PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN VÀ VI PHÂN TRONG LỊCH SỬ

LÊ THỊ HOÀI CHÂU*, TRẦN THỊ MỸ DUNG

Trong một đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ và trong [4] chúng tôi đã chỉ ra lợi ích sư phạm của phân tích khoa học luận lịch sử về tri thức toán học cần dạy. Nội dung trình bày trong bài viết này thuộc chuỗi nghiên cứu tiếp theo nhằm vạch rõ các đặc trưng khoa học luận và sư phạm của một số đối tượng toán học được dạy ở bậc Trung học hay Đại học.

Do khuôn khổ của bài viết, chúng tôi không trình bày phần phân tích lịch sử hình thành các khái niệm *tích phân, vi phân* theo thứ tự thời gian, mà sẽ tập trung vào việc chỉ ra bài toán gắn liền với chúng và những phương pháp giải quyết đã từng được sử dụng qua các thời kỳ khác nhau. Các phương pháp được nhóm lại theo đặc trưng và theo sự tiến triển của chúng. Với cách trình bày này chúng tôi cố gắng làm rõ nghĩa của các khái niệm, những điều kiện cho phép nảy sinh và quan hệ giữa các khái niệm đó.

1. BÀI TOÁN CẦU PHƯƠNG VÀ PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Đến tận thế kỷ 17 phép tính tích phân mới được xây dựng thành một lý thuyết toán học độc lập, nhưng thực ra thì cội nguồn của nó đã có từ thời Hy Lạp cổ đại. Phép tính này được ra đời từ bài toán cầu phương, cầu tích, cầu trường[1]. Do trong lịch sử cả ba bài toán đều được giải theo cùng một cách thức, ta sẽ chỉ xem xét dưới đây những phương pháp đã từng được hình thành trong lịch sử nhằm giải quyết vấn đề cầu phương.

---

* PGS.TS Khoa Toán - Tin, ĐHSP Tp. HCM.

[1] Theo Từ điển toán học thông dụng, cầu phương là phép tính diện tích một hình, chẳng hạn như diện tích của hình giới hạn bởi một đường cong kín (đường tròn, elip, ...), hay của hình thang cong a x b, 0 y f(x) với f là hàm số xác định trên [a, b]. Tương tự, khái niệm « cầu tích », « cầu trường » gắn liền với vấn đề tính thể tích và độ dài cung.

1.1. Phương pháp dựa vào thuyết "nguyên tử"

Vào thời cổ đại, bài toán xác định diện tích các hình và thể tích các vật thể đã được đặt ra. Người Ai Cập và Babylone cổ đã có thể tính diện tích và thể tích của một số hình đơn giản theo đúng những công thức chúng ta dùng ngày nay. Vấn đề đặt ra là tìm cơ sở lý thuyết cho các công thức đó và một quy tắc tổng quát cho phép tính diện tích, thể tích những hình phức tạp hơn.

Nhà bác học cổ Hy Lạp Democrite, vào thế kỉ thứ 5 trước công nguyên (CN) đã đưa ra thuyết nguyên tử, cho rằng mọi vật thể đều cấu thành bởi một tập hợp vô hạn các nguyên tử nhỏ bé mà ông gọi là "đại lượng cơ sở". Áp dụng thuyết nguyên tử vào toán học, Democrite tính được diện tích của một số hình bằng cách chia nhỏ chúng. Quan điểm của ông được xem là nguồn gốc của khái niệm vô cùng bé. Tuy nhiên, dù những kết quả ông đưa ra là đúng, lý luận của ông đã sớm không thỏa mãn các đòi hỏi ngày càng cao về tính chặt chẽ toán học nên bị một số người - tiểu biểu là Zénon (496-429 trước CN) - bác bỏ. Zénon đã lập luận để chứng tỏ rằng không thể dựa vào thuyết nguyên tử ngây thơ và áp dụng những lý luận đã có trên các đối tượng hữu hạn cho những đối tượng vô hạn. Điều đó đặt ra yêu cầu *"cần phải nghiên cứu và sử dụng những phương pháp mà bên cạnh các hình thức suy luận khác nhau về các đại lượng vô cùng bé còn có các yếu tố của sự chuyển qua giới hạn"* (K.A. Rư-ni-côp, 1967, tr. 70).

