TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 23, Số 6 (2026): 1492-1503
Website: https://journal.hcmue.edu.vn
ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 23, No. 6 (2026): 1492-1503
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.6.5211(2026)

Bài báo nghiên cứu

K-QUỸ ĐẠO CỦA CÁC NHÓM LIE GIẢI ĐƯỢC MÀ ĐẠI SỐ LIE TƯƠNG ỨNG 7-CHIỀU VỚI CĂN LŨY LINH 5-CHIỀU

Nguyễn Minh Triết*, Đoàn Lê Minh, Nguyễn Thị Kim Trân

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Minh Triết – Email: triet0705@gmail.com*

Ngày nhận bài: 26-8-2025; Ngày nhận bài sửa: 23-10-2026; Ngày duyệt đăng: 25-10-2025

TÓM TẮT

Phương pháp quỹ đạo của Kirillov là công cụ quan trọng trong nghiên cứu biểu diễn nhóm Lie và đại số Lie mà trong đó, các quỹ đạo đối phụ hợp đóng vai trò trung tâm. Bài báo này nghiên cứu cấu trúc hình học các quỹ đạo đối phụ hợp của các nhóm Lie liên thông, đơn liên khi cấu trúc của đại số Lie tương ứng đã được cho cụ thể. Dựa trên kết quả phân loại gần đây về một lớp đặc biệt các đại số Lie giải được 7-chiều với căn lũy linh 5-chiều cho trước, bài báo sẽ giới thiệu một phép mô tả tường minh bức tranh hình học các quỹ đạo đối phụ hợp của các nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng với lớp đặc biệt các đại số Lie 7-chiều đó. Kết quả này góp phần làm sáng tỏ mối liên hệ giữa nhóm Lie và cấu trúc hình học tương ứng.

Từ khóa: biểu diễn đối phụ hợp; biểu diễn phụ hợp; đại số Lie; nhóm Lie; căn lũy linh

1. Giới thiệu

Lí thuyết Lie, bắt nguồn từ những công trình của Marius Sophus Lie (1842-1899), đã phát triển thành một lĩnh vực nền tảng trong toán học hiện đại, đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu cấu trúc đại số và hình học. Một trong những bài toán trung tâm của lí thuyết Lie là phân loại các đại số Lie và nhóm Lie theo những tính chất đặc trưng nào đó. Song song với vấn đề phân loại, phương pháp quỹ đạo do Kirillov khởi xướng vào những năm 1960 đã trở thành một công cụ chủ đạo để nghiên cứu biểu diễn của nhóm Lie và đại số Lie (Kirillov, 1976, 2004). Phương pháp này thiết lập mối liên hệ chặt chẽ giữa các biểu diễn unita bất khả quy và các quỹ đạo đối phụ hợp trong không gian đối ngẫu của đại số Lie. Nhiều nghiên cứu đã mở rộng và phát triển phương pháp này, trong đó có đóng góp quan trọng của Le (1990a, 1990b), khi đề xuất cách mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp dựa trực tiếp vào cấu trúc của đại số Lie tương ứng. Cách tiếp cận này mang tính trực quan và hiệu quả cao trong việc mô tả cấu trúc của các đại số Lie giải được.

Cite this article as: Nguyen, M. T., Doan, L. M., & Nguyen, T. K. T. (2026). K-orbits of solvable Lie groups whose Lie algebras are seven-dimensional with five-dimensional nilradicals. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 23*(6), 1492-1503. https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.6.5211(2026)

Trong những năm gần đây, các đại số Lie giải được 7-chiều với căn lũy linh 4, 6 và 7-chiều đã được phân loại khá đầy đủ (Parry, 2007; Hindeleh & Thompson, 2008). Về lớp căn lũy linh 5-chiều, hiện nay vẫn chưa được mô tả rõ ràng về các quỹ đạo đối phụ hợp. Vì vậy, bài báo này tập trung vào nhóm Lie liên thông, đơn liên gắn với đại số Lie thực giải được 7-chiều với căn lũy linh 5-chiều $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_4$, sử dụng phương pháp Kirillov cùng cách tiếp cận của Le (1990a, 1990b) và đại số máy tính để xây dựng và mô tả tường minh các quỹ đạo đối phụ hợp với chiều cực đại.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phương pháp mô tả quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie

