VA CHẠM CỦA MỘT VẬT RẮN VÀ MỘT THANH ĐÀN HỒI NHỚT TUYẾN TÍNH

NGUYỄN THÀNH LONG[1], LÊ VĂN ÚT [2],
NGUYỄN THỊ THẢO TRÚC [3]

1. GIỚI THIỆU

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán: Tìm một cặp hàm (u,Q) thỏa

(1.1) $\quad u_{tt}-\mu(t)u_{xx}+F(u,u_t)=f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T,$

(1.2) $\quad u(0,t)=q(t),$

(1.3) $\quad -\mu(t)u_x(1,t)=Q(t),$

(1.4) $\quad u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),$

trong đó $F(u,u_t)=Ku+\lambda\, u_t$, với K,λ là các hằng số và u_0, u_1, f, q, μ là các hàm cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ rõ ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biến chưa biết $Q(t)$ thỏa một phương trình tích phân

(1.5) $$Q(t)=K_1(t)u(1,t)+\lambda_1(t)u_t(1,t)-g(t)-\int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó g, k, K_1, λ_1 là các hàm cho trước.

Trong trường hợp $K=\lambda=0, q(t)=0,$ Santos [8] đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm bài toán (1.1), (1.2), (1.4) liên quan đến điều kiện biên thuộc loại memory tại $x=1$ như sau

(1.6) $$u(1,t)+\int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds=0,\quad t>0.$$

Sử dụng toán tử Volterra nghịch đảo, Santos đã biến đổi điều kiện biên (1.6) thành (1.3), (1.5) với $K_1(t)=\dfrac{g'(0)}{g(0)},\ \lambda_1(t)=\dfrac{1}{g(0)}$ là các hằng số dương.

---

[1] Tiến sĩ Khoa Toán-tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[2] Khoa học Tự nhiên, Đại học Tại chức Cần Thơ.

[3] Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ.

Trong trường hợp $\lambda_1(t) \equiv 0, K_1(t) = h \geq 0, \mu(t) = 1,$ bài toán (1.1)-(1.5) được xây dựng từ bài toán (1.1)-(1.4) trong đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Q(t)$ thỏa một bài toán Cauchy cho một phương trình vi phân thường

(1.7) $$\begin{cases} Q''(t) + \omega^2 Q(t) = hu_{tt}(1,t),\ 0 < t < T, \\ Q(0) = Q_0,\ \ Q'(0) = Q_1, \end{cases}$$

trong đó $h \geq 0, \omega > 0, Q_0, Q_1$ là các hằng số cho trước [6].

Trong [1], N.T. An và N.D. Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.4), (1.7) với $u_0 = u_1 = Q_0 = q = 0$ và $F(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, với $K \geq 0, \lambda \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp này bài toán (1.1)-(1.4) và (1.7) là một mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính đặt trên nền cứng [1].

Từ bài toán (1.7) ta biểu diễn hàm $Q(t)$ theo $Q_0, Q_1, \omega, h, u_{tt}(1,t)$ và sau đó lấy tích phân từng phần ta thu được

(1.8) $$Q(t) = hu(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó

(1.9) $$g(t) = -\left(Q_0 - hu_0(1)\right)\cos\omega t - \frac{1}{\omega}\left(Q_1 - hu_1(1)\right)\sin\omega t,$$

(1.10) $$k(t) = h\omega\sin\omega t.$$

Trong [2] Bergounioux, Long và Dinh đã nghiên cứu bài toán (1.1), (1.4) với các điều kiện biên (1.2), (1.3) thay bởi

(1.11) $$u_x(0,t) = hu(0,t) + g(t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

(1.12) $$u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0,$$

trong đó

(1.13) $$g(t) = \left(Q_0 - hu_0(0)\right)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(Q_1 - hu_1(0)\right)\sin\omega t,$$

(1.14) $$k(t) = h\omega\sin\omega t,$$

với $h \geq 0,\ \omega > 0, Q_0, Q_1, K, \lambda,\ K_1, \lambda_1$ là các hằng số cho trước.

Bài báo gồm hai phần chính. Trong phần 1 chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lý luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và tính compact. Sự khó khăn gặp phải ở đây là điều kiện biên tại $x=1$. Để giải quyết sự khó khăn này, các giả thiết mạnh hơn về điều kiện đầu u_0 và u_1 sẽ được thành lập. Ta chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong các bài báo [3, 7] không sử dụng được trong bài toán này và trong [2, 5, 6]. Trong phần 2 chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5) đến cấp $N+1$ theo (K,λ), với (K,λ) đủ nhỏ. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1-3, 5-9].

