SỐ KHUYẾT CỦA HÀM PHÂN HÌNH PHI ACSIMET

MỴ VINH QUANG*

TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu một vài kết quả mới về số khuyết của hàm phân hình phi Acsimet. Các kết quả này liên quan đến bài toán ngược của Lí thuyết Nevanlinna phi Acsimet. Đó là vấn đề xây dựng các hàm phân hình phi Acsimet mà số khuyết của nó tại những điểm đã cho bằng các số cho trước.

Từ khóa: lí thuyết Nevanlinna, hàm phân hình, số khuyết.

ABSTRACT

Defect of non-Archimedean meromorphic functions

This paper introduces several new results of the defect of non-Archimedean meromorphic functions. These results are related to the non-Archimedean Nevanlinna inverse problem, which is building non-Archimedean meromorphic functions of which defect at the given points are equal to given numbers.

Keywords: Nevanlinna Theory, Meromorphic function, Defect.

1. Mở đầu

Cho là K trường đóng đại số, đặc số không và $|.|$ là chuẩn phi Acsimet đầy đủ trên K. Chuỗi lũy thừa

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ a_n \in \mathrm{K}$$

hội tụ trên K được gọi là *hàm chỉnh hình* trên K.

Tập $\mathrm{A}(\mathrm{K})$ các hàm chỉnh hình trên K với các phép toán thông thường làm thành miền nguyên. Trường các thương của $\mathrm{A}(\mathrm{K})$, kí hiệu là $M(\mathrm{K})$, được gọi là trường các *hàm phân hình* trên K. Mỗi phần tử $\varphi \in M(\mathrm{K})$ gọi là *hàm phân hình* trên K. Như vậy, một hàm phân hình $\varphi(z)$ trên K đều có dạng: $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ với $f(z), g(z)$ là các hàm chỉnh hình trên K.

Với mỗi $f \in \mathrm{A}(\mathrm{K})$ và số thực $r>0$, ta định nghĩa *hạng tử tối đại* của $f: \mu(r,f)=\max\limits_{n\geq 0}\left\{|a_n| r^n\right\}$. Nếu $\varphi=\dfrac{f}{g}\in M(\mathrm{K})$ thì $\mu(r,\varphi)=\dfrac{\mu(r,f)}{\mu(r,g)}$.

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: quangmv@hcmup.edu.vn*

Với mỗi $\varphi \in M(\mathrm{K})$, ta kí hiệu $n(r,\varphi)$ (tương ứng, $\bar{n}(r,\varphi)$) là số các cực điểm kể cả số bội (tương ứng, không kể bội) của hàm phân hình φ trong hình cầu đóng $B(0,r)$. *Hàm đếm các cực điểm* của φ được định nghĩa như sau:

$$N(r,\varphi)=\int_0^r \frac{n(t,\varphi)-n(0,\varphi)}{t}dt+n(0,\varphi)\log r$$

$$\bar{N}(r,\varphi)=\int_0^r \frac{\bar{n}(t,\varphi)-\bar{n}(0,\varphi)}{t}dt+\bar{n}(0,\varphi)\log r$$

Khi đó, mệnh đề dưới đây được gọi là tương tự phi Acsimet của công thức Poision – Jensen (xem [5], [7]).

Mệnh đề 1.1.

Cho $\varphi \in M(\mathrm{K})$. *Khi đó* $N\left(r,\dfrac{1}{\varphi}\right)-N(r,\varphi)=\log \mu(r,\varphi)+C_\varphi$,

trong đó, C_φ *là hằng số chỉ phụ thuộc vào* φ.

Cho φ là hàm phân hình trên K. Khi đó:

$$m(r,\varphi)=\log^+ \mu(r,\varphi)=\max\{0, \log \mu(r,\varphi)\},$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của φ.

$$T(r,\varphi)=m(r,\varphi)+N(r,\varphi),$$

được gọi là *hàm đặc trưng* của φ.