Cho ánh xạ mũ $\exp_G : \mathcal{G} \to G$ của G, và ánh xạ mũ $\exp : \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ của nhóm Lie $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$. Với mỗi $U \in \mathcal{G}$, mỗi $F \in \mathcal{G}^*$, ta xác định phần tử $F_U \in \mathcal{G}^*$ là

$$\langle F_U, X \rangle = \langle F, (\exp \circ \mathrm{ad}_U)(X) \rangle \quad \forall X \in \mathcal{G}, \tag{1}$$

và kí hiệu $\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_U : U \in \mathcal{G}\}$. Giả sử $\{X_1, \ldots, X_n\}$ và $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathcal{G}$ và $\mathcal{G}^*$. Gọi (e_{ij}) là ma trận của $\exp(\mathrm{ad}_U)$ trong cơ sở X_i. Công thức (1) cho thấy nếu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là tọa độ của $F \in \mathcal{G}^*$ thì tọa độ $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ của $F_U \in \mathcal{G}^*$ được cho bởi

$$x_j^* = \langle F_U, X_j \rangle = \langle F, \exp(\mathrm{ad}_U) X_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{ij}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Khi đó, nhờ tính tự nhiên của ánh xạ mũ, chúng ta có kết quả dưới đây.

Mệnh đề 1. (Le, 1990a). Nếu Ω_F là K-quỹ đạo của G qua F thì ta luôn có $\Omega_F \supseteq \Omega_F(\mathcal{G})$. Hơn nữa, nếu $\exp_G$ là toàn ánh thì $\Omega_F = \Omega_F(\mathcal{G})$.

Mệnh đề 2. (Le, 1990b). Nếu G là nhóm exponential thì $\Omega_F = \Omega_F(\mathcal{G}), \forall F \in \mathcal{G}^*$.

Một điều kiện cần và đủ về tính exponential của nhóm Lie được cho bởi mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3. (Saito, 1957). Giả sử G là nhóm Lie thực liên thông đơn liên hữu hạn chiều. Khi đó, G là nhóm exponential khi và chỉ khi với mọi $X \in \mathcal{G} = \mathrm{Lie}(G)$, ánh xạ ad_X không có giá trị riêng thuần ảo khác 0.

2.2. Kết quả chính

Theo Le và cộng sự (2023), các đại số Lie giải được bất khả phân 7-chiều có căn lũy linh $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_4$ gồm 12 đại số Lie thực được liệt kê ở Bảng 1 với một số quy ước như sau.

- Cột thứ hai chứa bộ ba $(A, B, [X, Y])$, trong đó nếu không có thành phần thứ ba thì $[X, Y] = 0$. Hơn nữa, các quy ước sau được sử dụng:

+ $(a_1,...,a_5)$ là ma trận chéo $\mathrm{diag}(a_1,...,a_5)$;

+ E_{ij} là ma trận vuông cấp 5 có phần tử khác 0 duy nhất là 1 ở hàng i, cột j.

- $\delta = \pm 1$.

Bảng 1. *Đại số Lie thực giải được 7-chiều với căn lũy linh* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_4$

Kí hiệu	$(A,B,[X,Y])$	Kí hiệu	$(A,B,[X,Y])$
$\mathcal{G}_1$	$(0,0,0,0,1),(1,-2,-1,0,0),X_4$	$\mathcal{G}_7^a$	$(1,a,1+a,2+a,1),(0,1,1,1,0)+E_{15}$
$\mathcal{G}_2$	$(0,1,1,1,0),(1,0,1,2,0),X_5$	$\mathcal{G}_8^{a\delta}$	$(0,1,1,1,a),(0,0,0,0,1)+\delta E_{24}$
$\mathcal{G}_3^a$	$(0,1,1,1,0),(a,0,a,2a,1)$	$\mathcal{G}_9$	$(0,1,1,1,1),(1,0,1,2,0)+E_{25}$
$\mathcal{G}_4^{ab}$	$(1,a,1+a,2+a,0),(0,b,b,b,1)$	$\mathcal{G}_{10}^a$	$(1,a,1+a,2+a,a),(0,1,1,1,1)+E_{25}$
$\mathcal{G}_5^a$	$(1,1,2,3,a),(0,0,0,0,1)+E_{12}$	$\mathcal{G}_{11}$	$(0,1,1,1,1),(1,0,1,2,2)+E_{54}$
$\mathcal{G}_6$	$(0,1,1,1,0),(1,0,1,2,1)+E_{15}$	$\mathcal{G}_{12}^a$	$(1,a,1+a,2+a,2+a),(0,1,1,1,1)+E_{54}$

