



Bài báo nghiên cứu

NHÓM CON CỦA NHÓM TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT LỆCH TRÊN VÀNH CHIA QUATERNION THỰC

Lê Văn Chua

Trường Đại học An Giang – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Lê Văn Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Ngày nhận bài: 15-3-2025; ngày nhận bài sửa: 02-4-2025; ngày duyệt đăng: 03-4-2025

TÓM TẮT

Cho H là vành chia quaternion thực và n là một số nguyên dương. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng mọi nhóm con có chỉ số hữu hạn trong nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ là chuẩn tắc không trung tâm và nó chứa nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$. Chúng tôi cũng chứng minh rằng mọi nhóm con thực sự của $SL_n(H)$ đều có chỉ số vô hạn, và rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$ là T -nhóm và nó là nhóm con chuẩn tắc của $GL_n(H)$.

Từ khóa: vành chia quaternion thực; nhóm con có chỉ số hữu hạn; nhóm con á chuẩn tắc

1. Giới thiệu

Cho G là nhóm. Ta biết rằng các nhóm con có chỉ số 2 đều là nhóm con chuẩn tắc của G . Nhóm đối xứng S_3 chứa nhóm con $\langle (12) \rangle$ có chỉ số hữu hạn 3, nhưng nó không là nhóm con chuẩn tắc của S_3 . Với một trường vô hạn F và một số tự nhiên $n \geq 2$, nhóm tuyến tính đặc biệt $SL_n(F)$ là nhóm con chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát $GL_n(F)$ và $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*$, trong đó F^* là nhóm nhân của trường F . Do đó, $SL_n(F)$ có chỉ số vô hạn trong $GL_n(F)$. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc các nhóm con có chỉ số hữu hạn trong nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ trên vành chia quaternion thực H . Chúng tôi chứng minh rằng mọi nhóm con có chỉ số hữu hạn trong $GL_n(H)$ đều là nhóm con chuẩn tắc không trung tâm, và nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$ là nhóm

Cite this article as: Le, V. C. (2025). Subgroups of the skew general linear group over the division ring of real quaternions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 22(4), 603-609. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.4.4806\(2025\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.4.4806(2025))

con chuẩn tắc có chỉ số vô hạn trong $GL_n(H)$ và $GL_n(H)/SL_n(H) \cong \mathbb{R}^*$. Chúng tôi cũng chứng minh rằng, mọi nhóm con thực sự của $SL_n(H)$ đều có chỉ số vô hạn trong $SL_n(H)$. Nhắc lại rằng, một nhóm con A của nhóm G được gọi là *á chuẩn tắc* nếu tồn tại một dãy tăng hữu hạn các nhóm con $(A_i)_{0 \leq i \leq k}$ của G sao cho $A = A_0, A_k = G, A_i \triangleleft A_{i+1}$. Tất nhiên, mọi nhóm con chuẩn tắc trong G đều là á chuẩn tắc. Nhóm đối xứng S_4 chứa nhóm con á chuẩn tắc $\langle (12) \rangle$, nhưng nó không là chuẩn tắc trong S_4 . Một nhóm G được gọi là *T-nhóm* nếu mọi nhóm con á chuẩn tắc của G đều là chuẩn tắc. Một câu hỏi nổi tiếng được đưa ra bởi Herstein và Scott (1963) rằng: *nhóm nhân của một vành chia là T-nhóm?* Trong năm 1978, Greenfield (1978) đã trả lời cho câu hỏi này. Greenfield (1978) chứng minh câu hỏi này đúng cho nhóm nhân của vành chia quaternion thực, và câu hỏi này không đúng cho đại số chia có chiều hữu hạn trên một trường p -địa phương với p là số nguyên tố lẻ. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ đều là T-nhóm. Đặc biệt, các nhóm $GL_n(H)$ và $SL_n(H)$ là các T-nhóm. Cho $H = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ là vành chia quaternion thực với

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ijk = -1.$$

Ta biết rằng H là đại số chia trên $\mathbb{R}$ và $\dim_{\mathbb{R}} H = 4$ với cơ sở $\{1, i, j, k\}$ và tâm $Z(H) = \mathbb{R}$.