Dễ thấy $T(r,\varphi)$ là hàm tăng theo biến r và nếu φ là hàm phân hình khác hằng số thì $\lim\limits_{r\to+\infty} T(r,\varphi)=+\infty$.

Mệnh đề dưới đây cho ta cách tính hàm đặc trưng.

Mệnh đề 1.2.

Cho $\varphi=\dfrac{f}{g}\in M(\mathrm{K})$ *với* $f,g\in \mathrm{A}(\mathrm{K})$ *và không có không điểm chung. Khi đó:*

$$T(r,\varphi)=\max\{\log \mu(r,f),\log \mu(r,\mathrm{g})\}+O(1)$$

Hai định lí dưới đây đóng vai trò nền tảng trong lí thuyết Nevanlinna phi Acsimet, được xây dựng bởi H.H. Khoái, M.V. Quang, A. Boutabaa. (xem [1], [5], [7])

Định lí 1.3. (Định lí cơ bản thứ nhất)

Cho φ *là hàm phân hình trên* K *và* $a \in \mathrm{K}$. *Khi đó*

$$T\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = T(r, \varphi) + O(1)$$

Định lí 1.4. (Định lí cơ bản thứ 2)

Cho r *là số thực dương,* φ *là hàm phân hình khác hằng số trên* K *và* $a_1, a_2, ..., a_q \in \mathrm{K}$ *là các phần tử phân biệt. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}(q-1)T(r,\varphi) &\le N(r,\varphi) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{\varphi - a_i}\right) - N_{Ram}(r,\varphi) - \log r + O(1) \\ &\le \bar{N}(r,\varphi) + \sum_{i=1}^{q} \bar{N}\left(r, \frac{1}{\varphi - a_i}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{\varphi'}\right) - \log r + O(1)\end{aligned}$$

trong đó, $N_{Ram}(r,\varphi) = N\left(r, \frac{1}{\varphi'}\right) + 2N(r,\varphi) - N(r,\varphi')$ *là hạng tử rẽ nhánh và* $N_0\left(r, \frac{1}{\varphi'}\right)$ *là hàm đếm các không điểm của* φ' *khi* φ *không nhận các giá trị* $a_1, a_2, ..., a_q$.

Định nghĩa 1.5.

Cho φ là hàm phân hình khác hằng số trên K và $a \in \mathrm{K}$. *Số khuyết* của hàm φ tại a được định nghĩa bởi:

$$\delta_\varphi(a) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right)}{T(r,\varphi)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right)}{T(r,\varphi)}$$

$$\theta_\varphi(a) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right)}{T(r,\varphi)}$$

Số khuyết của hàm φ tại ∞ được định nghĩa như sau:

$$\delta_\varphi(\infty) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,\varphi)}{T(r,\varphi)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,\varphi)}{T(r,\varphi)}$$

$$\theta_\varphi(\infty) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,\varphi)}{T(r,\varphi)}$$

Hiển nhiên $0 \le \delta_\varphi(a) \le \theta_\varphi(a) \le 1$. Từ các định lí 1.3, 1.4, ta có các kết quả sau đây về số khuyết. (xem[5], [7])

Định lí 1.6.

Cho φ là hàm phân hình khác hằng số trên K. Khi đó tồn tại nhiều nhất một phần tử $a \in \mathrm{K} \cup \{\infty\}$ để $\delta_\varphi(a) > 0$. Do đó $\sum_{a \in K \cup \{\infty\}} \delta_\varphi(a) \le 1$.

Định lí 1.7.

Cho φ là hàm phân hình khác hằng số trên K. Khi đó, ta có $\sum_{a \in K \cup \{\infty\}} \theta_\varphi(a) \le 2$.

Nội dung chính của bài báo này là một số kết quả liên quan đến bài toán ngược của Lí thuyết Nevanlinna phi Acsimet. Cụ thể là xây dựng hàm phân hình phi Acsimet với số khuyết tại các điểm đã cho bằng các số cho trước.

