

Bài báo nghiên cứu

TÍCH CỦA CÁC MA TRẬN ĐỐI HỢP TRONG NHÓM VERSHIK–KEROV

Nguyễn Phú Thịnh*, Nguyễn Anh Sỹ, Trịnh Quốc Huy

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Nguyễn Phú Thịnh – Email: npt19112004@gmail.com

Ngày nhận bài: 28-02-2025; Ngày nhận bài sửa: 17-4-2025; Ngày duyệt đăng: 13-5-2025

TÓM TẮT

Cho F là một trường tùy ý. Ký hiệu $SL_{VK,\infty}(F)$ là nhóm tất cả các ma trận vô hạn có dạng

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

trong đó A là một ma trận cấp $n \times n$ có định thức bằng 1 với n là một số nguyên dương nào đó và T là một ma trận tam giác trên vô hạn có các hệ số trên đường chéo chính bằng 1. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng mọi ma trận trong $SL_{VK,\infty}(F)$ đều có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp. Kết quả này của chúng tôi đã giải quyết được Vấn đề 8 trong bài báo của Nguyen (2024).

Từ khóa: hoán tử; ma trận hoán tử; ma trận vô hạn; ma trận đối hợp; ma trận tam giác trên; nhóm Vershik–Kerov

1. Giới thiệu

Cho F là một trường và n là một số nguyên dương. Ký hiệu $GL_n(F)$ và $SL_n(F)$ lần lượt là nhóm tuyến tính tổng quát và nhóm tuyến tính đặc biệt bậc n trên trường F . Vành các ma trận tam giác trên vô hạn trên F được ký hiệu là $T_\infty(F)$. Nhóm nhân tất cả các ma trận trong $T_\infty(F)$ có các hệ số trên đường chéo chính bằng 1 được ký hiệu là $UT_\infty(F)$. Nhóm Vershik–Kerov trên trường F , ký hiệu là $GL_{VK,\infty}(F)$, được định nghĩa là nhóm các ma trận vô hạn khả nghịch có hữu hạn hệ số khác 0 bên dưới đường chéo chính. Dễ thấy mọi ma trận A trong $GL_{VK,\infty}(F)$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Cite this article as: Nguyen, P. T., Nguyen, A. S., & Trinh, Q. H. (2025). Products of involutions in the Vershik-Kerov group. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 22(10), 1867-1873. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.10.4764\(2025\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.10.4764(2025))

trong đó $A \in GL_n(F)$ với n là một số nguyên dương nào đó và $T \in T_\infty(F)$. Ta kí hiệu $SL_{VK,\infty}(F)$ là nhóm con của nhóm $GL_{VK,\infty}(F)$ gồm tất cả các ma trận có dạng (1), trong đó $A \in SL_n(F)$ và $T \in UT_\infty(F)$. Nhóm con này còn được gọi là nhóm Vershik-Kerov đặc biệt trên trường F .

Một phần tử trong một nhóm được gọi là một phần tử đối hợp nếu nghịch đảo của nó bằng chính nó. Bài toán tìm điều kiện cần và đủ để một phần tử là tích của các phần tử đối hợp là một chủ đề thú vị của nhiều nghiên cứu và có một lịch sử lâu đời. Đặc biệt, người ta quan tâm đến việc phân tích các phần tử trong các nhóm ma trận thành tích của các ma trận đối hợp đã thu hút nhiều sự chú ý hơn từ các nhà toán học. Vào năm 2019, X. Hou đã chứng minh được rằng mọi ma trận trong nhóm Vershik-Kerov đặc biệt trên một trường có đặc số khác 2 luôn có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất hai hoán tử của các ma trận đối hợp trong $GL_{VK,\infty}(F)$. Rõ ràng mỗi hoán tử của các ma trận đối hợp là tích của hai ma trận đối hợp. Như một hệ quả, mọi ma trận trong nhóm Vershik-Kerov đặc biệt trên một trường có đặc số khác 2 luôn có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp. Trong một bài nghiên cứu gần đây, Nguyen (2024) đã đặt ra một vấn đề mở như sau:

Vấn đề 1.1. (Nguyen, 2024) Cho F là một trường tùy ý. Mọi ma trận trong $SL_{VK,\infty}(F)$ có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp không?

Trong bài báo này, chúng tôi đã đưa ra được câu trả lời cho Vấn đề 1.1 ở trên. Kết quả chính được chúng tôi phát biểu như sau:

Định lí 1.2. Cho F là một trường tùy ý. Khi đó, mọi ma trận trong nhóm $SL_{VK,\infty}(F)$ đều có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp.