1.2. Phương pháp "Vét kiệt"

• Người đầu tiên xây dựng một phương pháp cho phép chuyển qua giới hạn là Eudoxe (410-356 trước CN). Phương pháp của ông - được gọi là phương pháp "vét kiệt", lấy mệnh đề sau làm cơ sở: *Nếu từ bất kỳ một đại lượng nào mà bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó, rồi từ chỗ còn lại bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó, v.v.. thì cuối cùng sẽ còn lại một đại lượng nhỏ hơn bất kỳ đại lượng cùng loại nào được ấn định trước.*

Bằng phương pháp vét kiệt, Eudoxe đã chứng minh được tính đúng đắn của các công thức tính thể tích hình nón, hình tháp mà người Hy lạp cổ đại đã từng sử dụng. Ông còn chứng minh được rằng diện tích các hình tròn tỷ lệ với bình phương đường kính, còn thể tích các hình cầu tỷ lệ với lập phương đường kính của chúng.

Phương pháp của Eudoxe thỏa mãn các đòi hỏi cao về tính chặt chẽ toán học. Với phương pháp này, người ta cứ việc chia nhỏ và vét kiệt các hình cần tính diện tích hay thể tích.

Về thực chất, đây là một hình thức của phép lấy giới hạn. Nhưng trong phương pháp vét kiệt người ta không nêu bật lên được ý tưởng về đại lượng biến thiên, giới hạn cùng những tính chất tổng quát của nó. Hơn nữa, theo ngôn ngữ toán học hiện đại thì định lí về tính duy nhất của giới hạn đã được sử dụng, nhưng nó chỉ được chứng minh riêng cho từng bài toán cụ thể chứ không phải cho trường hợp tổng quát. Vấn đề là ở chỗ để chứng minh điều ấy thì không tránh khỏi việc phải giải thích hàng loạt khái niệm thuộc phạm trù vi-tích phân, đại lượng vô cùng bé và giới hạn. Các nhà toán học cổ chưa đi đến được những khái niệm thuộc phạm trù này.

• Archimède (thế kỷ thứ 3 trước CN) là một trong những người có những ứng dụng đẹp nhất của phương pháp vét kiệt để cầu phương các hình, cầu tích các thể, cầu trường các cung và xác định trọng tâm của vật thể.

Để cầu phương hình B, Archimède xây dựng một dãy các hình A_K nội tiếp hình B. Dãy A_K được xây dựng sao cho diện tích của chúng tính được và đơn điệu tăng, dần vét cạn hình B. Bằng một cách không rõ rệt, thường là dựa vào những lập luận khác nhau về lý thuyết và thực tế, ông tìm ra giới hạn A (theo ngôn ngữ ngày nay) của dãy các hình nội tiếp. Rồi ông dùng phản chứng để chứng minh A bằng diện tích của B.

Nói một cách chính xác thì Archimède giải bài toán cầu phương bằng cách "dùng các hình nội tiếp để vét kiệt". Với phương pháp này, ông đã tính được nhiều diện tích và thể tích. Tuy nhiên, ông không xem xét phương pháp ở góc độ khái quát mà cứ lặp lại các bước như vậy đối với từng bài toán riêng biệt.

• Nhiều thế kỷ sau, phương pháp dùng các hình nội tiếp để vét kiệt vẫn còn được một số nhà toán học khác sử dụng để giải bài toán cầu phương trong từng trường hợp cụ thể. Chẳng hạn, nhà bác học ở Bagdad là Thabit Ibn Qurra (836-901) đã tìm diện tích hình phẳng xác định bởi $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \sqrt{x}$ bằng phương pháp này (tham khảo [5]).

1.3. Phương pháp "cơ học" và phương pháp "bất khả phân"

• Phương pháp cơ học cũng do Archimède đề nghị. Trong bức thư gửi cho Eratosthene, mới được tìm thấy vào năm 1906, Archimède nêu rõ phương pháp cơ học mà ông đã dùng để giải các bài toán hình học. Tư tưởng chính của ông là để tính diện tích hay thể tích thì phải cắt hình ra thành một số rất lớn các giải phẳng mỏng song song hoặc các lớp mỏng song song. Về thực chất, phương pháp này thể hiện ý tưởng *lập hình phẳng từ các đường và vật thể từ các mặt phẳng*. Theo cách nói của ông, hình phẳng được xem như là các đường được lấy đồng thời và vật thể là các mặt phẳng được lấy đồng thời. Phương pháp cơ học do Archimède đề nghị từ thời cổ lại rất gần với phương pháp các bất khả phân do nhà toán học người Ý Cavalieiri (1598-1647) xây dựng sau đó gần 20 thế kỷ.