Giả sử $\alpha = a + bi + cj + dk \in H, \bar{\alpha} = a - bi - cj - dk \in H$, và

$$N(\alpha) = \alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}.$$

Ta có $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ với mọi $\alpha, \beta \in H$. Tập con $G_0 = \{\alpha \in H \mid N(\alpha) = 1\}$ là nhóm con của nhóm nhân H^* của vành chia quaternion thực H . Một số kí hiệu và kết luận trên cấu trúc nhóm con của H^* có thể tham khảo trong bài báo Le (2019) và Greenfield (1978).

2. Nội dung

2.1. Nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$

Trong mục này, chúng tôi chứng minh rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát lệch trên vành chia quaternion thực là T-nhóm và do đó nó là nhóm con chuẩn tắc.

Nhắc lại rằng, một nhóm con A của một nhóm G được gọi là nhóm con trung tâm của G nếu $A \leq Z(G)$, trong đó $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga, \forall g \in G\}$ là tâm của G .

Bổ đề 2.1. Cho H là vành chia quaternion thực. Khi đó, G_0 là một nhóm con chuẩn tắc của nhóm nhân H^* và nhóm thương $H^*/G_0 \cong \mathbb{R}^*$.

Chứng minh. Ta xét ánh xạ $\varphi: H^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ cho bởi $\varphi(\alpha) = N(\alpha)$. Dễ dàng kiểm tra được φ là một toàn cấu nhóm với hạt nhân $\text{Ker } \varphi = G_0$. Do đó, G_0 là một nhóm con chuẩn tắc của H^* và nhóm thương $H^*/G_0 \cong \mathbb{R}^*$.

Định lý 2.2. (Greenfield, 1978) Cho H là vành chia quaternion thực. Khi đó,

(i) $A \triangleleft G_0$ nếu và chỉ nếu $A = G_0$, $\langle 1 \rangle$ hoặc $\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$.

(ii) Tâm $Z(G_0) = \langle -1 \rangle$.

(iii) $G \triangleleft H^*$ nếu và chỉ nếu $G \leq \mathbb{R}^*$ hoặc $G_0 \leq G$.

(iv) Nếu $A \triangleleft G$ và $G \triangleleft H^*$ thì $A \triangleleft H^*$.

Hệ quả 2.3. Cho H là vành chia quaternion thực. Khi đó,

$$G_0 = [H^*, H^*] = [H^*, G_0] = [G_0, G_0].$$

Chứng minh. Ta có nhóm con hoán tử

$$[G_0, G_0] \leq [H^*, G_0] \leq [H^*, H^*] \triangleleft H^*.$$

Nếu $[H^*, H^*] \leq \mathbb{R}^*$ thì $[H^*, H^*]$ là aben. Do đó, H^* là nhóm giải được. Bởi một định lý của Hua (1950), H là trường, mâu thuẫn. Ta kết luận rằng nhóm con hoán tử $[H^*, H^*]$ là nhóm con chuẩn tắc không trung tâm của H^* . Khi đó, bởi Định lý 2.2, $G_0 \leq [H^*, H^*]$. Mặt khác, bởi Bổ đề 1, ta suy ra rằng nhóm thương H^*/G_0 là aben, và do đó $[H^*, H^*] \leq G_0$, kéo theo $[H^*, H^*] = G_0$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $G_0 \leq [G_0, G_0]$. Thật vậy, ta có $[G_0, G_0] \triangleleft G_0$ và $G_0 \triangleleft H^*$. Bởi Định lý 2.2, $[G_0, G_0] \triangleleft H^*$, và do đó $[G_0, G_0] \leq \mathbb{R}^*$ hoặc $G_0 \leq [G_0, G_0]$. Nếu $[G_0, G_0] \leq \mathbb{R}^*$ thì G_0 là giải được. Bởi Bổ đề 1, kéo theo H^* là giải được, mâu thuẫn. Vì vậy, $G_0 \leq [G_0, G_0] \leq G_0$ và $G_0 = [H^*, H^*] = [H^*, G_0] = [G_0, G_0]$.

