SỐ BETTI VÀ KHÔNG GIAN CÁC ĐẠO HÀM PHẢN XỨNG CỦA CÁC ĐẠI SỐ LIE TOÀN PHƯƠNG GIẢI ĐƯỢC CÓ SỐ CHIỀU ≤ 7

CAO TRẦN TỨ HẢI*, DƯƠNG MINH THÀNH**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi tính toán toàn bộ số Betti của các đại số Lie toàn phương giải được có số chiều ≤ 7 vừa được phân loại trong [5]. Bên cạnh đó, không gian các đạo hàm phản xứng của chúng cũng được mô tả tường minh.

Từ khóa: đại số Lie, đại số Lie toàn phương, đối đồng điều, đạo hàm phản xứng.

ABSTRACT

The Betti numbers and the vector space of skew-symmetric derivations of solvable quadratic Lie algebras with dimension ≤ 7

In this paper, we calculate all of the Betti numbers of solvable quadratic Lie algebras of dimensions ≤ 7 which have classified in [5]. Moreover, their vector space of skew-symmetric derivations is explicitly described.

Keywords: Lie algebras, Quadratic Lie algebras, Cohomology, Skew-symmetric derivations.

Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi xét g là một quadratic Lie algebra (tạm dịch là đại số Lie *toàn phương*), tức là một đại số Lie được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng bất biến và không suy biến, trên trường số phức £ . Đại số Lie toàn phương là một đối tượng đại số mới xuất hiện trong thời gian gần đây và đã được nghiên cứu ở nhiều khía cạnh khác nhau. Đầu tiên là nghiên cứu về mặt cấu trúc: một đại số Lie toàn phương là tổng trực tiếp trực giao của các ideal không suy biến hoặc là tổng trực tiếp trực giao của một ideal tâm không suy biến và một ideal có tâm đẳng cự toàn bộ (xem [2] và [10]). Nếu đi sâu hơn vào cấu trúc: Một đại số Lie toàn phương không tầm thường có thể coi như là một mở rộng kép của một đại số Lie có số chiều nhỏ hơn bằng những đạo hàm phản xứng (xem [8] và [9]), hoặc một đại số Lie toàn phương giải được chẵn chiều là một mở rộng T* của một đại số Lie bởi một đối chu trình cyclic [2]. Tiếp theo đó là nghiên cứu ứng dụng trong Vật lí của các đại số Lie toàn phương [7]. Gần đây là những bài toán về phân loại chúng và dùng cấu trúc đại số Lie toàn phương để nghiên cứu những cấu trúc khác liên kết với nó, ví dụ cấu trúc symplectic liên kết với cấu trúc đại số Lie toàn phương lũy linh chẵn chiều [1], cấu trúc đại số Novikov đối xứng, cấu trúc đại số Lie toàn phương lũy linh bậc 2 (xem [4])...

* ThS, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận; *Email: tuhai.thptlequydon@ninhthuan.edu.vn*

** TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

Một trong những bài toán lí thú khi nghiên cứu một đại số Lie nói chung là mô tả được các nhóm đối đồng điều của nó. Trong trường hợp $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie toàn phương, bài toán mô tả nhóm đối đồng điều thứ hai hệ số trong $\mathbb{C}$ của $\mathfrak{g}$ có liên quan mật thiết đến mô tả không gian các đạo hàm phản xứng trên $\mathfrak{g}$, để từ đó liệt kê toàn bộ các mở rộng kép và do đó giúp cung cấp nhiều thông tin cho bài toán phân loại đại số Lie toàn phương (xem [5]). Mục tiêu của chúng tôi trong bài báo này là tính được số Betti (tức là số chiều của nhóm đối đồng điều hệ số trong $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$) của các đại số Lie toàn phương giải được có số chiều ≤ 7 vừa mới được phân loại trong [5] cũng như mô tả được không gian các đạo hàm phản xứng của chúng.