• Theo Cavalieiri, hình phẳng được xem là *tổng vô hạn các đoạn thẳng* cùng song song với một đường thẳng nào đó được chọn làm chuẩn. Những đoạn thẳng này, nằm giữa hai tiếp tuyến song song với chuẩn, được gọi là các bất khả phân. Chúng hoàn toàn không có bề rộng. Vật thể được xem là tập hợp vô hạn các thiết diện phẳng cùng song song với một mặt phẳng nào đó được chọn làm chuẩn. Những thiết diện này nằm giữa hai tiếp diện cùng song song với chuẩn. Chúng là các bất khả phân. Diện tích của hình phẳng (thể tích của vật thể) được xem là tổng diện tích (thể tích) của tất cả các bất khả phân được lấy đồng thời (tham khảo Howard Eves, 1993, tr.121-125).

Phương pháp các bất khả phân của Cavaleiri có những mặt hạn chế của nó. Thứ nhất, về mặt lý luận thì việc dựa vào các bất khả phân (đường thẳng không có bề rộng, mặt phẳng không có bề dày) chưa cho phép ông phán đoán gì về diện tích hay thể tích của hình ban đầu. Thứ hai là sự thiếu rõ ràng của khái niệm các bất khả phân. Cũng vì thế mà không thể vận dụng trực tiếp phương pháp này vào việc giải bài toán cầu trường, vì các bất khả phân ở đây (các điểm) không có kích thước. Thứ ba, cách giải các bài toán cầu phương của Cavaleiri quá cồng kềnh vì đã không sử dụng phương pháp tính toán và hệ thống kí hiệu của đại số.

Nhiều người đã cố gắng khắc phục những hạn chế của phương pháp do Cavaleiri đề nghị. Chẳng hạn, nhà bác học người Pháp Pascal (1623-1662) cũng dùng thuật ngữ "tổng các đường" nhưng lưu ý rằng đó là tổng vô hạn các hình chữ nhật với chiều cao là tung độ của điểm thuộc đường cong và đáy vô cùng bé, rồi biến đổi tập hợp các bất khả phân thành tổng các vô cùng bé (tuy nhiên, Pascal không chính xác hóa được khái niệm này), sau đó lập mối liên hệ giữa phép cầu phương các hàm mũ với tổng các chuỗi $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ (k là số tự nhiên). Như thế, Pascal đã làm phương pháp các bất khả phân trở nên đơn giản hơn nhờ cách số học hóa bài toán hình học mà ông muốn giải quyết

1.4. Phương pháp tính tổng trực tiếp trên các đại lượng vô cùng bé

Ở Châu Âu, vào thế kỷ 16 -17, sự phát triển của một số khoa học khác lại đặt toán học trước các bài toán về cầu phương, cầu tích và xác định trọng tâm. Nhiều nhà bác học quay trở lại nghiên cứu các công trình của Archimède nhằm tìm ra một phương pháp tổng quát hay phát hiện những khái niệm chung, những tính chất ẩn sâu trong nền tảng các chứng minh cho từng trường hợp riêng lẻ của ông.

Trong số những người Châu Âu cận đại sớm phát triển tư tưởng về khái niệm vô cùng bé liên quan tới phép tính tích phân phải đặc biệt nói đến Iohan Kepler (1571-1630). Khi nghiên cứu các công trình của Archimède, giống như những người thời đó ít kiên tâm về sự khắt khe, chu đáo của phương pháp vét kiệt, Kepler thích một cách thức mang tính trực giác hơn - *tính tổng trực tiếp trên các đại lượng vô cùng bé*. Ông biểu diễn một hình dưới dạng tổng vô hạn các phần nhỏ của nó. Chẳng hạn, hình tròn gồm một số lớn vô hạn các quạt tròn vô cùng nhỏ mà mỗi hình có thể coi như là một tam giác cân. Mọi tam giác đều có chiều cao như nhau (bằng bán kính của hình tròn) và tổng các đáy của chúng bằng độ dài đường tròn. Từ công thức tính diện tích tam giác, Kepler suy ra rằng diện tích hình tròn bằng nửa tích giữa bán kính và độ dài của đường tròn. Phương pháp này được Kepler mở rộng sang cả những những vật thể tròn xoay và ông đã tính được nhiều diện tích, thể tích.