2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT

Đặt $\Omega=(0,1), Q_T=\Omega\times(0,T), T>0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian thông dụng: $C^m(\overline{\Omega}), L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$. Ta ký hiệu $W^{m,p}=W^{m,p}(\Omega),\ L^p=W^{0,p}(\Omega),\ H^m=W^{m,2}(\Omega), 1\le p\le\infty,\ m=0,1,...$

Chuẩn L^2 được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta ký hiệu $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của một không gian Banach X và bởi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta ký hiệu bởi $L^p(0,T;X),\ 1\le p\le\infty$ cho không gian Banach các hàm $u:(0,T)\to X$ đo được, sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}<\infty \quad \text{với } 1\le p\le\infty,$$

và

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}=\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\|u(t)\|_X \quad \text{với } p=\infty.$$

Ký hiệu $u(t), u'(t)=u_t(t), u''(t)=u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$ để chỉ $u(x,t), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt.

Ta đặt

(2.1) $\quad V=\{v\in H^1(0,1): v(0)=0\}$,

(2.2) $\quad a(u,v)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx.$

V là một không gian con đóng của H^1 và trên V, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V=\sqrt{a(v,v)}=\|v_x\|$ là các chuẩn tương đương.

Ta lập các giả thiết sau:

(H_1) $K, \lambda \in IR$,

(H_2) $u_0 \in H^2$ và $u_1 \in H^1$,

(H_3) $g, K_1, \lambda_1 \in H^1(0,T)$, $\lambda_1(t) \geq \lambda_0 > 0$, $K_1(t) \geq 0$,

(H_4) $k \in H^1(0,T)$,

(H_5) $\mu \in H^2(0,T)$, $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$,

(H_6) $f, f_t \in L^2(Q_T)$,

(H_7) $q \in H^3(0,T)$.

Ta sẽ thành lập lại bài toán với điều kiện biên thuần nhất tại $x = 0$ từ bài toán (1.1)-(1.5) như sau. Với $x \in [0,1]$ và $t \geq 0$, ta đặt:

$$v(x,t) = u(x,t) - q(t), \tag{2.3}$$

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - Kq(t) - \lambda\ q'(t) - q''(t), \tag{2.4}$$

$$\tilde{g}(t) = g(t) - K_1(t)q(t) - \lambda_1(t)q'(t) + \int_0^t k(t-s)q(s)ds, \tag{2.5}$$

$$v_0(x) = u_0(x) - q(0),\ v_1(x) = u_1(x) - q'(0), \tag{2.6}$$

cùng với các điều kiện tương thích

$$\begin{cases} u_0(0) = q(0), \\ -\mu(0)u_0'(1) = K_1(0)u_0(1) + \lambda_1(0)u_1(1) - g(0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Khi đó bài toán (1.1)-(1.5) tương đương với bài toán biên - ban đầu sau:

$$\begin{cases} v_{tt} - \mu(t)v_{xx} + F(v, v_t) = \tilde{f}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) = 0, \quad -\mu(t)v_x(1,t) = R(t), \\ v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \\ R(t) = K_1(t)v(1,t) + \lambda_1(t)v_t(1,t) - \tilde{g}(t) - \int_0^t k(t-s)v(1,s)ds. \end{cases} \tag{2.8}$$

Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 1. *Cho $T > 0$. Giả sử $(H_1) - (H_7)$ đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu (v, R) của bài toán (2.8) sao cho*

$$\begin{cases} v \in L^\infty(0,T; V \cap H^2),\ v_t \in L^\infty(0,T; H^1),\ v_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2), \\ v(1,\cdot) \in H^2(0,T), \quad R \in H^1(0,T). \end{cases} \tag{2.9}$$

Chú thích 1. Từ (2.9), thành phần v trong nghiệm yếu (v, R) của bài toán (2.8) thỏa

$$v \in C^0(0,T; V) \cap C^1(0,T; L^2) \cap L^\infty(0,T; V \cap H^2). \tag{2.10}$$

Chứng minh Định lý 1. Chứng minh gồm 4 bước.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin. Giả sử $\{w_j\}$ là một cơ sở đếm được của $V \cap H^2$. Ta tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (2.8) dưới dạng