Để thuận tiện, ta kí hiệu $G_1,G_2,G_3^a,G_4^{ab},G_5^a,G_6,G_7^a,G_8^{a\delta},G_9,G_{10}^a,G_{11},G_{12}^a$ lần lượt là các nhóm Lie thực, giải được, liên thông, đơn liên tương ứng với các đại số Lie $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3^a,\mathcal{G}_4^{ab},\mathcal{G}_5^a,\mathcal{G}_6,\mathcal{G}_7^a,\mathcal{G}_8^{a\delta},\mathcal{G}_9,\mathcal{G}_{10}^a,\mathcal{G}_{11},\mathcal{G}_{12}^a$ trong Bảng 1 và đặt

$$\mathcal{A}=\left\{G_1,G_2,G_3^a,G_4^{ab},G_5^a,G_6,G_7^a,G_8^{a\delta},G_9,G_{10}^a,G_{11},G_{12}^a\right\}.$$

Từ bây giờ, chúng ta luôn kí hiệu G là một trong các nhóm Lie thuộc $\mathcal{A}$, tức là đại số Lie $\mathcal{G}=\mathrm{Lie}(G)$ là một trong các đại số Lie trong Bảng 1. Cho

$$U=x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3+x_4X_4+x_5X_5+xX+yY\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x,y)\in\mathcal{G}.$$

Khi đó, ta có định lí dưới đây.

Định lí 4. Với các kí hiệu được cho như trên, ta có G là nhóm exponential.

Chứng minh. Trước tiên, tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận ad_U với mọi $U\in\mathcal{G}$ bằng cách sử dụng MAPLE (kết quả được trình bày trong Bảng 2). Từ Bảng 2, ta thấy rằng tất cả ma trận ad_U của các đại số Lie $\mathcal{G}$ đều không có giá trị riêng thuần ảo khác 0. Theo Mệnh đề 3 thì Định lí 4 được chứng minh. □

Bảng 2. *Ma trận biểu diễn phụ hợp của đại số Lie $\mathcal{G}$ và giá trị riêng của chúng*

Đại số	$\mathrm{ad}_U, U=\sum_{i=1}^{5} x_i X_i + xX + yY \ (x_i, x, y \in \mathbb{R})$	**Giá trị riêng của** ad_U **(bội)**
$\mathcal{G}_1$	$\begin{bmatrix} y & & & & & & -x_1 \\ & -2y & & & & & 2x_2 \\ -x_2 & x_1 & -y & & & & x_3 \\ -x_3 & & x_1 & 0 & -y & & x \\ & & & & x & -x_5 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$	$0\ (3), y, -2y, -y, x$
$\mathcal{G}_2$	$\begin{bmatrix} y & & & & & & -x_1 \\ & x & & & & -x_2 & \\ -x_2 & x_1 & y+x & & & -x_3 & -x_3 \\ -x_3 & & x_1 & 2y+x & & -x_4 & -2x_4 \\ & & & & 0 & -y & x \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$	$0\ (3), y, x, y+x, 2y+x$
$\mathcal{G}_3^a$	$\begin{bmatrix} ay & & & & & & -ax_1 \\ & x & & & & -x_2 & \\ -x_2 & x_1 & ay+x & & & -x_3 & -ax_3 \\ -x_3 & & x_1 & 2ay+x & & -x_4 & -2a \\ & & & & y & & -x_5 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$	$0\ (2), y, x, ay,$ $ay+x, 2ay+x$
$\mathcal{G}_4^{ab}$	$\begin{bmatrix} x & & & & & -x_1 & \\ & p & & & & -ax_2 & -bx_2 \\ -x_2 & x_1 & p+x & & & -(a+1)x_3 & -bx_3 \\ -x_3 & & x_1 & p+2x & & -(a+2)x_4 & -bx_4 \\ & & & & y & & -x_5 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$, với $p=ax+by$	$0\ (2), y, x, ax+by,$ $ax+by+x,$ $ax+by+2x$
$\mathcal{G}_5^a$	$\begin{bmatrix} x & & & & & -x_1 & \\ y & x & & & & -x_2 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 2x & & & -2x_3 & \\ -x_3 & & x_1 & 3x & & -3x_4 & \\ & & & & ax+y & -ax_5 & -x_5 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$	$2x, 3x, ax+y,$ $0(2), x(2)$
$\mathcal{G}_6$	$\begin{bmatrix} y & & & & & & -x_1 \\ & x & & & & -x_2 & \\ -x_2 & x_1 & x+y & & & -x_3 & -x_3 \\ -x_3 & & x_1 & x+2y & & -x_4 & -2x_4 \\ y & & & & y & & -x_1-x_5 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$	$x, x+2y, x+y,$ $0(2), y(2)$

$\mathcal{G}_7^a$

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & -x_1 & \\ & ax+y & & & & & -ax_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 & (1+a)x+y & & & & -(1+a)x_3 & -x_3 \\ -x_3 & & x_1 & (2+a)x+y & & & -(2+a)x_4 & -x_4 \\ y & & & & x & & -x_5 & -x_1 \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$ax+x+y, ax+y,$
$ax+2x+y, 0(2), x(2)$