Tuy nhiên, đa số kết quả mà ông nêu ra đều thu được nhờ vào sự hình dung trực quan và những lý luận thiếu chặt chẽ với lý do là "*Archimède đã chứng minh điều đó hoàn toàn chặt chẽ*".

1.5. Phương pháp lập tổng trên và tổng dưới

• Gần nhất với phép lấy tích phân ngày nay là phương pháp về các hình nội tiếp và ngoại tiếp, cũng do Archimède là người đầu tiên trình bày, trong các tác phẩm "Về hình cầu và hình trụ", "Về các đường xoắn", "Về các cônôit và phỏng cầu" của ông.

Để tính diện tích một hình, Archimède đã chia hình ra thành từng phần, mỗi phần được xấp xỉ bằng các hình nội và ngoại tiếp mà diện tích của chúng là có thể tính được. Ông lập luận: diện tích hình ban đầu nhỏ hơn tổng diện tích các hình ngoại tiếp (*tổng trên*) và lớn hơn tổng diện tích các hình nội tiếp (*tổng dưới*). Đối với từng bài toán cụ thể, ông chọn các hình xấp xỉ trên và dưới sao cho hiệu các diện tích có thể nhỏ tùy ý, từ đó suy ra diện tích cần tìm.

Trong phương pháp của Archimède ta thấy đã có những tư tưởng của tích phân: chia hình ra thành từng miếng nhỏ, xấp xỉ trên và dưới từng miếng nhỏ rồi lấy tổng của những xấp xỉ đó. *Tổng trên* và *tổng dưới* ở đây rất gần với tổng Darboux (1842-1917) trên và dưới của tích phân hiện đại. Nhưng, phương pháp tích phân cổ đại dựa trên khái niệm diện tích một cách trực giác, không được định nghĩa chặt chẽ, và không sử dụng các công cụ đại số – số học. Những khái niệm tổng quát thiết yếu như giới hạn, tích phân, tổng vô hạn, v.v. chưa được đưa vào.

Hơn nữa, cũng như các nhà toán học cổ đại khác, Archimède chỉ giải được bài toán tính diện tích cho từng trường hợp riêng lẻ mà không phân tích và phát biểu cơ sở lý thuyết tổng quát. Hình thức trình bày chỉ thuần bằng lời nói, làm cho việc nghiên cứu các công trình của ông thêm khó khăn.

• Phương pháp của Archimède về sau được hoàn thiện bởi những nhà toán học như Pascal, Fermat. Chẳng hạn, để tính diện tích hình viên phân xác định bởi $0 \le x \le \alpha$; $0 \le y \le kx^n$($\alpha \in R^+$ cho trước, n là số nguyên dương), năm 1636, nhà bác học Pháp Pierre Fermat (1601-1665) chia diện tích ra thành những dải hẹp bằng các tung độ *cách đều*, tính các tổng trên, tổng dưới, rồi tăng số điểm chia ra vô hạn và sau đó tiến hành cầu phương, mà thực chất là tìm

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+1^{mp}}{m^{p+1}}=\frac{1}{n+1}.$$

Khoảng năm 1644, ông mở rộng kết quả cho trường hợp n là phân số và số âm, bằng cách lấy tung độ ở những điểm mà hoành độ (không cách đều) làm thành cấp số nhân. Fermat gọi phương pháp này là *phương pháp Loga*.

Rõ ràng là *phương pháp Loga* nằm trong phạm trù của phương pháp *lập các tổng trên và tổng dưới*. Tuy nhiên, nếu như Archimède chỉ giải quyết từng bài toán riêng lẻ thì Fermat, trên quan điểm của hình học giải tích mà ông là người sáng lập cùng với Descartes, đã xây dựng được một phương pháp mang tính khái quát cao và cho phép phát triển khía cạnh thuật toán trên các vô cùng bé.

2. NHỮNG BÀI TOÁN GẮN LIỀN VỚI CỘI NGUỒN CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN

Một điều đáng chú ý là về mặt lịch sử thì thứ tự xuất hiện hai phép tính vi phân và tích phân khác với cách trình bày chúng trong các giáo trình toán học ngày nay: trong thực tế, phép tính tích phân ra đời trước phép tính vi phân.

