nt)$, (6) trở thành

$$\int_0^1\int_0^1 v(-\ln(Ns),-\ln(Nt))e^{-\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}} s^{-\frac{x_n}{2}-1} t^{-\frac{y_m}{2}-1} dsdt$$

$$= 4\pi u(x_n, y_m, 1)e^{\frac{x_n^2+y_m^2}{4}}.N^{\frac{x_n+y_m}{2}} \tag{7}$$

Đặt $w(s,t) = v(-\ln(Ns),-\ln(Nt)).e^{-\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}}$ (8)

và $\mu_{mn} = 4\pi u(x_n, y_m, 1)e^{\frac{x_n^2+y_m^2}{4}}.N^{\frac{x_n+y_m}{2}}$ (9)

Từ (7)-(9), ta có :

$$\int_0^1\int_0^1 w(s,t)s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}dsdt = \mu_{mn}, \text{ với m, n = 0, 1, 2,...} \tag{10}$$

Xét phương trình

$$\int_0^1\int_0^1 w(s,t)s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}dsdt = \mu_{mn} \text{ với m,n = 0, 1, ..., r.} \tag{11}$$

Định lý 1

Với $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ *thì bài toán (10) có nhiều nhất một nghiệm.*

Chứng minh

Để chứng minh định lý, ta cần bổ đề sau

Bổ đề 1 *(xem chứng minh trong [5])*

Nếu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n+\frac{1}{2}}{\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \infty$ *và* $\alpha_i > -\frac{1}{2}$ $\forall i$ *thì* $\left\{s^{\alpha_n}\right\}$ *là họ đầy đủ trong C[0,1].*

Với $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ thì $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n+\frac{1}{2}}{\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \infty$, theo bổ đề 1, họ $\left\{s^{\alpha_n}\right\}$ đầy đủ trong $L^2(0,1)$ nên $\left\{s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\right\}$ đầy đủ trong $L^2((0,1)\times(0,1))$.

Nếu gọi w_1, w_2 là hai nghiệm của (11) thì

$$\left\langle w_1 - w_2, s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\right\rangle = 0 \quad \forall n,m = 0,1,2,...$$

trong đó < , > ký hiệu tích vô hướng trong $L^2((0,1)\times(0,1))$.

Do $\left\{s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\right\}$ đầy đủ trong $L^2((0,1)\times(0,1))$, ta có $w_1 = w_2$.

Định lý đã được chứng minh.

Bước đầu tiên ta trực chuẩn hóa họ $\left\{1, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2},...\right\}$ bởi đa thức Müntz – Legendre trong [5] được xác định bởi

$$L_n\left\{\alpha_0,...,\alpha_n\right\}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^{\alpha_k} \quad x\in(0,1] \tag{12}$$

với

$$a_{nk} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_j+1)}{\prod_{k\neq j=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)} \tag{13}$$

Đặt $L_n^* := \sqrt{1+2\alpha_n}L_n$ thì L_n^* là họ trực chuẩn hóa. (14)

Vậy $L_n^*\left\{\alpha_0,...,\alpha_n\right\}(x) = \sum C_{nk}x^{\alpha_k}$, với $C_{nk} = \sqrt{1+2\alpha_n}a_{nk}$. (15)

Bây giờ đặt $L_{mn}^*(st) = L_m^*(s)L_n^*(t)$. (16)

Từ tính đầy đủ của L_n^* trong $L^2(0,1)$ thì dãy L_{mn}^* là họ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2(I)$ với $I=(0,1)\times(0,1)$. Ta có

$$L_{mn}^*(st) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}s^{\alpha_l}t^{\alpha_k}.$$

Nếu $\mu = (\mu_{mn})$ là dãy số thực, ta định nghĩa

$$\lambda = \lambda(\mu) = (\lambda_{mn}) \quad m,n = 0,1,...$$

như sau

$$\lambda_{mn} = \lambda_{mn}(\mu) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}\mu_{lk}.$$