Mệnh đề 2.4. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó,

(i) $[GL_n(H), GL_n(H)] = [GL_n(H), SL_n(H)] = [SL_n(H), SL_n(H)] = SL_n(H)$.

(ii) $GL_n(H)/SL_n(H) \cong H^*/[H^*, H^*] = H^*/G_0 \cong \mathbb{R}^*$.

(iii) $Z(GL_n(H)) = \mathbb{R}^* I_n = \{rI_n \mid r \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$.

(iv) $Z(SL_n(H)) = \{I_n, -I_n\} \cong Z(G_0)$.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ Bổ đề 2.1, Hệ quả 2.3 và Draxl (2007).

Mệnh đề 2.5. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Giả sử G là một nhóm con không trung tâm của nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$. Khi đó, G là nhóm con chuẩn tắc của $GL_n(H)$ nếu và chỉ nếu G chứa $SL_n(H)$.

Chứng minh. Kết luận suy ra từ Định lý 2.2 và Artin (2016).

Định lý 2.6. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Nếu G là một nhóm con á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ thì G là T -nhóm. Đặc biệt, $GL_n(H)$ và $SL_n(H)$ là T -nhóm.

Chứng minh. Bởi Định lý 2.2, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $n \geq 2$. Giả sử A là nhóm con á chuẩn tắc của G . Ta sẽ chứng minh A là nhóm con chuẩn tắc của G . Thật vậy, theo giả thiết G là nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$, suy ra A là nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$. Khi đó tồn tại một dãy hữu hạn các nhóm con $(A_i)_{0 \leq i \leq r}$ của $GL_n(H)$ sao cho $A = A_0$, $A_i = GL_n(H)$, $A_i \triangleleft A_{i+1}$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo r . Tất nhiên, kết luận của định lý là đúng với $r = 1$. Giả sử $r \geq 2$. Ta chú ý rằng A_1 là nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$. Theo giả thiết quy nạp, A_1 là nhóm con chuẩn tắc của $GL_n(H)$. Bởi Mệnh đề 5, $A_1 \leq Z(GL_n(H))$ hoặc $SL_n(H) \leq A_1$. Nếu $A_1 \leq Z(GL_n(H))$, thì $A \leq Z(GL_n(H))$, và do đó $A \triangleleft GL_n(H)$. Vì vậy, ta có thể giả sử rằng $SL_n(H) \leq A_1$. Với mọi $x \in SL_n(H)$, ta có $x \in A_1$. Vì $A \triangleleft A_1$, $xAx^{-1} \subseteq A$. Bởi Artin (2016), $A \supseteq SL_n(H) = [GL_n(H), GL_n(H)]$. Do đó, $A \triangleleft GL_n(H)$. Cả hai trường hợp đều dẫn đến kết luận rằng A là nhóm con chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$, và do đó A là nhóm con chuẩn tắc của G . Ta kết luận rằng G là T -nhóm. Định lý được chứng minh.

2.2. Nhóm con có chỉ số hữu hạn trong $GL_n(H)$

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh mọi nhóm con có chỉ số hữu hạn trong nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ là nhóm con chuẩn tắc không trung tâm của $GL_n(H)$, và do đó nó chứa nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$.

Mệnh đề 2.7. Cho H là vành chia quaternion thực. Khi đó

(i) $[H^*, H^*] = G_0$ có chỉ số vô hạn trong H^* .

(ii) Tâm $Z(H^*) = \mathbb{R}^*$ có chỉ số vô hạn trong H^* .

Chứng minh. (i) được suy ra từ Bổ đề 2.1 và Hệ quả 2.3.

(ii) Giả sử $Z(H^*) = \mathbb{R}^*$ có chỉ số hữu hạn k trong H^* . Với mọi $\alpha \in H^*$, ta có $\alpha^k \in \mathbb{R}^*$.

Bởi một định lý của Kaplansky (1951), H là trường, mâu thuẫn. Do đó, $\mathbb{R}^*$ có chỉ số vô hạn trong H^* .

Bổ đề 2.8. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$ là vô hạn.