Phép tính thứ hai này sinh ra từ việc giải bài toán vẽ tiếp tuyến của các đường cong, tìm các giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số, và tìm vận tốc tức thời của một chuyển động. Mặc dầu việc xem xét các vấn đề như vậy có thể thấy từ thời Hi Lạp cổ đại, người ta thừa nhận rằng tiền thân của phép tính vi phân thực sự bắt nguồn từ những tư tưởng mà Fermat đã hình thành vào năm 1629.

2.1. Phương pháp xác định cực đại và cực tiểu của Fermat

Fermat là người đầu tiên có những ý tưởng cơ bản rất gần gũi với phép lấy đạo hàm ngày nay. Cụ thể là xuất phát từ *nguyên lý dừng* của Kepler ("*số gia của một hàm số sẽ trở nên nhỏ tới mức triệt tiêu tại lân cận của một giá trị cực đại hoặc cực tiểu thường*") Fermat đã đưa ra một phương pháp để xác định các cực đại và cực tiểu của hàm số f. Theo ký hiệu hiện đại, phương pháp của ông có thể được mô tả sau:

- Với h là rất nhỏ, cho f(x+h) = f(x)
- Đơn giản những số hạng giống nhau ở hai vế, rồi chia hai vế cho h.

Bỏ đi những số hạng có chứa h (tức là xem như h = 0) và từ đó xác định được những giá trị x mà tại đó f đạt cực đại hay cực tiểu.

Về mặt logic, cách lập luận của Fermat còn nhiều chỗ chưa rõ ràng : ban đầu h là một số hữu hạn khác không (do đó, ông tiến hành chia cho h), nhưng sau đó lại cho h = 0 mà không đưa ra một cách giải thích hợp lí. Rõ ràng là ông gặp khó khăn với phép lấy giới hạn và khái niệm vô cùng bé - vào thời kỳ này hai khái niệm đó chưa được định nghĩa chính xác. Tuy nhiên, phải nói rằng ở đây đã hiện hữu tư tưởng về khái niệm vô cùng bé (mặc dầu Fermat không nói nhưng h đóng vai trò số gia rất bé), giới hạn $h \to 0$ (một số mà lúc thì nó hữu hạn rất nhỏ rồi tự nhiên nó lại có thể bằng không) và phép lấy đạo hàm của một hàm số (về cơ bản thì các bước mà Fermat thực hiện tương tự như quá trình tìm đạo hàm f'(x) của hàm số f(x) và cho f'(x) = 0 $\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0\right)$.

2.1. Phương pháp xác định tiếp tuyến của Fermat

• Fermat là người đầu tiên đưa ra một cách hiểu mới về tiếp tuyến - *đó là vị trí giới hạn của cát tuyến khi hai điểm nó cắt đường cong tiến tới chỗ trùng nhau* - tất nhiên lúc đó khái niệm không được định nghĩa rõ ràng theo ngôn ngữ của giới hạn.

Với cách hiểu này, ông đã giải bài toán tìm tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại M(x;y), theo một quy trình tương tự với quy trình đã được sử dụng trong lời giải bài toán xác định cực đại, cực tiểu. Chính ông đã nhấn mạnh tính thống nhất của các phương pháp tính toán trong hai bài toán trên. Nhưng ông không nêu bật được khái niệm cơ bản của phép tính vi phân - đạo hàm và vi phân, cũng như không lưu ý tới mối quan hệ giữa những bài toán này và bài toán cầu phương đã có trước đó.

Người ta cho rằng có lẽ là do sử dụng những công cụ đại số khá khó hiểu của Viete với các ký hiệu cồng kềnh của nó, Fermat đã không bước thêm được bước cuối cùng, dù không lớn, trên con đường xây dựng phép tính vi phân. Tuy nhiên, phải công nhận rằng ông đã có đóng góp quan trọng cho sự phát triển các ý tưởng của phép tính này.