(2.11) $$v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j,$$

trong đó các hàm hệ số c_{mj} thỏa hệ phương trình vi phân thường

(2.12) $$\begin{aligned} \langle v_m''(t), w_j\rangle + \mu(t)\langle v_{mx}(t), w_{jx}\rangle + R_m(t) w_j(1) + \langle F(v_m(t), v_m'(t)), w_j\rangle \\ = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle, \ 1 \le j \le m, \end{aligned}$$

(2.13) $$R_m(t) = K_1(t) v_m(1,t) + \lambda_1(t) v_m'(1,t) - \int_0^t k(t-s) v_m(1,s)ds - \tilde{g}(t),$$

(2.14) $$\begin{cases} v_m(0) = v_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{mj} w_j \to v_0, & \textit{mạnh trong } H^2, \\ v_m'(0) = v_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{mj} w_j \to v_1, & \textit{mạnh trong } H^1. \end{cases}$$

Từ các giả thiết của định lý 1, hệ (2.12)-(2.14) có nghiệm (v_m, R_m) trên một khoảng nào đó $[0, T_m]$. Các đánh giá tiên nghiệm sau này cho phép ta lấy $T_m = T$ với mọi m.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm.

Đánh giá tiên nghiệm I. Thay thế (2.13) vào (2.12) và nhân phương trình thứ j của (2.12) với $c_{mj}'(t)$, kế tiếp, lấy tổng theo j, sau đó tích phân từng phần theo biến thời gian ta được

(2.15) $$\begin{aligned} S_m(t) = {} & S_m(0) + K\|v_{0m}\|^2 - 2g(0)v_{0m}(1) - K\|v_m(t)\|^2 - 2\lambda\int_0^t \|v_m'(s)\|^2 ds \\ & + \int_0^t \mu'(s)\|v_{mx}(s)\|^2 ds + \int_0^t [K_1'(s) - 2k(0)] v_m^2(1,s) ds \\ & + 2\left(v_m(1,t)\int_0^t k(t-s) v_m(1,s)ds + \tilde{g}(t) v_m(1,t)\right) \\ & - 2\int_0^t v_m(1,\tau)d\tau \left(\tilde{g}'(\tau) + \int_0^\tau k'(\tau-s) v_m(1,s)ds\right) + 2\int_0^t \langle \tilde{f}(s), v_m'(s)\rangle ds, \end{aligned}$$

trong đó

(2.16) $$S_m(t) \equiv \|v_m'(t)\|^2 + \mu(t)\|v_{mx}(t)\|^2 + K_1(t)v_m^2(1,t) + 2\int_0^t \lambda_1(s)|v_m'(1,s)|^2 ds.$$

Dùng các giả thiết $(H_1)-(H_3)$, (H_5), ta suy ra rằng

(2.17) $$2S_m(0) + 6|K|\|v_{0m}\|^2 + 4|\tilde{g}(0)v_{0m}(1)| \le C_1 \text{ với mọi } m,$$

(2.18) $$C_1 + \frac{8}{\mu_0}\left(\tilde{g}^2(t) + \int_0^t |\tilde{g}'(s)|^2 ds\right) + 2\int_0^t \|\tilde{f}(s)\|^2 ds \le M_T^{(1)} \quad \text{với mọi } t \in [0,T],$$

(2.19) $$(3 + 4|\lambda| + 4t|K|) + \frac{8}{\mu_0^2}\int_0^t \left(k^2(\theta) + t|k'(\theta)|^2\right) d\theta \le M_T^{(2)} \text{ với mọi } t \in [0,T],$$

trong đó C_1 là một hằng số chỉ tùy thuộc vào $\mu(0), K_1(0), \tilde{g}(0), K, v_0, v_1$ và $M_T^{(i)}, i = 1,2$ là hằng số chỉ tùy thuộc vào T. Khi đó, sau các bước đánh giá và tính toán, ta thu được từ (2.15)-(2.19) rằng

(2.20) $$S_m(t) \le M_T^{(1)} + \int_0^t N_T^{(1)}(s) S_m(s) ds,$$

trong đó

(2.21) $$N_T^{(1)}(s) = \frac{2}{\mu_0}(|\mu'(s)| + |K_1'(s) - 2k(0)|) + M_T^{(2)}, \quad N_T^{(1)} \in L^1(0,T).$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được