2. Chứng minh kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày chứng minh của Định lí 1.2. Đầu tiên, chúng ta dễ dàng kiểm tra được hai nhận xét quan trọng sau đây.

Nhận xét 2.1. Cho G là một nhóm tùy ý, g, x là các phần tử trong G và r là một số nguyên dương. Nếu g là tích của r phần tử đối hợp trong G thì phần tử liên hợp $g^x = xgx^{-1}$ cũng là tích của r phần tử đối hợp trong G .

Chứng minh. Giả sử g là tích của r phần tử đối hợp trong G . Khi đó, ta có thể viết

$$g = g_1 g_2 \dots g_r,$$

trong đó $g_1, g_2, \dots, g_r$ là các phần tử đối hợp trong G . Ta thấy rằng

$$g^x = xgx^{-1} = x(g_1 g_2 \dots g_r)x^{-1} = (xg_1 x^{-1})(xg_2 x^{-1}) \dots (xg_r x^{-1})$$

là tích của r phần tử đối hợp trong G . Thật vậy, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, ta có

$$(xg_i x^{-1})^2 = (xg_i x^{-1})(xg_i x^{-1}) = xg_i^2 x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Suy ra xg_ix^{-1} là các phần tử đối hợp và do đó, g^x là tích của r phần tử đối hợp.

Nhận xét 2.2. Cho hai nhóm G_1, G_2 và hai số nguyên dương k, l . Nếu g_1 là tích của k phần tử đối hợp trong G_1 , g_2 là tích của l phần tử đối hợp trong G_2 thì (g_1, g_2) là tích của $\max\{k, l\}$ phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$.

Chứng minh. Giả sử g_1 là tích của k phần tử đối hợp trong G_1 và g_2 là tích của l phần tử đối hợp trong G_2 . Khi đó, ta có thể viết

$$g_1 = g_{11}g_{12} \cdots g_{1k} \text{ và } g_2 = g_{21}g_{22} \cdots g_{2l}$$

Đặt $m = \max\{k, l\}$. Ta xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $k = l = m$. Ta có phân tích

$$g_1 = g_{11}g_{12} \cdots g_{1m} \text{ và } g_2 = g_{21}g_{22} \cdots g_{2m},$$

với $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1m}$ là các phần tử đối hợp trong G_1 , $g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2m}$ là các phần tử đối hợp trong G_2 . Khi đó, ta có

$$(g_1, g_2) = (g_{11}g_{12} \cdots g_{1m}, g_{21}g_{22} \cdots g_{2m}) = (g_{11}, g_{21})(g_{12}, g_{22}) \cdots (g_{1m}, g_{2m})$$

là tích của m phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$. Thật vậy, với mọi phần tử đối hợp $x \in G_1$ và phần tử đối hợp $y \in G_2$, ta có

$$(x, y)^2 = (x, y)(x, y) = (x^2, y^2) = (1, 1)$$

và do $(1, 1)$ là phần tử đơn vị của $G_1 \oplus G_2$ nên (x, y) là phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$. Do đó, $(g_{11}, g_{21}), (g_{12}, g_{22}), \dots, (g_{1m}, g_{2m})$ là các phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$. Vậy (g_1, g_2) là tích của m phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$.

Trường hợp 2: $k < l$. Khi đó $l = m$. Ta đặt $g_{1i} = 1$ với mỗi $i \in \{k+1, \dots, m\}$. Khi đó, ta có phân tích

$$g_1 = g_{11}g_{12} \cdots g_{1m} \text{ và } g_2 = g_{21}g_{22} \cdots g_{2m},$$

với $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1m}$ là các phần tử đối hợp trong G_1 , $g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2m}$ là các phần tử đối hợp trong G_2 . Áp dụng Trường hợp 1, ta có (g_1, g_2) là tích của m phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$.

Trường hợp 3: $k > l$. Hoàn toàn tương tự hai trường hợp trên, ta suy ra (g_1, g_2) là tích của m phần tử đối hợp trong $G_1 \oplus G_2$.

Để chứng minh kết quả chính của bài báo này, chúng tôi cần mượn lại định lý quan trọng dưới đây của Hou và Zheng (2017)

Định lý 2.3. (Hou et al., 2017) Cho R là một vành có đơn vị là 1. Khi đó, mỗi ma trận trong nhóm $UT_{\infty}(R)$ và $UT_n(R)$ đều có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp.