3. MỐI LIÊN HỆ GIỮA PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN

3.1. Bài toán dẫn đến sự phát hiện ra mối liên hệ

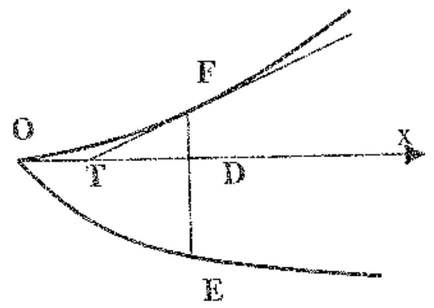
Cùng với bài toán dựng tiếp tuyến, trong toán học cũng như các lĩnh vực khoa học khác xuất hiện những bài toán dạng: *xác định các đường cong xuất phát từ tính chất chung của tất cả các tiếp tuyến với chúng.* Vấn đề này được phát biểu một cách tổng quát như sau: *Tìm* $y = f(x)$ *từ điều kiện* $f_1(x, y, y') = 0$. Theo ngôn ngữ hiện đại, giải bài toán này tương đương với việc giải phương trình vi phân cấp một có ẩn hàm y.

Descartes (1596-1650) là người đầu tiên bắt tay vào việc tìm một phương pháp tổng quát để giải những bài toán loại này. Ông tiến hành phân tất cả các đường cong đại số theo loại, rồi tìm các tiếp tuyến của chúng và thử xem những tiếp tuyến này có thoả mãn các tính chất đã cho hay không.

Về phương diện thực hành, phương pháp của Decartes tỏ ra không khả thi. Vấn đề phân loại đường cong gây cho ông một số rắc rối khi giải nhiều bài toán. Tuy nhiên, *chính là thông qua việc giải những bài toán xác định đường* *cong nêu trên mà dần dần tính chất ngược nhau của loại bài toán này và loại bài toán vạch tiếp tuyến đã được chỉ rõ.*

3.2. Hình thành mối liên hệ giữa phép tính vi phân và tích phân

Nhà toán học Anh Isacc Barrow (1630-1677) được xem là người đầu tiên nhận rõ mối liên hệ giữa bài toán xác định tiếp tuyến và bài toán cầu phương. Theo cách ký hiệu hiện đại, ông đã chỉ ra được rằng, từ đẳng thức $y = a + \int_0^x z dx$ suy ra dy=zdx, và ngược lại.



Cụ thể, Barrow xét hai đường cong OF và OE có phương trình tương ứng là y = y(x) và v = v(x), F(x; y), E(x; v), liên hệ với nhau bởi điều kiện $DF.R = S_{ODE}$, (viết theo ký hiệu ngày nay là $R.y = \int_0^x v dx$), với R là một số cho trước, còn D, T tương ứng là giao điểm của ox với EF và tiếp tuyến tại F.

Ông đã chứng minh được đẳng thức $R\dfrac{DF}{DT} = DE$ (nghĩa là $R\dfrac{dy}{dx} = v$) bằng hai phương pháp khác nhau - một dựa vào quan điểm động học và một là phương pháp hình học trong đó có sử dụng công thức tính diện tích hình thang cong.

Như thế, Barrow đã nhận ra mối quan hệ thuận nghịch giữa phép tính vi phân và tích phân. Tuy nhiên, việc chưa thiết lập được dưới dạng tổng quát những khái niệm cơ bản của phép tính vi – tích phân, việc trình bày mối liên hệ này bằng ngôn ngữ hình học đã ngăn cản ông diễn đạt một cách tường minh ý tưởng của mình.

Kể từ khám phá mới này của Barrow, hai phép tính vi phân, tích phân và mối quan hệ giữa chúng luôn gắn kết chặt chẽ với nhau trong những công trình nghiên cứu của các nhà toán học.

3.3. Xuất hiện tường minh các khái niệm tích phân, vi phân và quan hệ giữa chúng

Mặc dầu có nhiều nhà toán học dần tiếp cận với các phép tính vi – tích phân, nhưng Newton (1642-1727) và Leibniz (1646-1716) mới được coi là những người phát minh ra chúng.

• Theo Newton xem một đường như được sinh ra bởi chuyển động liên tục của một điểm. Các đại lượng vô cùng bé, tương đương với các số gia vô cùng bé của Fermat được Newton gọi là các *moment*. Giả sử S là diện tích đã biết của một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số không âm $y= f(x)$, các trục tọa độ và đường thẳng $x = x_0$ ($x_0 > 0$). Newton xét moment diện tích oS (số gia ΔS của diện tích) khi x_0 tăng thêm một lượng vô cùng bé ký hiệu o (số gia Δx_0 của x_0). Ông nhận thấy tỉ số biến thiên của diện tích ($\frac{oS}{o}$) bằng $f(x_0)$. Kết quả này phát biểu theo ngôn ngữ hiện đại là $S'(x_0) = f(x_0)$.