(2.22) $$S_m(t) \le M_T^{(1)} \exp\left(\int_0^t N_T^{(1)} ds\right) \le M_T, \text{ với mọi } t \in [0,T].$$

Đánh giá tiên nghiệm II. Bây giờ ta đạo hàm (2.12) theo t, sau đó, nhân phương trình thứ j vừa nhận được bởi $c_{mj}''(t)$, kế tiếp, lấy tổng theo j, sau đó tích phân từng phần theo biến thời gian và sắp xếp lại các số hạng ta được

(2.23)

$$X_m(t) \le 2X_m(0) + 4|\mu'(0)|\|v_{0mx}\| + 6|K|\|v_{1m}\|^2 + N_T^{(2)}(t) + \int_0^t \tilde{N}_T^{(1)}(s) X_m(s) ds,$$

trong đó

(2.24) $$X_m(t) = \|v_m''(t)\|^2 + \mu(t)\|v_{mx}'(t)\|^2 + 2\int_0^t \lambda_1(s)|v_m''(1,s)|^2 ds,$$

(2.25)

$$N_T^{(2)}(t) = \frac{2}{\beta\ \mu_0^2} M_T \left|\mu'(t)\right|^2 + \frac{2M_T}{\beta\ \mu_0} \int_0^t \left|K_1'(s) - k(0)\right|^2 ds + \frac{2M_T}{\beta\ \mu_0} t \left(\int_0^t \left|k'0\right| d\theta \right)^2$$

$$+ \frac{2}{\mu_0^2} M_T \int_0^t \left|\mu''(s)\right|^2 ds + \frac{2}{\beta} \int_0^t \left|\widetilde{f}'(s)\right|^2 ds + \frac{2}{\beta} \int_0^t \left|\widetilde{g}'(s)\right|^2 ds,$$

(2.26)
$$\begin{cases} \widetilde{N}_T^{(1)}(s) = 4T|K| + 4|\lambda| + \dfrac{2}{\beta\,\mu_0}\left|K_1(s) + \lambda_1'(s)\right|^2 + \dfrac{6}{\mu_0}\left|\mu'(s)\right| + 2\beta + 2, \\ \widetilde{N}_T^{(1)} \in L^1(0,T), \end{cases}$$

với $\beta = \dfrac{\lambda_0}{2\lambda_0 + 4}$. Chú ý rằng $H^1(0,T) \quad C^0([0,T])$, ta suy ra từ (2.14) và (H_1), (H_2), (H_5), rằng

(2.27)
$$2X_m(0) + 4\left|\mu'(0)\right|\left\|v_{0mx}\right\|\left\|v_{1mx}\right\| + 6|K|\left\|v_{1m}\right\|^2 + N_T^{(2)}(t) \le \widetilde{M}_T^{(1)},\ \ a.e.,\ t \in [0,T],$$

trong đó $\widetilde{M}_T^{(1)}$ là một hằng số chỉ tùy thuộc vào T. Khi đó, ta suy ra từ (2.22)-(2.27), rằng

(2.28)
$$X_m(t) \le \widetilde{M}_T^{(1)} + \int_0^t \widetilde{N}_T^{(1)}(s) X_m(s) ds.$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (2.28) rằng

(2.29)
$$X_m(t) \le \widetilde{M}_T^{(1)} \exp\left(\int_0^t \widetilde{N}_T^{(1)}(s) ds \right) \le \widetilde{M}_T \quad \forall t \in [0,T].$$

Mặt khác, ta suy ra từ (2.13), (2.22) và (2.29), rằng

(2.30)
$$\left\|R_m'\right\|_{L^2(0,T)}^2 \le M_T,$$

trong đó M_T là một hằng số chỉ tùy thuộc vào T.