Ngoài ra, chúng tôi cũng cần sử dụng thêm một kết quả về tích của các ma trận đối hợp trong nhóm $GL_n(F)$ của Gustafson và cộng sự (1976).

Định lý 2.4. (Gustafson et al. 1976) Cho F là một trường tùy ý. Khi đó, mỗi ma trận vuông trên trường F , có định thức bằng ± 1 , là tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp.

Bổ đề tiếp theo được lấy từ bài báo của Hou (2019) sẽ chỉ ra một điều kiện đủ để hai ma trận đồng dạng với nhau trong nhóm Vershik-Kerov. Trong bài báo này, chứng minh của bổ đề có một số sai sót không ảnh hưởng đến kết quả. Do đó, chúng tôi sẽ trình bày lại chứng minh của bổ đề một cách chính xác hơn.

Bổ đề 2.5. (Hou, 2019) Giả sử F là một trường tùy ý. Cho $A \in GL_n(F)$ sao cho 1 không phải là giá trị riêng của A , và T là một ma trận trong nhóm $UT_{\infty}(F)$. Trong nhóm Vershik-Kerov, mọi ma trận có dạng $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$ đều đồng dạng với ma trận $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$.

Chứng minh. Trong nhóm Vershik-Kerov, xét ma trận $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix} \in SL_{VK,\infty}(F)$ bất kì. Ta có:

$$\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_{\infty} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_{\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XT \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Ta cần chứng minh $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$ đồng dạng với ma trận $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, nghĩa là ta cần tìm một ma trận X phù hợp thỏa mãn phương trình $AX - XT = B$. Thật vậy, xét ma trận $X = [x_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j$) trong đó $x_{i,j} \in F$ là phần tử của ma trận X tại hàng i , cột j . Ta có X thỏa mãn phương trình $AX - XT = B$ nếu và chỉ nếu X thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_{k,j} - \sum_{k=1}^{+\infty} x_{i,k} t_{k,j} = b_{ij} \quad (2) \text{ với } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, +\infty},$$

trong đó $a_{i,j}, b_{i,j}, t_{i,j}$ lần lượt là phần tử của các ma trận A, B, T tại hàng i , cột j . Mà ta lại có T là một ma trận tam giác trên vô hạn có các hệ số trên đường chéo chính bằng 1, nghĩa là

$$t_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i > j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}.$$

Khi đó với F là trường ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_{k,j} - x_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-1} x_{i,k} t_{k,j} + b_{i,j} \quad (3) \quad \text{với } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, +\infty}.$$

Vì 1 không là giá trị riêng của A nên $A - I$ là ma trận khả nghịch trong $GL_n(F)$. Do đó, nếu cố định j và cho i chạy thì hệ phương trình (3) luôn có nghiệm là $x_{k,j}$. Bằng phương pháp quy nạp theo j , ta có thể giải được từng cột của X .

Vậy ta luôn tìm được một ma trận X thỏa mãn phương trình $AX - XT = B$ hay nói cách khác $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$ đồng dạng với ma trận $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$.

Bổ đề 2.6. (Bổ đề Fitting) Cho $\mathcal{R}$ là một vành có đơn vị. Xét M là một $\mathcal{R}$ -module và $\varphi: M \rightarrow M$ là một đồng cấu $\mathcal{R}$ -module

(a) Nếu M là noether thì tồn tại một số nguyên dương n sao cho $M = \ker \varphi^n \cap \operatorname{im} \varphi^n$.

(b) Nếu M là artin thì tồn tại một số nguyên dương n sao cho $M = \ker \varphi^n + \operatorname{im} \varphi^n$.

(c) Nếu M là module có độ dài hữu hạn thì tồn tại một số nguyên dương n sao cho $M = \ker \varphi^n \oplus \operatorname{im} \varphi^n$.

Hệ quả 2.7. Cho $M_n(F)$ là vành các ma trận $n \times n$ với các phần tử thuộc trường F . Với mỗi ma trận $X \in M_n(F)$, tồn tại một số nguyên $0 \leq k \leq n$ và các ma trận $Y \in M_k(F)$, $Z \in M_{n-k}(F)$ sao cho Y khả nghịch, Z lũy linh, và X đồng dạng với ma trận đường chéo khối $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$.

Cuối cùng, chúng tôi sẽ kết thúc bằng việc chứng minh Định lý 1.2.