Để xác định phần diện tích S thì Newton lại đảo ngược các thao tác lấy đạo hàm, nêu rõ mối liên hệ giữa bài toán tính diện tích và bài toán đạo hàm. Trong các nghiên cứu của mình, Newton đặt đạo hàm vào vị trí trung tâm của tiến trình. Tích phân, theo quan niệm của ông, trước hết là tích phân không xác định, như là nguyên hàm bất kỳ được tính bằng cách đảo ngược kết quả của bài toán tính đạo hàm. Tuy nhiên, người ta không tìm thấy ở ông các định nghĩa tường minh về đạo hàm và tích phân cũng như *moment* hay số gia vô cùng bé.

• Nếu như Newton chọn khái niệm đầu tiên là vận tốc thì ở Leibniz khái niệm đầu tiên là tiếp tuyến. Các ký hiệu dx và dy đã được đưa ra. Theo ông, dx - *vi phân của đối số*, được xem như một đại lượng hoàn toàn tùy ý. *Vi phân của hàm số* – dy, được xác định qua dx.

Lúc đầu, Leibniz có ý định tránh các *vô cùng bé*. Các vi phân được hiểu là những đại lượng tỉ lệ với các số gia tức thời của đối số và hàm số. Về sau, các *vi phân được xác định như các hiệu vô cùng bé*. Về cơ bản, *vô cùng bé*, theo Leibniz, là hiệu hai trị gần nhau của đại lượng. Từ đó vô cùng bé được ký hiệu bằng d (chữ đầu của *differentia* - có nghĩa là hiệu). Đạo hàm được hiểu là tỷ số các vi phân dy và dx.

Khác với Newton, tích phân của Leibniz trước hết là tích phân xác định, dưới dạng tổng vô hạn các vô cùng bé vi phân mà một đại lượng nào đó có thể phân chia ra. Như vậy, Leibniz lấy vi phân làm khái niệm trung tâm, từ đó ông định nghĩa đạo hàm và tích phân. Chính ông đã đưa ra ký hiệu $\int$ và chứng minh rằng $\int dy = y$.

• Cauchy (1789-1975) là người đầu tiên đưa ra một định nghĩa chính xác của tích phân (1823). Ông dùng ký hiệu $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ do Fourier đề nghị để chỉ tích phân xác định. Ông đã chứng minh được rằng F'(x) = f(x), trong đó $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, thiết lập tường minh mối liên hệ giữa việc tính tích phân và việc lấy đạo hàm.

Về mặt toán học thì các công thức $S'(x_0) = f(x_0)$ của Newton, $\int dy = y$ của Leibniz và F'(x) = f(x) của Cauchy rất gần gũi nhau. Hơn nữa, cũng từ phương pháp giải bài toán cầu phương, cầu tích đã sử dụng mà họ có thể chứng minh được tính rằng $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ với F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) liên tục trên [a ; b]. Công thức này mang lại một phương tiện cơ bản để tính các tích phân xác định.

• Euler, Lagrange, D'Alembert, và nhiều người khác đã cố gắng làm cho phép tính vi - tích phân trở nên chặt chẽ hơn. Năm 1797, Lagrange tìm cách xây dựng toàn bộ phép tính vi phân mà không dùng đến khái niệm vô cùng bé, có tính chất thuần túy đại số, bằng cách biểu diễn hàm dưới dạng khai triển ra chuỗi lũy thừa và xác định đạo hàm như là hệ số ở số hạng thứ hai của khai triển ấy.

• Năm 1854, Riemann (1826-1866), trong luận văn của mình, đã xây dựng một lý thuyết tích phân tổng quát hơn của Cauchy, nhằm khai triển một cách chính xác các hàm số có vô hạn điểm gián đoạn thành chuỗi Fourier.

• Sau này, khái niệm tích phân tiếp tục được hoàn thiện và phát triển nhờ các công trình của nhiều nhà toán học như Lebesgue, Radon, Riesz, Stieltjes, Denjoy, Borel, Khintchine, Kolmogorov,...