$\mathcal{G}_8^{a\delta}$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & x & & & & -x_2 & \\ -x_2 & x_1 & x & & & -x_3 & \\ -x_3 & \delta y & x_1 & x & & -x_4 & -\delta x_2 \\ & & & & ax+y & -ax_5 & -x_5 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$ax+y, x(3), 0(3)$

$\mathcal{G}_9$

$$\begin{bmatrix} y & & & & & & -x_1 \\ & x+y & & & & -x_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 & x+y & & & -x_3 & -x_3 \\ -x_3 & & x_1 & x+2y & & -x_4 & -2x_4 \\ & y & & & x & -x_5 & -x_2 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$x, y, x+2y,$
$0(3), x+y(2)$

$\mathcal{G}_{10}^a$

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & -x_1 & \\ & ax+y & & & & & -ax_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 & (1+a)x+y & & & & -(1+a)x_3 & -x_3 \\ -x_3 & & x_1 & (2+a)x+y & & & -(2+a)x_4 & -x_4 \\ & y & & & ax+y & & -ax_5 & -x_2-x_5 \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$0(2), x, ax+y(2),$
$(1+a)x+y,$
$(2+a)x+y$

$\mathcal{G}_{11}$

$$\begin{bmatrix} y & & & & & & -x_1 & \\ & x & & & & -x_2 & & \\ -x_2 & x_1 & x+y & & & -x_3 & -x_3 & \\ -x_3 & & x_1 & x+2y & y & -x_4 & -2x_4-x_5 & \\ & & & & x+2y & -x_5 & -2x_5 & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \end{bmatrix}$$

$x, y, x+y,$
$x+2y(2), 0(2)$

$\mathcal{G}_{12}^a$

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & -x_1 & & \\ & ax+y & & & & & -ax_2 & -x_2 & \\ -x_2 & x_1 & (1+a)x+y & & & & -(1+a)x_3 & -x_3 & \\ -x_3 & & x_1 & (2+a)x+y & y & & -(2+a)x_4 & -x_4-x_5 & \\ & & & & (2+a)x+y & & -(2+a)x_5 & -x_5 & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \end{bmatrix}$$

$x, ax+y, (1+a)x+y,$
$(2+a)x+y(2), 0(2)$

Cho $G \in \mathcal{A}$, kí hiệu $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$. Rõ ràng, chúng ta có thể đồng nhất $\mathcal{G}^* \equiv \mathbb{R}^7$ bằng cách cố định trong $\mathcal{G}^*$ một cơ sở đối ngẫu $\left(X_1^*,\ldots,X_5^*,X^*,Y^*\right)$ của cơ sở $\left(X_1,\ldots,X_5,X,Y\right)$ trong $\mathcal{G}$. Gọi $F = \alpha_1 X_1^* + \cdots + \alpha_5 X_5^* + \alpha X^* + \beta Y^* \equiv \left(\alpha_1,\ldots,\alpha_5,\alpha,\beta\right)$ là một phần tử tuỳ ý của $\mathcal{G}^*$. Từ Mệnh đề 2, 3 và Định lí 4, chúng ta có hệ quả dưới đây.

Hệ quả 5. Cho nhóm Lie $G \in \mathcal{A}$, khi đó $\Omega_F = \Omega_F(\mathcal{G})$ với mọi $F \in \mathcal{G}^*$.

Theo sau Hệ quả 5, ta phát biểu định lí về mô tả bức tranh hình học các *K*-quỹ đạo chiều cực đại của các nhóm Lie đang xét như sau.

Định lí 6. Giả sử rằng $G \in \mathcal{A}$. Kí hiệu $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_5,\alpha,\beta\right)$ là tọa độ của $F \in \mathcal{G}^* \equiv \mathbb{R}^7$ đối với cơ sở đối ngẫu $\left(X_1^*,\ldots,X_5^*,X^*,Y^*\right)$ của cơ sở $\left(X_1,\ldots,X_5,X,Y\right)$ của $\mathcal{G}$. Khi đó, chiều cực đại của các *K*-quỹ đạo của G là 6 và bức tranh các *K*-quỹ đạo 6-chiều của G được cho trong Bảng 3 (xem Phụ lục).

Chứng minh. Chứng minh của định lí được thực hiện qua ba bước như sau.

Bước 1. Cho $X,Y \in \mathcal{G}$ và $F\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_5,\alpha,\beta\right) \in \mathcal{G}^*$, chúng ta cần xác định ma trận của dạng song tuyến tính $B_F\left(X,Y\right) := \left\langle F,\left[X,Y\right]\right\rangle$.