Chứng minh Định lý 1.2. Lấy M là một ma trận trong nhóm $SL_{VK, \infty}(F)$. Khi đó, ta có thể biểu diễn

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

trong đó, $M_1 \in SL_n(F)$ với số tự nhiên n nào đó và $M_3 \in UT_{\infty}(F)$. Áp dụng Hệ quả 2.7 cho ma trận $M_1 - I_n$, tồn tại một số nguyên $0 \leq k \leq n$ và các ma trận $Y \in M_k(F)$, $Z \in M_{n-k}(F)$,

$P_1 \in GL_n(F)$ sao cho Y khả nghịch, Z lũy linh và $M_1 - I_n$ đồng dạng ma trận $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$. Do

Z là ma trận lũy linh nên Z đồng dạng với ma trận D là ma trận tam giác trên có các phần tử trên đường chéo chính bằng không nào đó. Điều này dẫn đến ma trận $M_1 - I_n$ đồng dạng

với ma trận $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, nghĩa là tồn tại ma trận khả nghịch P_1 sao cho

$P_1^{-1}(M_1 - I_n)P_1 = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Biến đổi lại, ta được $P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ với $A = Y + I_k$,

$T_1 = D + I_{n-k}$. Do $A = Y + I_k$ nên $A - I_k = Y$ và do Y là ma trận khả nghịch nên $\det(A - I_k) \neq 0$ hay ma trận A không nhận 1 làm giá trị riêng. Mặt khác, do $T_1 = D + I_{n-k}$ và D là ma trận tam giác trên có các phần tử trên đường chéo chính bằng không nên $T_1 \in \text{UT}_{n-k}(F)$. Ta có $\det(P_1^{-1}M_1P_1) = \det A \cdot \det T_1$ và do $\det M_1 = \det T_1 = 1$ nên $\det A = 1$. Xét

ma trận $P = \text{Diag}(P_1, I_\infty)$. Khi đó, ta có $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$ là ma trận thỏa các điều kiện trong

Bổ đề 2.5 Do đó, mọi ma trận trong nhóm Vershik – Kerov đặc biệt đều đồng dạng với ma trận có dạng $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, trong đó A là ma trận vuông hữu hạn có định thức bằng một và T là ma trận thuộc nhóm $\text{UT}_\infty(F)$. Theo Định lý 2.3 và Định lý 2.4, cả A và T đều là tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp và do đó, theo Nhận xét 2.2, tổng trực tiếp của A và T (một đồng dạng của M) cũng là tích của bốn ma trận đối hợp. Theo Nhận xét 2.1, ta suy ra M là tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp.

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng mọi ma trận trong nhóm Vershik-Kerov đặc biệt trên một trường F tùy ý đều có thể biểu diễn được thành tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp. Kết quả này của chúng tôi đã giải quyết được một bài toán mở được đặt ra trong bài báo của Nguyen (2024).

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Nguyen, T. T. H. (2024). A survey of lengths of linear groups with respect to certain generating sets. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 39(2), 279-302. <https://doi.org/10.4134/CKMS.c230058>
- Gustafson, W. H., Halmos, P. R., & Radjavi, H. (1976). Products of involutions. *Linear Algebra and Its Applications*, 13, 157-162.
- Hou, X., Li, S., & Zheng, Q. (2017). Expressing infinite matrices over rings as products of involutions. *Linear Algebra and Its Applications*, 532, 257-265.
- Hou, X. (2019). Decomposition of infinite matrices into products of commutators of involutions. *Linear Algebra and Its Applications*, 563, 231-239. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.11.001>

PRODUCTS OF INVOLUTIONS IN THE VERSHIK-KEROV GROUP

Nguyen Phu Thinh, Nguyen Anh Sy, Trinh Quoc Huy*

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Phu Thinh – Email: npt19112004@gmail.com*

Received: February 28, 2025; Revised: April 17, 2025; Accepted: May 13, 2025

ABSTRACT

Let F be an arbitrary field. Denote by $SL_{VK,\infty}(F)$ the group of all infinite matrices of the form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

where A is an $n \times n$ matrix with determinant 1 for some positive integer n , and T is an infinite upper triangular matrix with all diagonal entries equal to 1. In this paper, we prove that every matrix in $SL_{VK,\infty}(F)$ can be expressed as the product of at most four commutators. This result provides a solution to Problem 8 in Nguyen (2024).

Keywords: Commutator; Commutator matrix; Infinite matrix; Upper triangular matrix; Vershik–Kerov group