Bước 3. Qua giới hạn. Từ (2.13), (2.22), (2.29) và (2.30), ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của $\{(v_m, R_m)\}$ cũng vẫn ký hiệu như là $\{(v_m, R_m)\}$, sao cho

(2.31)
$$\begin{cases} v_m \to v & \textit{trong } L^\infty(0,T;V), & \textit{yếu *}, \\ v_m' \to v' & \textit{trong } L^\infty(0,T;V), & \textit{yếu *}, \\ v_m'' \to v'' & \textit{trong } L^\infty(0,T;L^2), & \textit{yếu *}, \\ v_m(1,\cdot) \to v(1,\cdot) & \textit{trong } H^2(0,T), & \textit{yếu}, \\ Q_m \to \widetilde{Q} & \textit{trong } H^1(0,T), & \textit{yếu}. \end{cases}$$

Do bổ đề compact của J.L.Lions[4: p57] ta suy ra từ (2.31) rằng, tồn tại một dãy con của $\{v_m\}$ vẫn ký hiệu là $\{v_m\}$, sao cho

(2.32) $$\begin{cases} v_m \to v & \textit{mạnh trong } L^2(Q_T), \\ v_m' \to v' & \textit{mạnh trong } L^2(Q_T), \\ v_m(1,\cdot) \to v(1,\cdot) & \textit{mạnh trong } H^1(0,T), \\ v_m'(1,\cdot) \to v'(1,\cdot) & \textit{mạnh trong } C^0[0,T], \\ R_m \to \widetilde{R} & \textit{mạnh trong } C^0[0,T]. \end{cases}$$

Từ (2.13) và $(2.32)_{3\text{-}4}$ ta có

(2.33) $$R_m(t) \to K_1(t)v(1,t) + \lambda_1(t)v'(1,t) - \int_0^t k(t-s)v(1,s)ds - \widetilde{g}(t) \equiv R(t)$$

mạnh trong $C^0[0,T]$.

Do đó, ta suy ra từ $(2.32)_5$ và (2.33), rằng

(2.34) $$R(t) = \widetilde{R}(t).$$

Qua giới hạn trong (2.5)-(2.7) nhờ vào (2.31)-(2.34) ta suy ra rằng (v,R) thỏa bài toán

(2.35) $$\langle v''(t), w\rangle + \mu(t)\langle v_x(t), w_x\rangle + Q(t)w(1) + \langle Kv(t) + \lambda\, v'(t), w\rangle = \langle \widetilde{f}(t), w\rangle, \forall w \in H^1,$$

(2.36) $$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1,$$

(2.37) $$R(t) = K_1(t)v(1,t) + \lambda_1(t)v_t(1,t) - \int_0^t k(t-s)v(1,s)ds - \widetilde{g}(t).$$

Mặt khác, ta suy từ (2.35) và các giả thiết $(H_5)-(H_6)$, rằng

(2.38) $$v_{xx} = \frac{1}{\mu(t)}\left[v'' + Kv(t) + \lambda\, v'(t) - \widetilde{f}\right] \in L^\infty(0,T;L^2).$$

Do đó $v \in L^\infty(0,T;V \cap H^2)$ và sự tồn tại được chứng minh xong.

Bước 4. *Sự duy nhất nghiệm.* Giả sử (v_1,R_1) và (v_2,R_2) là hai nghiệm yếu của bài toán (2.8) sao cho

(2.39) $$\begin{cases} v_i \in L^\infty(0,T;V \cap H^2), \\ v_i' \in L^\infty(0,T;H^1), \; v_i'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ v_i(1,\cdot) \in H^2(0,T), \; R_i \in H^1(0,T), \; i = 1,2. \end{cases}$$

Khi đó (v,R) với $v = v_1 - v_2$ và $R = R_1 - R_2$ thỏa bài toán biến phân

(2.40) $$\begin{cases} \langle v''(t), w\rangle + \mu(t)\langle v_x(t), w_x\rangle + R(t)w(1) + \langle Kv + \lambda\, v', w\rangle = 0,\ \forall w \in H^1, \\ v(0) = v'(0) = 0, \end{cases}$$

trong đó

(2.41) $$R(t) = K_1(t)v(1,t) + \lambda_1(t)v'(1,t) - \int_0^t k(t-s)v(1,s)ds.$$

Chọn $w = v'$ trong $(2.40)_1$, sau đó tích phân theo t, ta được

(2.42) $$S(t) \le \int_0^t q_1(s)S(s)ds,$$

trong đó

(2.43) $$S(t) = \|v'(t)\|^2 + \mu(t)\|v_x(t)\|^2 + K_1(t)v^2(1,t) + 2\int_0^t \lambda_1(s)|v'(1,s)|^2 ds,$$

và

(2.44) $$\begin{cases} q_1(s) = \dfrac{2}{\mu_0}(|\mu'(s)| + |K_1'(s)|) + 2|K|T + 4|\lambda| + \dfrac{8T\lambda_0}{\mu_0}\displaystyle\int_0^T k^2(\theta)d\theta, \\ q_1 \in L^1(0,T). \end{cases}$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (2.44) rằng $S \equiv 0$ và Định lý 1 được chứng minh.