Bước 2. Tìm điều kiện cần và đủ để $\text{rank}B_F = 6$ (chiều cực đại của các *K*-quỹ đạo của G).

Bước 3. Mô tả tường minh các *K*-quỹ đạo 6-chiều của G, tức là mô tả $\Omega_F \equiv \Omega_F\left(\mathcal{G}\right) = \left\{F_U \;|U \in \mathcal{G}\right\} \subset \mathcal{G}^* \equiv \mathbb{R}^7$, ở đó

$$F_U = \sum_{i=1}^{5} x_i^* X_i^* + x^* X^* + y^* Y^* \equiv \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x^*, y^*\right) \in \mathcal{G}^*$$

là dạng tuyến tính trên đại số Lie $\mathcal{G}$ của nhóm Lie *G* xác định bởi

$$\left\langle F_U, T\right\rangle = \left\langle F, \exp\left(\text{ad}_U\right)T\right\rangle, \quad \forall T \in \mathcal{G}, \forall U \in \mathcal{G}.$$

Để xác định F_U với mọi $U = \sum_{i=1}^{5} x_i X_i + xX + yY = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x, y\right) \in \mathcal{G}$, ta phải xác định $\exp\left(\text{ad}_U\right)$ đối với cơ sở $\left(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X, Y\right)$ (dùng phần mềm MAPLE). Bây giờ ta chứng minh chi tiết cho trường hợp $G = G_3^a$, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Bước 1. Cho $X,Y \in \mathcal{G}_3^a$ và $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_5,\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_3^{a*}$, ma trận $B_F\left(X,Y\right) := \left\langle F,\left[X,Y\right]\right\rangle$ là

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & -a\alpha_1 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & -a\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & -2a\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_5 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ a\alpha_1 & 0 & a\alpha_3 & 2a\alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bước 2. Điều kiện cần và đủ để $\text{rank}B_F = 6$ là $\alpha_3\alpha_5 \neq 0 = \alpha_4$ hoặc $\alpha_5 = 0 \neq \alpha_4$.

Bước 3. Sử dụng phần mềm MAPLE ta thu được ma trận $\exp(\text{ad}_U)$ cho bởi

$$\begin{bmatrix} e^{ay} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1ap \\ 0 & e^{x} & 0 & 0 & 0 & -x_2q & 0 \\ -x_2e^{ay}q & x_1e^{x}p & e^{x+ay} & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ c_3 & \frac{1}{2}x_1^2e^{x}p^2 & x_1e^{x+ay}p & e^{x+2ay} & 0 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{y} & 0 & -x_5r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

với $p = \dfrac{e^{ay}-1}{ay}, q = \dfrac{e^{x}-1}{x}, r = \dfrac{e^{y}-1}{y}$; a_3, b_3, c_3, d_3, f_3 là các biểu thức theo biến x_1, x_2, x_3, x, y.

Tính toán trực tiếp ta thu được tọa độ của F_U cho bởi

$$\begin{cases} x_1^* = \alpha_1e^{ay} - \alpha_3\dfrac{x_2e^{ay}\left(e^{x}-1\right)}{x} + \alpha_4p \\ x_2^* = \alpha_2e^{x} + \alpha_3\dfrac{x_1e^{x}\left(e^{ay}-1\right)}{ay} + \alpha_4\dfrac{x_1^2e^{x}}{2}\left(\dfrac{e^{ay}-1}{ay}\right)^2 \\ x_3^* = \alpha_3e^{ay+x} + \alpha_4\dfrac{x_1e^{ay+x}\left(e^{ay}-1\right)}{ay} \\ x_4^* = \alpha_4e^{2ay+x} \\ x_5^* = \alpha_5e^{y} \\ x^* = -\alpha_2\dfrac{x_2\left(e^{x}-1\right)}{x} + \alpha_3q + \alpha_4r + x \\ y^* = -\alpha_1\dfrac{x_1a\left(e^{ay}-1\right)}{ay} + \alpha_3s + \alpha_4t - \alpha_5\dfrac{x_5\left(e^{y}-1\right)}{y} + y \end{cases}$$