Bài báo được chia làm 3 mục: Mục đầu tiên nhắc lại một số khái niệm cơ bản và kết quả phân loại; Mục 2 nêu phương pháp mô tả nhóm đối đồng điều và trình bày bảng kết quả tính số Betti. Ở đây, phương pháp tính đã được đưa ra trong [10]. Chúng tôi chỉ trình bày một số ví dụ để minh họa ở chiều thấp, phần còn lại dành để nêu kết quả. Mục 3 là phần kết quả mô tả không gian các đạo hàm phản xứng của các đại số Lie toàn phương đang xét. Giống như Mục 2, chúng tôi sẽ làm cụ thể trên một vài ví dụ, sau đó chỉ nêu kết quả tính toán.

Các không gian vectơ được xét trong bài báo này là hữu hạn chiều và trên trường số phức $\mathbb{C}$.

1. Một số định nghĩa và kết quả cơ bản

Định nghĩa 1.1.

Cho một đại số Lie phức hữu hạn chiều $\mathfrak{g}$. Một dạng song tuyến tính đối xứng $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ được gọi là

(i) *không suy biến* nếu $B(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$ thì $X = 0$,

(ii) *bất biến* (hay còn gọi là *kết hợp*) nếu $B\left([X,Y],Z\right) = B\left(X,[Y,Z]\right)$ đúng với mọi $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Một đại số Lie trên đó tồn tại một dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến và bất biến được gọi là một *đại số Lie toàn phương*.

Xét $(\mathfrak{g}, B)$ là một đại số Lie toàn phương và W là một không gian vector con của $\mathfrak{g}$. *Thành phần trực giao* của W được kí hiệu bởi

$$W^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Mệnh đề 1.2. *[2]*

Cho $(\mathfrak{g}, B)$ *là một đại số Lie toàn phương,* I *là một ideal của* $\mathfrak{g}$. *Khi đó* $I^{\perp}$ *cũng là một ideal của* $\mathfrak{g}$. *Ngoài ra, nếu hạn chế của* B *trên* $I \times I$ *không suy biến thì hạn chế của* B *trên* $I^{\perp} \times I^{\perp}$ *cũng không suy biến,* $[I, I^{\perp}] = \{0\}$ *và* $I \cap I^{\perp} = \{0\}$.

Nếu hạn chế của của B trên $I \times I$ không suy biến thì ta gọi I là một *ideal không suy biến* của $\mathfrak{g}$, và để thích hợp ta sử dụng kí hiệu $\mathfrak{g} = I \overset{\perp}{\oplus} I^{\perp}$.

Định nghĩa 1.3.

Đại số Lie toàn phương $\mathfrak{g}$ được gọi là *bất khả phân* nếu ta có $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{g}_2$ thì $\mathfrak{g}_1$ hoặc $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Định nghĩa 1.4.

Ta nói hai đại số Lie toàn phương $(\mathfrak{g}, B)$ và $(\mathfrak{g}', B')$ *đẳng cấu đẳng cự* nếu tồn tại một đẳng cấu đại số Lie $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ thỏa mãn

$$B'(A(X), A(Y)) = B(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Trong trường hợp này ta cũng nói A là một *đẳng cấu đẳng cự.*

Cuối cùng trong mục này chúng tôi nhắc lại kết quả phân loại các đại số Lie toàn giải được đến 7 chiều bằng phương pháp mở rộng kép được đưa ra trong [3] và [5]:

Mệnh đề 1.5.

Cho $(\mathfrak{g}, B)$ *là đại số Lie toàn phương giải được có số chiều* ≤ 7. *Giả sử* $\mathfrak{g}$ *không giao hoán. Khi đó* $\mathfrak{g}$ *đẳng cấu đẳng cự với một trong các đại số Lie sau:*

(i) $\mathfrak{g}_4 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, Z_1, Z_2\}$ với tích Lie được xác định bởi $[X_1, X_2] = X_2$, $[X_1, Z_2] = -Z_2$ và $[X_2, Z_2] = Z_1$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = 1$, $1 \leq i \leq 2$, các trường hợp khác bằng 0.