Chú thích 2. Từ định lý 1 ta suy ra (u,Q), với $u = v + q$, $Q = R$ là nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.5) thỏa

(2.45) $$\begin{cases} u \in C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2), \\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T),\quad Q \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Khi đó, ta có định lý sau.

Định lý 2. *Cho $T > 0$. Giả sử $(H_1)-(H_7)$ là đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu (u,Q) của bài toán* (2.8) *thỏa* (2.45).

3. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta giả sử rằng $(u_0, u_1, f, \mu, g, k, K_1, \lambda_1, q)$ thỏa các giả thiết $(H_2)-(H_7)$. Xét bài toán nhiễu sau, trong đó K, λ là các tham số bé,

$|K| \le K_*, |\lambda| \le \lambda_*$: $(P_{K,\lambda})$

$$\begin{cases} Au \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + f(x,t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \\ u(0,t) = q(t), \\ Bu \equiv -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \\ Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds. \end{cases}$$

Gọi $(u_{0,0}, Q_{0,0})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(P_{0,0})$ (như trong Định lý 2) tương ứng với $(K,\lambda) = (0,0)$. nghĩa là:

$$(P_{0,0}) \quad \begin{cases} Au_{0,0} = P_{0,0} \equiv f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_{0,0}(0,t) = q(t), \quad Bu_{0,0} = Q_{0,0}(t), \\ u_{0,0}(x,0) = u_0(x), \quad u'_{0,0}(x,0) = u_1(x), \\ Q_{0,0}(t) = K_1(t)u_{0,0}(1,t) + \lambda_1(t)u'_{0,0}(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u_{0,0}(1,s)ds, \\ u_{0,0} \in C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2), \\ u'_{0,0} \in L^\infty(0,T;H^1), \quad u''_{0,0} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u_{0,0}(1,\cdot) \in H^2(0,T), \quad Q_{0,0} \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Ta xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu $(u_{\gamma_1,\gamma_2}, Q_{\gamma_1,\gamma_2}), (\gamma_1,\gamma_2) \in Z_+^2, 1 \le \gamma_1 + \gamma_2 \le N$, xác định bởi các bài toán sau (như trong Định lý 1)

$$(P_{\gamma_1,\gamma_2}) \quad \begin{cases} Au_{\gamma_1,\gamma_2} = P_{\gamma_1,\gamma_2}, \quad 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \\ u_{\gamma_1,\gamma_2}(0,t) = 0, \quad Bu_{\gamma_1,\gamma_2} = Q_{\gamma_1,\gamma_2}(t), \\ u_{\gamma_1,\gamma_2}(x,0) = u'_{\gamma_1,\gamma_2}(x,0) = 0, \\ Q_{\gamma_1,\gamma_2}(t) = K_1(t)u_{\gamma_1,\gamma_2}(1,t) + \lambda_1(t)u'_{\gamma_1,\gamma_2}(1,t) - \int_0^t k(t-s)u_{\gamma_1,\gamma_2}(1,s)ds, \\ u_{\gamma_1,\gamma_2} \in C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2), \\ u'_{\gamma_1,\gamma_2} \in L^\infty(0,T;H^1), \quad u''_{\gamma_1,\gamma_2} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u_{\gamma_1,\gamma_2}(1,\cdot) \in H^2(0,T), \quad Q_{\gamma_1,\gamma_2} \in H^1(0,T), \end{cases}$$

trong đó

$$P_{0,0} = f(x,t), \; P_{1,0} = -u_{0,0}, \; P_{0,1} = -u'_{0,0},$$

$$P_{\gamma_1,\gamma_2} = -u_{\gamma_1-1,\gamma_2} - u'_{\gamma_1,\gamma_2-1},\ (\gamma_1,\gamma_2) \in Z_+^2,\ 2 \le \gamma_1 + \gamma_2 \le N.$$