ở đó

$$\begin{cases} p=\dfrac{-x\left(ayx_3+x_2x_1\right)e^{2ay+x}+x_2x_1\left(ay+x\right)e^{ay+x}+aye^{ay}\left(xx_3-x_2x_1\right)}{ay\left(ay+x\right)x} \\ q=\dfrac{-x\left(ayx_3+x_2x_1\right)e^{ay+x}+x_2x_1\left(ay+x\right)e^{x}+ay\left(xx_3-x_2x_1\right)}{ay\left(ay+x\right)x} \\ r=\dfrac{-2\left(a^2y^2x_4+ayx_1x_3+\dfrac{1}{2}x_2x_1^2\right)x\left(ay+x\right)e^{2ay+x}+4\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)x_1x\left(ayx_3+x_2x_1\right)e^{ay+x}}{4\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)y^2xa^2\left(ay+x\right)} \\ \quad+\dfrac{-2\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)x_1^2x_2\left(ay+x\right)e^{x}+2y^2\left(x^2x_4+\left(ayx_4-x_1x_3\right)x+x_2x_1^2\right)a^2}{4\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)y^2xa^2\left(ay+x\right)} \\ s=\dfrac{-ay\left(xx_3-x_2x_1\right)e^{ay+x}-x_2x_1\left(ay+x\right)e^{ay}+x\left(ayx_3+x_2x_1\right)}{y\left(ay+x\right)x} \\ t=\dfrac{\left(\left(-2ay-x_1x_3\right)x^2+\left(-2a^2y^2+x_2x_1^2\right)x\right)e^{2ay+x}+2\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)\left(xx_3-x_2x_1\right)x_1e^{ay+x}}{2a^2y^3x+3ay^2x^2+x^3y} \\ \quad+\dfrac{-2\left(ay+\dfrac{x}{2}\right)\left(xx_3-x_2x_1\right)x_1e^{ay}+\left(2ay+x_1x_3\right)x^2+\left(2a^2y^2-x_2x_1^2\right)x}{2a^2y^3x+3ay^2x^2+x^3y} \end{cases}$$

Để mô tả bức tranh các K-quỹ đạo chiều cực đại của $G=G_3^a$, chúng ta xét $F\left(\alpha_1,...,\alpha_5,\alpha,\beta\right)\in\mathcal{G}_3^{a*}$ với $\alpha_4^2+\alpha_5^2\neq 0$ hoặc $\alpha_3\alpha_4\alpha_5\neq 0$, các tham số còn lại tùy ý. Khi đó:

- Nếu $\alpha_4=0$ thì mỗi tọa độ x_1^*,x_2^*,x^*,y^* chạy trên đường thẳng $\mathbb{R}$, trong khi $x_4^*\equiv 0$ và $x_3^*,x_5^*\in\mathbb{R}$; $\alpha_3x_3^*>0$, $\alpha_5x_5^*>0$, ta nhận được Ω_F là một phần của siêu phẳng

$$\Omega_F=\left\{(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x^*,y^*)\in\mathcal{G}_3^{a*}:x_4^*=0,\alpha_3x_3^*>0,\alpha_5x_5^*>0\right\}.$$

- Nếu $\alpha_5=0$ thì mỗi tọa độ x_1^*,x_2^*,x^*,y^* chạy trên đường thẳng $\mathbb{R}$, trong khi $x_5^*\equiv 0$ và $x_4^*,x_3^*\in\mathbb{R}$; $\alpha_4x_4^*>0$, ta nhận được Ω_F là một phần của siêu phẳng

$$\Omega_F=\left\{(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x^*,y^*)\in\mathcal{G}_3^{a*}:x_5^*=0,\alpha_4x_4^*>0\right\}.$$

- Nếu $\alpha_4\alpha_5\neq 0$ thì mỗi tọa độ x_1^*,x^*,y^* chạy trên đường thẳng $\mathbb{R}$, trong khi x_4^*,x_5^* cố định; $\alpha_4x_4^*>0$, $\alpha_5x_5^*>0$. Tính toán trực tiếp ta thấy x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^* thỏa mãn

$$x_2^*=\frac{x_4^*\alpha_5^{2a}}{x_5^{*2a}}\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(\frac{x_3^*x_5^{*a}}{x_4^*\alpha_5^a}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_3^*x_5^{*a}}{x_4^*\alpha_5^a}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)^2\right].$$

Như vậy, ta thu được Ω_F là một phần của siêu mặt vô tỉ

$$\Omega_F=\left\{\begin{array}{l}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x^*,y^*)\in\mathcal{G}_3^{a*}:x_2^*=\dfrac{x_4^*\alpha_5^{2a}}{x_5^{*2a}}\left[\dfrac{\alpha_2}{\alpha_4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(\dfrac{x_3^*x_5^{*a}}{x_4^*\alpha_5^a}-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_3^*x_5^{*a}}{x_4^*\alpha_5^a}-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)^2\right], \\ \alpha_4x_4^*>0,\alpha_5x_5^*>0\end{array}\right\}.$$