(ii) $\mathfrak{g}_4 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}$ hoặc $\mathfrak{g}_5 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, T, Z_1, Z_2\}$ với $[X_1, X_2] = T$, $[X_1, T] = -Z_2$ và $[X_2, T] = Z_1$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = B(T, T) = 1$, $1 \leq i \leq 2$, các trường hợp khác bằng 0.

(iii) $\mathfrak{g}_4 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{g}_5 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}$ hoặc $\mathfrak{g}_6 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = 1,\ 1 \le i \le 3$, các trường hợp khác bằng 0. Có 3 họ đại số không đẳng cấu đẳng cự sau:

- $\mathfrak{g}_{6,1}$: $[X_1, X_2] = Z_3$, $[X_2, X_3] = Z_1$ *và* $[X_3, X_1] = Z_2$.
- $\mathfrak{g}_{6,2}$: $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, Z_2] = \lambda Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1$, $[X_3, X_2] = -\lambda X_2$ $[Z_1, X_1] = Z_3$ *và* $[Z_2, X_2] = \lambda Z_3$ *với* $\lambda \ne 0$.
- $\mathfrak{g}_{6,3}$: $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, Z_2] = Z_1 + Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1 - X_2$, $[X_3, X_2] = -X_2$ *và* $[Z_1, X_1] = [Z_2, X_2] = [Z_2, X_1] = Z_3$.

(iv) $\mathfrak{g}_4 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}^3$, $\mathfrak{g}_5 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{g}_6 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}$ hoặc $\mathfrak{g}_7 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, X_3, T, Z_1, Z_2, Z_3\}$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(T, T) = 1$, $B(X_i, Z_i) = 1,\ 1 \le i \le 3$. Có 3 họ đại số không đẳng cấu đẳng cự sau:

- $\mathfrak{g}_{7,1}$: $[X_3, X_2] = X_1$, $[X_3, T] = X_2$, $[X_3, Z_1] = -Z_2$, $[X_3, Z_2] = -T$, $[X_2, Z_1] = [T, Z_2] = Z_3$.
- $\mathfrak{g}_{7,2}$: $[X_3, X_1] = X_1$, $[X_3, T] = X_2$, $[X_3, Z_1] = -Z_1$, $[X_3, Z_2] = -T$ và $[X_1, Z_1] = [T, Z_2] = Z_3$.
- $\mathfrak{g}_{7,3}$: $[X_3, X_1] = X_1$, $[X_3, X_2] = -X_2$, $[X_3, Z_1] = -Z_1$, $[X_3, Z_2] = Z_2$, $[X_1, Z_1] = [Z_2, X_2] = Z_3$, $[X_1, X_2] = T$, $[X_1, T] = -Z_2$ và $[X_2, T] = Z_1$.

2. Số Betti của một đại số Lie toàn phương

2.1. Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie, V là một không gian vectơ và $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V. Với $k \ge 0$, kí hiệu $C^k(\mathfrak{g}, V)$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}$ vào V nếu $k \ge 1$ và $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Toán tử *đối bờ* $d_k : C^k(\mathfrak{g}, V) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$ được định nghĩa như sau:

$$d_k f(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(X_i)\left(f(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)\right) + \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f\left([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k\right)$$

với mọi $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$, $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$, ở đây kí hiệu $\hat{X}_i$ để chỉ X_i không có trong công thức.

Ta nói rằng $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ là một k*-đối chu trình* nếu $d_k f = 0$ và f là một k-*đối bờ* nếu có $g \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)$ sao cho $f = d_{k-1} g$.

Kí hiệu $Z^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k-đối chu trình và $B^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k-đối bờ, tức là $Z^k(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{Ker} d_k$ và $B^k(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{Im} d_{k-1}$. Không gian thương $Z^k(\mathfrak{g}, V) / B^k(\mathfrak{g}, V)$ được kí hiệu là $H^k(\mathfrak{g}, V)$ và được gọi là *nhóm đối đồng điều thứ* k của $\mathfrak{g}$ hệ số trong V. Mỗi phần tử thuộc $H^k(\mathfrak{g}, V)$ được gọi là một k*-đối chu trình*.