Tuy nhiên, trong nền tảng này vẫn còn lỗ hổng: vẫn chưa đủ cơ sở chặt chẽ cho chính khái niệm số thực và việc chứng minh tính liên tục của phạm vi các số thực. Điều này chỉ được thực hiện vào cuối thế kỷ 19.

KẾT LUẬN

Trong lịch sử, hai phép tính vi phân và tích phân đã được phát hiện hoàn toàn độc lập với nhau. Mầm mống của phép tính tích phân đã có từ thời Hy Lạp cổ đại, trong các công trình của Archimède, liên quan đến vấn đề cầu phương, cầu tích, cầu trường. Đứng trước một hình phẳng cụ thể, mỗi nhà toán học có một quan niệm riêng về diện tích và kỹ thuật tính đặc thù. Trải qua hàng ngàn năm, người ta mới tìm ra một phương pháp tổng quát cho phép giải quyết vấn đề, và khái niệm tích phân mới xuất hiện tường minh, vì sự ra đời của nó (cũng như của phép tính vi phân) đòi hỏi các kiến thức về đại lượng biến thiên, vô cùng bé và giới hạn.

Vào thế kỷ 17, hoàn toàn độc lập với phép tính tích phân, những tư tưởng của phép tính vi phân mới được hình thành qua nghiên cứu của Fermat trên việc giải các bài toán tìm tiếp tuyến, cực đại, cực tiểu của hàm số và việc nghiên cứu các chuyển động. Fermat đã nhấn mạnh tính thống nhất của phương pháp giải các bài toán đó, nhưng không lưu ý tới mối quan hệ giữa chúng với vấn đề cầu phương. Chính từ việc xác định đường cong khi biết tiếp tuyến của nó mà Barrow đã thiết lập được cầu nối giữa bài toán cầu phương và bài toán dựng tiếp tuyến. Quan hệ thuận nghịch giữa hai phép tính vi phân, tích phân thể hiện rất rõ qua các công thức do Newton, Leibniz, Cauchy chứng minh, mà ngày nay ta gọi là định lý cơ bản của hai phép tính này. Mối liên hệ đó dẫn đến một sự tương ứng giữa các tính chất của hai phép tính - từ tính chất của phép tính này ta chứng minh được tính chất tương ứng của phép tính kia và ngược lại.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.M. Fichtengôn (1974), *Cơ sở giải tích toán học*, tập 1 (bản tiếng Việt) NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

[2] Howard (1993), *Giới thiệu lịch sử toán học* (bản tiếng Việt) NXB KH và KT.

[3] K.A. Rưp-ni-côp (1967), *Lịch sử toán học*, tập I, II (bản tiếng Việt), NXBGD Hà nội.

[4] Lê Thị Hoài Châu (2002), *Khoa học luận và didactic*, *Tạp chí Nghiên cứu khoa học*, 32, ĐHSP tp Hồ Chí Minh.

[5] Lê Thị Hoài Châu (2004), *Khai thác lịch sử toán trong dạy-học khái niệm tích phân xác định*, *Tạp chí Nghiên cứu khoa học*, số 2 (36) /2004, ĐHSP tp Hồ Chí Minh.

[6] Trần Thị Mỹ Dung (tháng 5/2004), *Tích phân và mối quan hệ của nó với đạo hàm*, luận văn tốt nghiệp đại học sư phạm, ngành toán. Giáo viên hướng dẫn: Lê Thị Hoài Châu.

Tóm tắt:

Phép tính tích phân và vi phân trong lịch sử

Bài báo này nhắm đến việc làm rõ đặc trưng khoa học luận của các khái niệm vi-tích phân (những bài toán gắn liền với khái niệm, các phương pháp giải quyết, các điều kiện cho phép khái niệm ra đời) và mối liên hệ giữa chúng. Những kết quả này là cơ sở cho việc hiểu sự chuyển đổi didactic đã được thực hiện trong mỗi sách giáo khoa và thiết kế các tình huống dạy-học hai khái niệm đó.

Abstract:

Integral and differential in the history

This article identifies the characteristies of epistomology of the concepts of intergral and differential (problems with the concepts, the solutions, conditions to allow the concepts to be generated) and their relations. These results are the foundations to understand didactic transformation implimented in text books and designs of teaching - learning situations for those two concepts.