Như vậy, trường hợp $G = G_3^a$ được chứng minh xong. □

3. Kết luận

Phương pháp mô tả *K*-quỹ đạo đã được áp dụng hiệu quả trong việc khai thác cấu trúc của các đại số Lie giải được tương ứng với các nhóm Lie liên thông, đơn liên. Bài báo đã tập trung nghiên cứu họ $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_4$, một họ đại số Lie thực 7-chiều có căn lũy linh 5-chiều. Trên cơ sở kết quả phân loại trước đó của Le và cộng sự (2023), bài báo đã hoàn thành việc mô tả đầy đủ bức tranh hình học các *K*-quỹ đạo chiều cực đại cho toàn bộ các nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng của họ này. Các quỹ đạo được phân thành bốn tầng theo chiều 0, 2, 4 và 6; trong đó, tầng 0-chiều tương ứng với các *K*-quỹ đạo tầm thường (đơn điểm), còn các tầng còn lại là các quỹ đạo không tầm thường. Nói riêng, tất cả các nhóm Lie (và đại số Lie) được xét đều không thuộc lớp MD.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Hindeleh, F., & Thompson, G. (2008). Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical. *Algebras Groups Geom, 25*(3), 243-265.

Kirillov, A. A. (1976). *Elements of the theory of representations*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66243-0

Kirillov, A. A. (2004). *Lectures on the orbit method* (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 64). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/gsm/064

Le, A. V. (1990a). On the foliations formed by the generic K-orbits of the MD4-groups. *Acta Mathematica Vietnamica*, 15(2), 39–55.

Le, A. V. (1990b). *Không gian phân lá tạo bởi các quỹ đạo chiều cực đại của một lớp nhóm Lie MD4* [Foliations formed by the maximal-dimensional orbits of a class of MD4 Lie groups] (Doctoral dissertation). Vietnam Institute of Mathematics.

Le, A. V., Nguyen, A. T., Nguyen, T. C. T, Nguyen, T. M. T., & Vo, N. T. (2023). Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals. *Communications in Algebra, 51*(5), 1866–1885. https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2111880

Saito, M. (1957). Sur certains groupes de Lie résolubles. *Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo, 7*, 1–11.

Parry, A. R. (2007). *A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals*. Utah State University.

K-ORBITS OF SOLVABLE LIE GROUPS WHOSE LIE ALGEBRAS ARE SEVEN-DIMENSIONAL WITH FIVE-DIMENSIONAL NILRADICALS

Nguyen Minh Triet*, Doan Le Minh, Nguyen Thi Kim Tran

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Minh Triet – Email: triet0705@gmail.com*

Received: August 26, 2025; Revised: October 23, 2025; Accepted: October 25, 2025

ABSTRACT

Kirillov's orbit method is a fundamental tool for studying representations of Lie groups and Lie algebras, with coadjoint orbits playing a central role. This paper investigates the geometry of coadjoint orbits of connected, simply connected Lie groups whose associated Lie algebras are explicitly specified. Building on recent classification results for a particular family of seven-dimensional solvable Lie algebras with five-dimensional nilradicals, the study provides a constructive and explicit geometric description of the corresponding coadjoint orbits. The findings clarify the relationship among solvable Lie groups, their Lie algebras, and the geometric structures arising from them.

Keywords: coadjoint orbit; coadjoint representation; Lie algebra; Lie group; nilradical

PHỤ LỤC

Bảng 3. *Bức tranh các K-quỹ đạo chiều cực đại của nhóm G*

Điều kiện để $\dim\Omega_F = 6$	**Nhóm**	$\Omega_F = \left\{F_U\left(x_1^*,\ldots,x_1^*,\alpha,\beta\right)\right\}$	Ω_F **là một phần của**
$\left(\alpha_3^2+\alpha_4^2\right)\alpha_5 \neq 0$	G_1	$x_4^* = \alpha_4, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = \alpha_4$
$\alpha_4 \neq 0$	G_2	$x_5^* = \alpha_5, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = \alpha_5$
$\alpha_4 = 0 \neq \alpha_3\alpha_5$	G_3^a	$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0 \neq \alpha_4$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$		$\frac{x_2^* x_5^{*2a}}{x_4^* \alpha_5^{2a}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(\frac{x_3^* x_5^{*a}}{x_4^* \alpha_5^a} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_3^* x_5^{*a}}{x_4^* \alpha_5^a} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)^2$, $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ
$\alpha_4 = 0 \neq \alpha_3\alpha_5$	G_4^{ab}	$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0 \neq \alpha_4$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$		$x_2^* - \left(\frac{x_5^*}{\alpha_5}\right)^b S^{\frac{a}{a+2}}\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_4}\right) = \frac{x_3^{*2}}{2\alpha_4}\left(\frac{x_5^*}{\alpha_5}\right)^{-b} S^{-\frac{1}{a+2}\left(a+\frac{2}{a+2}\right)}$ với $S = \frac{x_4^*}{\alpha_4}\left(\frac{x_5^*}{\alpha_5}\right)^{-b}$, $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ

$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_5^a	$\left[\left(x_3^*\right)^2 - 2\left(x_2^*\right)\left(x_4^*\right)\right]^3 (\alpha_4)^4 = \left[(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4\right]^3 \left(x_4^*\right)^4$ $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt bậc sáu đại số
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\left(\alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_6	$\left(x_5^*\right)^2\left[\left(x_3^*\right)^2 - 2\left(x_2^*\right)\left(x_4^*\right)\right](\alpha_4)^2 = (\alpha_5)^2\left[(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4\right]\left(x_4^*\right)^2$ $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt bậc bốn đại số
$\alpha_2 = \alpha_3 = 0; \alpha_4\alpha_5 \neq 0$		$\left(x_3^*\right)^2 = 2\left(x_2^*\right)\left(x_4^*\right), \alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt bậc hai đại số
$\alpha_4 = 0; \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0; \alpha_4 \neq 0;$ $(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4 \neq 0$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_7^a	$\left(x_5^*\right)^2\left[\left(x_3^*\right)^2 - 2\left(x_2^*\right)\left(x_4^*\right)\right](\alpha_4)^2 = (\alpha_5)^2\left[(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4\right]\left(x_4^*\right)^2$ $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt bậc bốn đại số
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0; \alpha_4 \neq 0;$ $(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4 \neq 0$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	$G_8^{a\delta}$	$\frac{x_2^*}{x_4^*} - \frac{\alpha_2}{\alpha_4} - \frac{\delta}{\alpha_4}\left[\ln\left(\frac{x_5^*}{\alpha_5}\right) - a\ln\left(\frac{x_4^*}{\alpha_4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_3^*)^2}{\left(x_4^*\right)^2} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_4^2}\right]$ $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0;\ \alpha_4 \neq 0$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_9	$\alpha_5\left[\frac{\left(x_3^*\right)^2}{x_4^*} - 2x_2^* - x_5^*\ln\frac{x_5^*}{\alpha_5}\right] = x_5^*\left[\frac{(\alpha_3)^2}{\alpha_4} - 2\alpha_2 - \alpha_5\ln\frac{x_4^*}{\alpha_4}\right]$ $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0; \alpha_4 \neq 0;$ $(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4 \neq 0$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$

$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_5 = 0;\ \alpha_4 \neq 0$		$x_5^* = 0, \alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu phẳng $x_5^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_{10}^a	$x_2^* = \frac{\alpha_2 x_5^*}{\alpha_5} + \alpha_3 S + \frac{\alpha_4}{2} x_5^* S^2 + x_5^*\left(\ln\frac{x_5^*}{\alpha_5} - \frac{a}{2}\ln\frac{x_4^*\alpha_5}{\alpha_4 x_5^*}\right)$ với $S = \frac{\alpha_5 x_3^* - \alpha_3 x_5^*\sqrt{\frac{x_4^*\alpha_5}{x_5^*\alpha_4}}}{\alpha_4 x_5^*\sqrt{\frac{x_4^*\alpha_5}{x_5^*\alpha_4}}}$, $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_4\alpha_5 \neq 0$	G_{11}	$x_2^* = \frac{(x_3^*)^2}{x_4^*(S+\alpha_3)^2}\left(\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3 S + \frac{S^2}{2}\right)$ với $S = e^{\frac{x_5^*}{x_4^*} - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}}\frac{\alpha_4 x_3^*}{x_4^*} - \alpha_3$, $\alpha_4 x_4^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ
$\alpha_4 = 0;\ \alpha_3\alpha_5 \neq 0$		$x_4^* = 0, \alpha_3 x_3^* > 0, \alpha_5 x_5^* > 0$	Siêu phẳng $x_4^* = 0$
$\alpha_4 \neq 0;$ $(\alpha_3)^2 - 2\alpha_2\alpha_4 \neq 0$	G_{12}^a	$x_2^* = \frac{x_4^*}{\alpha_4}\left[\left(\alpha_2 - \frac{{\alpha_3}^2}{2\alpha_4}\right)S + \frac{\alpha_4}{2}\left(\frac{x_3^*}{x_4^*}\right)^2\right]$ với $S = \left(\frac{x_4^*}{\alpha_4}\right)^{-\frac{2}{2+a}} e^{\frac{2}{2+a}\left(\frac{x_5^*}{x_4^*} - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}\right)}$, $\alpha_4 x_4^* > 0$	Siêu mặt vô tỉ