Một trong những trường hợp đáng chú ý nhất của đối đồng điều đại số Lie là khi V một chiều, tức là $V = \mathbb{C}$ (hoặc $\mathbb{R}$). Khi đó $C^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}$ vào $\mathbb{C}$, tức là $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ và:

$$d_k f(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f\left([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k\right)$$

Trong trường hợp này, việc mô tả nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ cũng như tính toán số Betti $\dim H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ là một bài toán hết sức lí thú.

Cho một không gian vectơ phức V hữu hạn chiều được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng B (ta còn gọi (V, B) là một không gian vectơ *toàn phương*). Năm 2007, G. Pinczon và R. Ushirobira đã giới thiệu khái niệm tích super-Poisson trên không gian $\Lambda(V^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên V như sau:

$$\{\Omega, \Omega'\} = (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{n} i_{X_j}(\Omega) \wedge i_{X_j}(\Omega'), \ \forall \Omega \in \Lambda^k(V^*) \text{ và } \Omega' \in \Lambda(V^*)$$

ở đây, $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ là một cơ sở trực chuẩn của V.

Với một đại số Lie toàn phương $(\mathfrak{g}, B)$ ta định nghĩa *3-dạng liên kết với* $\mathfrak{g}$ xác định bởi $I(X, Y, Z) = B([X, Y], Z)$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. G. Pinczon và R. Ushirobira đã chứng minh được đẳng thức $\{I, I\} = 0$, hơn nữa $d\Omega = -\{I, \Omega\}$. Nhờ kết quả này, việc mô tả các nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ có thể thông qua tính toán các tích super-Poisson.

2.2. Ví dụ

Xét đại số $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_4$, $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{C})=\left\{f\in\mathfrak{g}^*\mid f\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right)=0\right\}=\operatorname{span}\{[X_1^*]\}$. Từ định nghĩa của dạng song tuyến tính B, ta có thể tính được 3-dạng I liên kết với $\mathfrak{g}_4$ là $I=X_1^*\wedge X_2^*\wedge Z_2^*$. Do đó ta dễ dàng tính được

$B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})=\left\{i_X(I)\mid X\in\mathfrak{g}\right\}=\operatorname{span}\left\{X_1^*\wedge X_2^*, X_1^*\wedge Z_2^*, X_2^*\wedge Z_2^*\right\}$ và

$Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})=\left\{w\in\Lambda^2\left(\mathfrak{g}^*\right)\mid\{I,w\}=0\right\}=B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$. Suy ra $H^2(\mathfrak{g}_4,\mathbb{C})=\{0\}$.

Xét đại số $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_5$, từ định nghĩa của dạng song tuyến tính B, ta có thể tính được 3-dạng I liên kết là $I=X_1^*\wedge X_2^*\wedge T^*$ và do đó

$B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})=\operatorname{span}\left\{X_1^*\wedge X_2^*, X_1^*\wedge T^*, X_2^*\wedge T^*\right\}$.

Mặt khác, $\left\{I, X_1^*\wedge X_2^*\right\}=\left\{X_1^*\wedge X_2^*\wedge T^*, X_1^*\wedge X_2^*\right\}=0$. Do đó, $X_1^*\wedge X_2^*\in Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$. Tính toán một cách tương tự ta thu được:

$Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})=\operatorname{span}\left\{X_1^*\wedge X_2^*, X_1^*\wedge T^*, X_2^*\wedge T^*, Z_1^*\wedge X_2^*, Z_2^*\wedge X_1^*, Z_1^*\wedge X_1^*-Z_2^*\wedge X_2^*\right\}$.

So sánh $B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và $Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ ta suy ra

$H^2(\mathfrak{g}_5,\mathbb{C})=\operatorname{span}\left\{\left[Z_1^*\wedge X_2^*\right],\left[Z_2^*\wedge X_1^*\right],\left[Z_1^*\wedge X_1^*-Z_2^*\wedge X_2^*\right]\right\}$.