Gọi $(u,Q) = (u_{K,\lambda}, Q_{K,\lambda})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(P_{K,\lambda})$. Khi đó, (v,R), với

$$v = u - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} u_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2}, \quad R = Q - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} Q_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2},$$

thỏa bài toán

$$(3.1)\qquad \begin{cases} Av = -Kv - \lambda v_t + E_N(K,\lambda),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ v(0,t)=0,\ \ Bv = R(t), \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \\ R(t) = K_1(t)v(1,t) + \lambda_1(t)v_t(1,t) - \int_0^t k(t-s)v(1,s)ds, \\ v \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V\cap H^2), \\ v' \in L^\infty(0,T;H^1),\ \ v'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ v(1,\cdot) \in H^2(0,T), \quad R \in H^1(0,T), \end{cases}$$

trong đó

$$(3.2)\qquad E_N(K,\lambda) = -\sum_{\gamma_1+\gamma_2=N+1} (u_{\gamma_1-1,\gamma_2} + u'_{\gamma_1,\gamma_2-1}) K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2}.$$

Khi đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Giả sử $(H_2)-(H_7)$ đúng. Khi đó*

$$(3.3)\qquad \|E_N(K,\lambda)\|_{L^\infty(0,T;V)} \le \widetilde{C}_N\left(\sqrt{K^2+\lambda^2}\right)^{N+1},$$

trong đó $\widetilde{C}_N = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=N+1}\left(\|u_{\gamma_1-1,\gamma_2}\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'_{\gamma_1,\gamma_2-1}\|_{L^\infty(0,T;V)}\right)$ *là một hằng số chỉ tùy thuộc vào các hằng số* $\|u_{\gamma_1-1,\gamma_2}\|_{L^\infty(0,T;V)}$, $\|u'_{\gamma_1,\gamma_2-1}\|_{L^\infty(0,T;V)}$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in Z_+^2$, $\gamma_1+\gamma_2 = N+1$.

Chứng minh. Chứng minh Bổ đề 1 có thể tìm thấy trong [9].

Kết quả sau đây cho một khai triển tiệm cận của nghiệm (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5) đến cấp $N+1$ theo (K,λ), với (K,λ) đủ nhỏ.

Định lý 3. *Giả sử $(H_1)-(H_7)$ đúng. Khi đó, với mỗi $(K,\lambda) \in IR^2$ với $|K| \le K_*$, $|\lambda| \le \lambda_*$, bài toán $(P_{K,\lambda})$ có duy nhất một nghiệm yếu $(u,Q) = (u_{K,\lambda}, Q_{K,\lambda})$ thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau*

$$(3.4)\quad \begin{aligned} &\left\| u'_{K,\lambda} - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} u'_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| u_{K,\lambda} - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} u_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \\ &+ \left\| u'_{K,\lambda}(1,\cdot) - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} u'_{\gamma_1,\gamma_2}(1,\cdot) K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^*_N\left(\sqrt{K^2+\lambda^2}\right)^{N+1}, \end{aligned}$$

và

$$(3.5)\quad \left\| Q_{K,\lambda} - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} Q_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_1} \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^{**}_N\left(\sqrt{K^2+\lambda^2}\right)^{N+1},$$

với mọi $K,\lambda \in IR$, $|K| \le K_*$, $|\lambda| \le \lambda_*$, *các hàm* $(u_{\gamma_1,\gamma_2}, Q_{\gamma_1,\gamma_2})$ *là các nghiệm yếu duy nhất của bài toán* $(\widetilde{P}_{\gamma_1,\gamma_2})$, $(\gamma_1,\gamma_2)\in Z^2_+$, $\gamma_1+\gamma_2 \le N$, $\widetilde{D}^*_N$ *là hằng số chỉ tùy thuộc vào* T, N, $\mu_0, \lambda_0, \widetilde{C}_N, K_*, \lambda_*, k, \mu, K_1$ *và* $\widetilde{D}^{**}_N$ *là hằng số chỉ tùy thuộc vào* T, N, μ_0, λ_0, $\widetilde{C}_N$, K_*, λ_*,
k, μ, K_1, λ_1.