Bây giờ, đặt

$$p^r = p^r(\mu) = \sum_{m,n=0}^{r}\lambda_{mn}(\mu)L_{mn}^* \tag{17}$$

và

$$q^r(\xi,\eta) = e^{\frac{\xi^2+\eta^2}{4}}p^r\left(\frac{e^{-\xi}}{N},\frac{e^{-\eta}}{N}\right). \tag{18}$$

Định lý 2

Giả sử $v_0 \in L^2(D)$ *là nghiệm chính xác của (6) tương ứng dữ kiện chính xác* $f^0_{mn} = 4\pi u_0(x_n, y_m, 1)$ *ở vế phải của (6)*

Giả sử rằng dữ kiện đo đạc là $f_{mn} = 4\pi u(x_n, y_m, 1)$ *thỏa*

$$\sup_{m,n}\left|f_{mn} - f^0_{mn}\right| < \varepsilon \tag{20}$$

Thì tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε *của* v_0 *thỏa* $v_\varepsilon g \in L^2(D)$

và $\left\|g(v_\varepsilon - v_0)\right\|_{L^2(D)} \le N(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varphi(\varepsilon)})$ (21)

trong đó $\varphi(\varepsilon) \to 0$ *khi* $\varepsilon \to 0$, $g(\xi,\eta) = e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4} - \frac{\xi+\eta}{2}}$.

Chứng minh

Gọi w_0 là nghiệm chính xác của (10).

Để chứng minh định lý ta cần bổ đề sau đây

***Bổ đề 2** (Xem chứng minh trong [2])*

Cho dãy $\{\alpha_n\}$ *như trong định lý 1 và cho* $\mu = (\mu_{mn})$ *là dãy số thực. Thì điều kiện cần và đủ để (11) có nghiệm duy nhất* $w \in L^2(I)$ *là*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sum_{l,k=0}^{\infty} C_{ml}C_{nk}\mu_{lk}\right)^2 < \infty \tag{19}$$

trong đó C_{nk}, *k, n = 0, ... được xác định trong (15) nếu* $k \le n$ *và* $C_{nk} = 0$ *nếu* $n < k$.

Để bắt đầu chứng minh định lý, ta có

$$\left\|p^r(\mu) - w_0\right\|_{L^2(I)} \le \left\|p^r(\mu) - p^r(\mu^0)\right\|_{L^2(I)} + \left\|p^r(\mu^0) - w_0\right\|_{L^2(I)}. \tag{22}$$

Từ (17), ta nhận được

$$p^r(\mu) - p^r(\mu_0) = \sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}(\mu_{lk} - \mu^0_{lk})L^*_{mn}\right). \tag{23}$$

Suy ra

$$\left\|p^r(\mu) - p^r(\mu_0)\right\|^2_{L^2(I)} = \sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}(\mu_{lk} - \mu^0_{lk})\right)^2$$

$$\le \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}\left|C_{ml}\right|\right)^2\left(\sum_{k=0}^{n}\left|C_{nk}\right|\right)^2. \tag{24}$$

Từ (15), ta có

$$C_{nk} = \sqrt{1+2\alpha_n}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_j+1)}{\prod_{k\neq j=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)}$$

$$\leq \sqrt{1+2\alpha_n}\,\frac{3^n}{\prod_{k\neq j=0}^{n}\frac{(j-k)}{(j+1)(k+1)}}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n\,\frac{(k+1)^n(n+1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n\,\frac{(k+1)^n n!(n+1)k}{k!(n-k)!}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n(k+1)^n(n+1)k\binom{n}{k}$$

trong đó $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vậy

$$\sum_{k=0}^{n}\left|C_n^k\right| \leq 3^n\sqrt{3}(n+1)^{n+2}n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\leq 6^n\sqrt{3}(n+1)^{n+1}n \equiv h(n). \qquad (25)$$

Từ (24), (25) suy ra

$$\left\|p^r(\mu)-p^r(\mu_0)\right\|_{L^2(I)}^2 \leq \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}h^2(m).h^2(n)$$

$$\leq \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}3.6^{2(m+n)}(n+1)^{2(n+1)}(m+1)^{2(m+1)}nm$$

$$\leq 3\varepsilon^2 e^{16}(r+1)^{4(r-1)}r^2\left(\sum_{m=0}^{r}6^{2m}\right)^2$$

$$\leq \frac{3}{25}\varepsilon^2 e^{16}(r+1)^{4(r+1)}r^2 6^{4r}. \qquad (26)$$

Gọi $r(\varepsilon) = [r]+1$, trong đó r là nghiệm của phương trình

$$\frac{3}{25}e^{16}(r+1)^{4(r+1)}r^2 6^{4r} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{27}$$