2.3. Số Betti của các đại số Lie toàn phương giải được có số chiều ≤ 7

Để đơn giản về mặt trình bày, trong mục này ta dùng kí hiệu H^k thay cho $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và b_k thay cho $b_k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$. Trường hợp $k=0$ hoặc bằng số chiều n của $\mathfrak{g}$ là những trường hợp tầm thường nên ta chỉ để ý những trường hợp k với $1\le k\le n-1$. Đối với việc mô tả H^k, để tránh sự phức tạp của các công thức, chúng tôi chỉ trình bày việc tính toán đối với những trường hợp $1\le k\le 3$, các trường hợp còn lại chúng tôi chỉ nêu kết quả về số Betti.

	H^1	H^2	H^3	b_k
$\mathfrak{g}_4$	X_1^*	$\{0\}$	$X_2^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^*$	**(1,0,1)**
$\mathfrak{g}_5$	X_1^*, X_2^*	$Z_1^* \wedge X_2^*, Z_2^* \wedge X_1^*, Z_1^* \wedge X_1^* - Z_2^* \wedge X_2^*$	$T^* \wedge X_1^* \wedge Z_1^*, T^* \wedge X_1^* \wedge Z_2^*, T^* \wedge X_2^* \wedge Z_1^*$	**(2,3,3,2)**
$\mathfrak{g}_{6,1}$	X_1^*, X_2^*, X_3^*	$X_1^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge Z_3^*, X_2^* \wedge Z_1^*, X_2^* \wedge Z_3^*, X_3^* \wedge Z_1^*, X_3^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge Z_1^* - X_3^* \wedge Z_3^*, X_2^* \wedge Z_2^* - X_3^* \wedge Z_3^*$	$X_1^* \wedge X_2^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge X_2^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge X_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_2^*, X_2^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_2^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^*, X_3^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^* + X_3^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* - X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_2^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^* - X_3^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^*$	**(3,8,12,8,3)**
$\mathfrak{g}_{6,2}(\lambda)$ $(\lambda \neq \pm 1, 0)$	X_3^*	$X_1^* \wedge Z_1^*$	$X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* - \lambda X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(1,1,2,1,1)**
$\mathfrak{g}_{6,2}(1)$	X_3^*	$X_1^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge Z_2^*, X_2^* \wedge Z_1^*$	$X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_2^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* - X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(1,3,4,3,1)**
$\mathfrak{g}_{6,2}(-1)$	X_3^*	$X_1^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge X_2^*, Z_1^* \wedge Z_2^*$	$X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge X_2^* \wedge Z_3^*, Z_1^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* + X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(1,3,4,3,1)**
$\mathfrak{g}_{6,3}$	X_3^*	$X_1^* \wedge Z_2^*$	$X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_1^*, X_1^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* + X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(1,1,3,1,1)**
$\mathfrak{g}_{7,1}$	X_3^*, Z_1^*	$X_1^* \wedge X_3^*, Z_1^* \wedge Z_2^*$	$Z_1^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge X_3^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^* - X_3^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(2,2,3,3,2,2)**
$\mathfrak{g}_{7,2}$	X_3^*, Z_2^*	$X_2^* \wedge X_3^*, X_1^* \wedge Z_1^*$	$T^* \wedge X_2^* \wedge X_3^*, T^* \wedge X_2^* \wedge Z_2^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* - T^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^*$	**(2,2,3,3,2,2)**
$\mathfrak{g}_{7,3}$	X_3^*	$\{0\}$	$X_1^* \wedge X_2^* \wedge Z_3^*, X_1^* \wedge Z_1^* \wedge Z_3^* - X_2^* \wedge Z_2^* \wedge Z_3^* - 2T^* \wedge Z_1^* \wedge Z_2^*$	**(1,0,2,2,0,1)**

3. Không gian các đạo hàm phản xứng của một đại số Lie toàn phương

3.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 3.1.