Chứng minh. Do khuôn khổ của tạp chí có giới hạn nên chúng tôi chỉ phác họa nét chính trong chứng minh, còn chi tiết chứng minh Định lý 3 có thể tìm thấy trong [9]. Bằng cách nhân hai vế của $(3.1)_1$ với v', sau đó tích phân, ta thu được

$$(3.6)\quad \begin{aligned} \sigma(t) = &\int_0^t K_1'(s)v^2(1,s)ds + \int_0^t \mu'(s)\|v_x(s)\|^2 ds - K\|v(t)\|^2 - 2\lambda\int_0^t \|v'(s)\|^2 ds \\ &+ 2\int_0^t v'(1,r)dr\int_0^r k(r-s)v(1,s)ds + 2\int_0^t \langle E_N(K,\lambda,s), v'(s)\rangle ds, \end{aligned}$$

trong đó

$$(3.7)\quad \sigma(t) = \|v'(t)\|^2 + \mu(t)\|v_x(t)\|^2 + K_1(t)v^2(1,t) + 2\int_0^t \lambda_1(s)|v'(1,s)|^2 ds.$$

Đặt

(3.8)

$$N_1(K,\lambda,s) = \frac{2}{\mu_0}\left(|K_1'(s)| + |\mu'(s)|\right) + 2(|K|T + 2|\lambda| + 1) + \frac{8T\lambda_0}{\mu_0}\int_0^T k^2(\theta)d\theta.$$

Khi đó, với cách đánh giá tương tự như ở phần trên ta suy ra từ bổ đề 1 và (3.6)-(3.8), rằng

$$(3.9)\quad \sigma(t) \le 2T\widetilde{C}^2_N\left(K^2+\lambda^2\right)^{N+1} + \int_0^t N_1(K,\lambda,s)\sigma(s)ds.$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (3.9) rằng

$$(3.10) \qquad \sigma(t) \leq 2T\widetilde{C}_N^2\left(K^2+\lambda^2\right)^{N+1}\exp\left(\int_0^T N_1(K_*,\lambda_*,s)ds\right),$$

với mọi $K,\lambda \in IR, |K| \leq K_*, |\lambda| \leq \lambda_*$.

Từ (3.10), ta suy ra các đánh giá tiệm cận (3.4), (3.5) và Định lý 3 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyen Thuc An, Nguyen Dinh Trieu (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, . J. Mech. NCSR. Vietnam Tom **XIII** (2), 1-7.

[2] Maitine Bergounioux, Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43**, 547-561.

[3] Alain Pham Ngoc Dinh, Nguyen Thanh Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion asscociated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math., **19**, 45-63.

[4] J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod-Gauthier-Villar, Paris.

[5] Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh (1992), *On the quasilinear wave equation: $u_{tt} - \Delta u + f(u,u_t) = 0$ associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal., **19**, 613-623.

[6] Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal., **24**, 1261-1279.

[7] Nguyen Thanh Long, Tran Ngoc Diem (1997), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ associated with the homogeneous conditions*, Nonlinear Anal., **29**, 1217-1230.

[8] M.L. Santos (2001), *Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary*, Electronic JDE., Vol. 2001, No. 73, pp.1-11., ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.swt.edu or http://eidc.math.unt.edu.

[9] Nguyen Thanh Long, Le Van Ut, Nguyen Thi Thao Truc (2004), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*. (Submitted to J. Nonlinear Analysis).

Tóm tắt:

Va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = q(t), \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

trong đó K, λ *là các hằng số và* u_0, u_1, f, q, μ *là các hàm cho trước, ẩn hàm* $u(x,t)$ *và giá trị biên chưa biết* $Q(t)$ *thỏa phương trình tích phân tuyến tính*

$$(2)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó g, k, K_1, λ_1 *là các hàm cho trước. Bài báo gồm hai phần. Trong phần 1 chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu* (u,Q) *của bài toán (1)-(2). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm, các lý luận về sự hội tụ yếu và tính compact. Trong phần 2 chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm* (u,Q) *của bài toán này đến cấp* $N+1$ *theo* (K,λ), *với* (K,λ) *đủ nhỏ.*

Abstract:

The knock of a rigid body and a linear viscoelastic bar

The paper deals with the initial-boundary value problem for the linear wave equation

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = q(t), \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where K, λ are given constants and u_0, u_1, f, q, μ are given functions, the unknown function $u(x,t)$ and the unknown boundary value $Q(t)$ satisfy the following linear integral equation

$$(2)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

where g, k, K_1, λ_1 are given functions. The paper consists of two parts. In Part 1 we prove a theorem of global existence and uniqueness of a weak solution (u,Q) of problem (1)- (2). The proof is based on a Galerkin type approximation associated to various energy estimates-type bounds, weak-convergence and compactness arguments. Finally, in Part 2 we obtain an asymptotic expansion of the solution (u,Q) of this problem up to order $N+1$ in (K,λ), for (K,λ) sufficiently small.