2. Các kết quả chính

Ta bắt đầu bằng hai bổ đề rất hữu ích sau

Bổ đề 2.1.

Cho dãy $\{a_n\}_{n \ge 1}$ trong K, $a_n \ne 0, \forall n$ và $\lim_{n \to \infty} |a_n| = \infty$. Khi đó tích vô hạn

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

hội tụ và là hàm chỉnh hình trên K. Tập không điểm của $f(z)$ chính là $\{a_n\}_{n \ge 1}$.

Chứng minh.

Đặt $f_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$. Với mỗi $r > 0$, tồn tại n_0 sao cho $|a_n| \ge r$ với mọi $n \ge n_0$. Khi đó $\mu(r, f_n) = \mu(r, f_{n_0})$ với mọi $n \ge n_0$. Do đó, với $n > n_0$,

$$\mu(r, f_{n-1} - f_n) = \mu(r, f_{n-1})\,\mu\left(r, \frac{z}{a_n}\right) = \mu(r, f_{n_0}).\frac{r}{|a_n|} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy $f_n(z)$ là dãy Cauchy do đó hội tụ trong hình cầu đóng $B(0,r)$. Do đó $f(z)$ là hàm chỉnh hình trên K. Ta có a_k là không điểm của $f_n(z)$ với $n \ge k$ nên a_k là không điểm của $f(z)$.

Ngược lại, giả sử $a \in \mathrm{K}$ là không điểm của $f(z)$. Gọi n_0 là số tự nhiên thỏa $|a_n| > |a|$ với mọi $n \ge n_0$. Khi đó với mọi $n \ge n_0$, ta có:

$\left|f_n(a)\right| = \left|f_{n_0}(a)\right|$ do đó $\left|f_{n_0}(a)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|f_n(a)\right| = \left|f(a)\right| = 0$.

Vậy $\left|f_{n_0}(a)\right| = 0$ hay $f_{n_0}(a) = 0$ do đó $a = a_k$.

Vậy tập không điểm của $f(z)$ chính là $\{a_n\}_{n\geq 1}$ □

Bổ đề 2.2.

Cho $0 < \varepsilon \leq 1$, ρ *là số thực dương. Giả sử* n *là số lớn nhất trong các số nguyên* k *thỏa* $\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] \leq \rho$. *Khi đó ta có:*

$$n\rho - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] = \varepsilon\frac{\rho^2}{2} + O(\rho)$$

Chứng minh.

Ta có $\frac{k}{\varepsilon} - 1 < \left[\frac{k}{\varepsilon}\right] \leq \frac{k}{\varepsilon}$, do đó

$$\varepsilon\rho - 1 < n < \varepsilon(\rho+1) \qquad (*)$$

$$\varepsilon\rho^2 - \rho < n\rho < \varepsilon(\rho^2+\rho) \qquad (**)$$

Suy ra $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{\varepsilon}\frac{n(n+1)}{2} \leq \varepsilon\frac{\rho^2}{2} + O(\rho)$ (do (*))

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] > \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}k - n = \frac{1}{\varepsilon}\frac{n(n+1)}{2} - n > \varepsilon\frac{\rho^2}{2} + O(\rho) \quad \text{(do (*))}.$$

Bởi vậy, $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] = \varepsilon\frac{\rho^2}{2} + O(\rho)$. Kết hợp với (**), ta có

$$n\rho - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] = \varepsilon\frac{\rho^2}{2} + O(\rho).$$

Bổ đề đã được chứng minh. □

Định lí dưới đây giải quyết trọn vẹn vấn đề ngược của Định lí 1.6.

Định lí 2.3.

Cho $\delta \in [0,1]$ *và* $\alpha \in \mathrm{K} \cup \{\infty\}$. *Khi đó luôn luôn tồn tại hàm phân hình* φ *trên* K *sao cho* $\delta_\varphi(\alpha) = \delta$.