Cho $(\mathfrak{g}, B)$ là một đại số Lie toàn phương và $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ là một đạo hàm của $\mathfrak{g}$. Ta nói D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$ nó thỏa mãn tính chất:

$$B(D(X), Y) = -B(X, D(Y)),\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Kí hiệu $\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g}, B)$ là không gian các đạo hàm phản xứng của $(\mathfrak{g}, B)$. Mục tiêu tiếp theo của chúng tôi là mô tả tường minh không gian $\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g}, B)$ với $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie giải được có số chiều không vượt quá 7.

Ví dụ 3.2.

Trường hợp $\mathfrak{g}_4$ độc giả có thể xem trong [3]. Xét đại số $\mathfrak{g}_5 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, T, Z_1, Z_2\}$ với $[X_1, X_2] = T$, $[X_1, T] = -Z_2$ và $[X_2, T] = Z_1$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = B(T, T) = 1$, $1 \leq i \leq 2$, các trường hợp khác bằng 0. Gọi D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}_5$. Ta có thể tính toán trực tiếp được rằng ma trận của D đối với cơ sở đã cho có dạng như sau:

$$D = \begin{pmatrix} x & -z & 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & x & y \\ a & 0 & c & z & -x \end{pmatrix} \text{ với } x, y, z, a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Chú ý rằng các đạo hàm trong được đại diện bởi các tham số a, b và c trong khi các đạo hàm ngoài được đại diện bởi các tham số x, y và z.

3.2. Không gian các đạo hàm phản xứng của các đại số Lie toàn phương giải được có số chiều ≤ 7

Kết quả tính toán cho những trường hợp 5 chiều và 6 chiều độc giả có thể xem ở trong bài báo [5]. Dưới đây chúng tôi đưa ra kết quả tính toán cho trường hợp 7 chiều.

a) $\mathfrak{g}_4 \oplus \mathbb{C}^3$: Đối với cơ sở $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Y_1, Y_2, Y_3\}$, bổ sung $B(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$, các đạo hàm phản xứng được xác định bởi ma trận

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & -y & x_1 & x_2 & x_3 \\ z & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u & -w \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & -v \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 & w & v & 0 \end{pmatrix} \text{ với } x,y,z,x_1,x_2,x_3,u,v,w \in \mathbb{R}.$$

b) $\mathfrak{g}_5 \hat{\oplus} \mathbb{R}^2$: Đối với cơ sở $\{X_1, X_2, T, Z_1, Z_2, Y_1, Y_2\}$, bổ sung $B(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le 2$, các đạo hàm phản xứng được xác định bởi ma trận

$$D=\begin{pmatrix} x & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & b & -x & -y & x_1 & x_2 \\ t & 0 & c & -z & x & y_1 & y_2 \\ -x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u \\ -x_2 & -y_2 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \end{pmatrix} \text{ với } x,y,z,t,a,b,c,x_1,x_2,y_1,y_2,u \in \mathbb{R}.$$

c) $\mathfrak{g}_{6,1} \hat{\oplus} \mathbb{R}$: Đối với cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3, Y\}$, bổ sung $B(Y,Y)=1$, các đạo hàm phản xứng được xác định bởi ma trận $D=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & -A^t & -C^t \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}$ với A là một trong các ma trận vuông 3x3 có vết bằng không, B là ma trận 3x3 phản xứng, $C = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ với $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$..

d) $\mathfrak{g}_{6,2} \hat{\oplus} \mathbb{R}$: Đối với cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3, Y\}$, bổ sung $B(Y,Y)=1$, các đạo hàm phản xứng được xác định bởi ma trận

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & c & y & 0 & 0 & 0 & 0\\ b & d & z & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & -a & -b & 0 & x_1\\ 0 & 0 & h & -c & -d & 0 & x_2\\ 0 & -h & 0 & -y & -z & 0 & x_3\\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ với } y,z,t,a,b,c,h,x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{C}.$$

e) $\mathfrak{g}_{6,3}\,\hat{\oplus}\,\mathbb{C}$: Đối với cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3, Y\}$, bổ sung $B(Y,Y)=1$, các đạo hàm phản xứng được xác định bởi ma trận