Chứng minh. Với $n = 1$, $SL_1(H) = [H^*, H^*] = G_0$. Nếu $SL_1(H)$ là hữu hạn, thì từ một kết luận của Zalesskii (1965), ta có $SL_1(H) \leq \mathbb{R}^*$. Điều này suy ra rằng H^* là nhóm giải được. Bởi một định lý của Hua (1950), H là trường, mâu thuẫn. Do đó $SL_1(H)$ là nhóm vô hạn. Bây giờ, ta giả sử $n \geq 2$. Khi đó, bởi Shirvani & Wehrfritz (1986), $SL_n(H)$ chứa một nhóm con tự do không cyclic L . Chú ý rằng, các nhóm tự do luôn là nhóm vô hạn. Từ kết luận này, ta suy ra rằng $SL_n(H)$ là nhóm vô hạn.

Bổ đề 2.9. Cho A là một nhóm con của một nhóm G . Nếu A có chỉ số hữu hạn trong G thì A chứa một nhóm con chuẩn tắc B của G sao cho B có chỉ số hữu hạn trong G .

Chứng minh. Lấy $B = A_G = \bigcap_{g \in G} gAg^{-1}$ là lõi của A trong G .

Định lý 2.10. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, mọi nhóm con có chỉ số hữu hạn của nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ là chuẩn tắc không trung tâm của $GL_n(H)$ và do đó nó chứa nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$.

Chứng minh. Giả sử A là một nhóm con có chỉ số hữu hạn trong $GL_n(H)$. Nếu $A \leq Z(GL_n(H))$, thì $GL_n(H)/Z(GL_n(H))$ là hữu hạn. Khi đó, bởi một định lý của Schur (1904), nhóm con hoán tử $[GL_n(H), GL_n(H)]$ là hữu hạn. Bởi Mệnh đề 2.4, nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$ là hữu hạn, mâu thuẫn với Bổ đề 2.8. Vì vậy, ta kết luận rằng A là nhóm con không trung tâm của $GL_n(H)$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh A là nhóm con chuẩn tắc của $GL_n(H)$. Thật vậy, bởi Bổ đề 2.9, A chứa một nhóm con chuẩn tắc B của $GL_n(H)$ sao cho B có chỉ số hữu hạn trong $GL_n(H)$. Do đó, bởi Mệnh đề 2.5, $B \leq Z(GL_n(H))$ hoặc $SL_n(H) \leq B$. Nếu $B \leq Z(GL_n(H))$, thì nhóm thương $GL_n(H)/Z(GL_n(H))$ là hữu hạn. Bằng cách chứng minh tương tự như đoạn trước, ta sẽ có

một mâu thuẫn. Vì vậy, $[GL_n(H), GL_n(H)] = SL_n(H) \leq B \leq A$. Điều này chứng tỏ rằng A là nhóm con chuẩn tắc của $GL_n(H)$ và $SL_n(H) \leq A$.

Kết luận dưới đây được suy ra từ Định lý 2.10 và Định lý Cartan-Brauer-Hua.

Hệ quả 2.11. Nhóm nhân $\mathbb{C}^*$ của trường số phức $\mathbb{C}$ không chuẩn tắc và cũng không có chỉ số hữu hạn trong nhóm nhân H^* của vành chia quaternion thực H .

Định lý 2.12. Cho H là vành chia quaternion thực và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, mọi nhóm con thực sự của nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$ đều có chỉ số vô hạn trong $SL_n(H)$.

Chứng minh. Giả sử A là nhóm con thực sự của $SL_n(H)$. Nếu A có chỉ số hữu hạn trong $SL_n(H)$, thì tồn tại một nhóm con chuẩn tắc B của $SL_n(H)$ sao cho B có chỉ số hữu hạn trong $SL_n(H)$ và $B \leq A \leq SL_n(H)$ bởi Bổ đề 2.9. Bởi vì $B \triangleleft SL_n(H)$, suy ra rằng B là nhóm con á chuẩn tắc của $GL_n(H)$. Do đó, bởi Định lý 2.6, $B \triangleleft GL_n(H)$. Bởi Mệnh đề 2.5, $B \leq Z(GL_n(H))$ hoặc $SL_n(H) \leq B$. Nếu $B \leq Z(GL_n(H))$ thì