Từ (26) và (27), ta nhận được

$$\left\| p^{r(\varepsilon)}(\mu) - p^{r(\varepsilon)}(\mu_0) \right\|^2_{L^2(I)} \le \varepsilon. \tag{28}$$

Đồng thời ta có

$$\left\| p^{r(\varepsilon)}(\mu_0) - w_0 \right\|^2_{L^2(I)} = \sum_{\max\{m,n\}\ge r(\varepsilon)}^{+\infty} \left(\sum_{l,k=0}^{\infty} C_{ml} C_{nk} \mu_{lk} \right)^2 \equiv \varphi(\varepsilon). \tag{29}$$

Chú ý rằng từ (19) và (27), khi $\varepsilon \to 0$ thì $r(\varepsilon) \to \infty$ và $\varphi(\varepsilon) \to 0$.

Từ (28) và (29), ta có :

$$\left\| p^{r(\varepsilon)}(\mu) - w_0 \right\|_{L^2(I)} \le \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varphi(\varepsilon)}. \tag{30}$$

Kết hợp với

$$\left\| p^{r(\varepsilon)} - w \right\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 \int_0^1 \left| p^{r(\varepsilon)}(s,t) - w(s,t) \right|^2 dsdt$$

$$= \frac{1}{N^2} \int_{-\ln N}^{+\infty} \int_{-\ln N}^{+\infty} \left[p^{r(\varepsilon)}\left(\frac{e^{-\xi}}{N}, \frac{e^{-\eta}}{N}\right) - w\left(\frac{e^{-\xi}}{N}, \frac{e^{-\eta}}{N}\right) \right]^2 e^{-(\xi+\eta)} d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{N^2} \int_{-\ln N}^{+\infty} \int_{-\ln N}^{+\infty} \left[q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta) - v(\xi,\eta) \right]^2 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2} - (\xi+\eta)} d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{N^2} \int_{-\ln N}^{+\infty} \int_{-\ln N}^{+\infty} \left[\left(q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta) - v(\xi,\eta) \right) g(\xi,\eta) \right]^2 d\xi d\eta.$$

Nếu đặt $v_\varepsilon(\xi,\eta) = q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta)$ với $(\xi,\eta) \in D$.

Từ đó

$$\left\| (v_\varepsilon - v_0) g \right\|_{L^2(D)} \le N(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varphi(\varepsilon)}) \tag{31}$$

Định lý đã được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] DANG DINH ANG, (1990), *On the backward parabolic equation: A critical survey of some current methods*, Nummerical Analysis and Mathematical Modelling, Warsaw, 509-515.

[2] D. D. ANG, R. GORENFLO, L. K. VY AND D. D. TRONG, (2002), *Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.

[3] DANG DINH ANG and DANG DINH HAI, (1990), *On the backward heat equation*, Annales, Polomici Mathematici, LII, 29-32.

[4] DANG DINH ANG, (1985), *Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution*, J. Math. Anal. Appl., 1, 148-155.

[5] PETER BORWEIN AND TAMAS ERDELYI, (1995), *Polynomials and polynomial Inequalities*, Graduate Texts in Mathematics, Springer – Verlag.

[6] NGUYEN CAM and PHAM HOANG QUAN, (5-1998), *Chỉnh hóa bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt*, Tạp chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Tập 1, 5-10.

[7] A. N. TIKHONOV and V. Y. ARSENIN, (1977), *Solutions of ill-posed problem*, Winston, Washington.

Abstract:

A MOMENT PROBLEM FROM THE BACKWARD HEAT EQUATION

We consider the problem of identifying the temperature at $t = 0$ from a countable sequence of the values at $t = 1$. Using the Müntz – Legendre polynomial, we shall regularize the problem. Error estimates will be given.