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & b & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & z & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & -b & -a & 0\\ -z & -t & 0 & -x & -y & 0 \end{pmatrix} \text{ với } x,y,z,t,a,b \in \mathbb{C}.$$

f) $\mathfrak{g}_{7,1}$: Ma trận của đạo hàm phản xứng đối với cơ sở đã cho có dạng

$$D=\begin{pmatrix} 2x & b & -a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x & -c & b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & -b & 0\\ 0 & 0 & y & 0 & -2x & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0 & -b & -x & 0\\ -y & -d & 0 & -e & a & c & -x \end{pmatrix} \text{ với } a,b,c,b,e,x,y \in \mathbb{C},$$

trong đó, đạo hàm trong được đại diện bởi các tham số a,b,c,d,e, đạo hàm ngoài được đại diện bởi các tham số x,y. Từ đây, ta suy ra được số chiều của nhóm đối đồng điều thứ hai của đại số này bằng 2.

g) $\mathfrak{g}_{7,2}$: Ma trận của đạo hàm phản xứng đối với cơ sở đã cho có dạng

$$D=\begin{pmatrix} b & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -c & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & -y & 0\\ 0 & 0 & d & 0 & -b & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0\\ -d & -x & 0 & -e & a & c & 0 \end{pmatrix} \text{ với } a,b,c,b,e,x,y \in \mathbb{C},$$

ở đây, đạo hàm trong được đại diện bởi các tham số a,b,c,d,e , đạo hàm ngoài được đại diện bởi các tham số x,y. Suy ra được số chiều của nhóm đối đồng điều thứ hai của đại số này bằng 2.

h) $\mathfrak{g}_{7,3}$: Ma trận của đạo hàm phản xứng đối với cơ sở đã cho có dạng

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & e & b & -c & 0 & 0 \\ d & 0 & -f & -a & 0 & c & 0 \\ -e & f & 0 & 0 & a & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ với } a,b,c,b,e,f \in \mathbb{C}.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng mọi đạo hàm phản xứng đều là đạo hàm trong và do đó nhóm đối đồng điều thứ hai của đại số này là tầm thường.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. I. Bajo, S. Benayadi, and A. Medina (2007), "Symplectic structures on quadratic Lie algebras", *J. of Algebra*, **316**(1), 174 – 188.
2. M. Bordemann (1997), "Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras", *Acta. Math. Uni. Comenianac*, **LXVI**(2), 151-201.
3. P.T. Dat, D.M. Thanh and L.A. Vu (2012), "Solvable quadratic Lie algebras in low dimensions", *East-West J. of Math*, **14**(2), 208-218.
4. M. T. Duong (2013), "Two-step nilpotent quadratic Lie algebras and 8-dimensional non-commutative symmetric Novikov algebras", *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. 41 (2), 135-148.
5. M. T. Duong and R. Ushirobira (2014), "Solvable quadratic Lie algebras of dimensions ≤ 8", arXiv:1407.6775v1.
6. G. Favre and L. J. Santharoubane (1987), "Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra", *J. Algebra*, **105**, 451–464.
7. J. M. Figueroa-O'Farrill and S. Stanciu (1996), "On the structure of symmetric self-dual Lie algebras", *J. Math. Phys*, 37, 4121–4134.
8. V. Kac (1985), *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambrigde University Press, New York.
9. A. Medina and P. Revoy (1985), "Algèbres de Lie et produit scalaire invariant'', *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup*., 4ème sér. t.18, 553-561.
10. G. Pinczon and R. Ushirobira (2007), "New Applications of Graded Lie Algebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras, and Cohomology", *J. Lie Theory*, **17**, 633-667.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 05-4-2015; ngày phản biện đánh giá: 14-4-2015; ngày chấp nhận đăng: 18-5-2015)