$$B \leq Z(GL_n(H)) \cap SL_n(H) \leq Z(SL_n(H)).$$

Điều này dẫn đến nhóm $SL_n(H)/Z(SL_n(H))$ là hữu hạn. Bởi một định lý của Schur (1904), nhóm con hoán tử $[SL_n(H), SL_n(H)] = SL_n(H)$ là hữu hạn, mâu thuẫn với Bổ đề 2.8. Do đó, ta có kết luận rằng $SL_n(H) \leq B \leq A \leq SL_n(H)$. Điều này suy ra $A = SL_n(H)$, mâu thuẫn. Do đó, A có chỉ số vô hạn trong $SL_n(H)$. Định lý được chứng minh.

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã nghiên cứu cấu trúc của nhóm con á chuẩn tắc của các nhóm tuyến tính tổng quát lệch trên vành chia của quaternion thực. Chúng tôi chứng minh rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát lệch trên vành chia quaternion thực là T-nhóm và do đó nó là nhóm con chuẩn tắc. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng nghiên cứu cấu trúc của nhóm con có chỉ số hữu hạn của nhóm tuyến tính tổng quát lệch trên vành chia của quaternion thực. Chúng tôi đã chứng minh mọi nhóm con có chỉ số hữu hạn trong nhóm tuyến tính tổng quát lệch $GL_n(H)$ là nhóm con chuẩn tắc không trung tâm của $GL_n(H)$, và do đó nó chứa nhóm tuyến tính lệch đặc biệt $SL_n(H)$.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Artin, E. (2016). *Geometric algebra* (Unabridged republication of the work originally published in 1957 by Interscience Publishers). Dover Publications.
- Draxl, P. (2007). *Skew fields* (London Mathematical Society Lecture Note Series). Cambridge University Press.
- Greenfield, G. R. (1978). A Note on Subnormal Subgroups of Division Algebras. *Canadian Journal of Mathematics*, 30(1), 161-163. <https://doi.org/10.4153/CJM-1978-014-9>
- Herstein, I. N., & Scott, W. R. (1963). Subnormal Subgroups of Division Rings. *Canadian Journal of Mathematics*, 15, 80-83. <https://doi.org/10.4153/CJM-1963-008-2>
- Hua, L.-K. (1950). On the multiplicative group of a field. *Acad. Sinica Science Record*, 3(6), 2.
- Kaplansky, I. (1951). A Theorem on Division Rings. *Canadian Journal of Mathematics*, 3, 290-292. <https://doi.org/10.4153/CJM-1951-033-7>
- Le, V. C. (2019). Nhóm con của nhóm nhân trong vành chia quaternion thực [Subgroups of the multiplicative group of the division ring of real quaternions]. *Ho Chi Minh City University Journal of Science*, 16(12), 975-981. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.16.12.2560\(2019\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.16.12.2560(2019))
- Schur, J. (1904). Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochen lineare Substitutionen [On the representation of finite groups by fractional linear substitutions]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 127, 20-50.
- Shirvani, M., & Wehrfritz, B. A. F. (1986). *Skew linear groups*. Cambridge University Press.
- Zaleskii, A. E. (1965). Solvable groups and crossed products. *Matematicheskii Sbornik*, 67(1), 154-160.

SUBGROUPS OF THE SKEW GENERAL LINEAR GROUP OVER THE DIVISION RING OF REAL QUATERNIONS

Le Van Chua

An Giang University – Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: Le Van Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Received: March 15, 2025; Revised: April 02, 2025; Accepted: April 03, 2025

ABSTRACT

Let H be the division ring of real quaternions and n a positive integer. In this paper, we show that every subgroup of finite index in the skew general linear group $GL_n(H)$ is non-central normal, and so it contains the skew special linear group $SL_n(H)$. Also, we show that every proper subgroup of $SL_n(H)$ is of infinite index. Besides, we show that every subnormal subgroup of $GL_n(H)$ is a T -group and so it is normal in $GL_n(H)$.

Keywords: division ring of real quaternions; subgroup of finite index; subnormal subgroup