Chứng minh.

Đầu tiên ta chứng minh tồn tại $\varphi \in M\ (\mathrm{K})$ để $\delta_{\varphi}(\infty)=\delta$. Nếu $\delta = 1$ thì $\delta_f(\infty)=1$ với mọi hàm chỉnh hình f. Do đó có thể xem $\delta \in [0,1)$. Khi đó xét các hàm số

$$f(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a^{\left[\frac{i}{1-\delta}\right]}}\right),\ \ g(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a^{i}}\right),$$

trong đó, $a \in K$ và $|a|>1$.

Theo bổ đề 2.1, $f(z), g(z)$ là các hàm chỉnh hình trên K với tập không điểm lần lượt là $\left\{a^{\left[\frac{i}{1-\delta}\right]}\right\}_{i\ge 1}$ và $\{-a^i\}_{i\ge 1}$.

Gọi n là số lớn nhất trong các số tự nhiên i thỏa $\left[\frac{i}{1-\delta}\right]\log a \le \log r$.

Khi đó $\mu(r,f)=r^n\prod_{i=1}^{n}|a|^{-\left[\frac{i}{1-\delta}\right]}$. Suy ra $\log\mu(r,f)=n\log r-\sum\left[\frac{i}{1-\delta}\right]\log|a|$

Áp dụng Bổ đề 2.2 với $\varepsilon = 1-\delta$ và $\rho=\frac{\log r}{\log a}$, ta có

$$\log\mu(r,f)=(1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r).$$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\log\mu(r,g)=\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r)$

Xét hàm phân hình $\psi(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$. Áp dụng các mệnh đề 1.1 và 1.2, ta có

$$N(r,\psi)=N\left(r,\frac{1}{f}\right)=(1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r)$$

$$T(r,\psi)=\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r)$$

Do đó, $\delta_{\psi}(\infty)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,\psi)}{T(r,\psi)}=\delta$

Bây giờ, chọn $\varphi=\alpha+\frac{1}{\psi}$, ta có $\delta_{\varphi}(\alpha)=\delta$ và định lí đã được chứng minh □

Định lí 2.4.

Cho $\theta_1 \in [0,1],\ \theta_2 \in \left\{1-\frac{1}{k}\middle| k \in \mathbb{N}\right\}$ *và* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K} \cup \{\infty\}$. *Khi đó luôn luôn tồn tại hàm phân hình trên* K *sao cho* $\theta_\varphi(\alpha_1) = \theta_1,\ \theta_\varphi(\alpha_2) = \theta_2$.

Chứng minh.

Đầu tiên, ta xây dựng hàm phân hình ψ thỏa $\theta_\psi(\infty) = \theta_1,\ \theta_\psi(0) = \theta_2$. Xét các trường hợp sau

1) $\theta_1 = 1$ và $\theta_2 = 1 - \frac{1}{k}$.

Xét hàm $\psi = g^k$ với $g(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{a^i}\right)$. Vì ψ là hàm chỉnh hình trên K nên $\theta_\psi(\infty) = 1$. Mặt khác,

$$\theta_\psi(0) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right)}{T(r,\varphi)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{g}\right)}{kT(r,\mathrm{g})} = 1 - \frac{1}{k}$$

Vậy $\theta_\psi(\infty) = \theta_1,\ \theta_\psi(0) = \theta_2$.

2) $\theta_1 \in [0,1),\ \theta_2 = 1 - \frac{1}{k}$. Xảy ra một trong những khả năng sau

a) $k \geq \frac{1}{1-\theta_1}$. Khi đó, xét hàm $\psi = \frac{f^k}{g}$

với $g(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{a_i}\right)$ và $f(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a^{\left[\frac{i}{1-\delta}\right]}}\right)$,

trong đó $a \in \mathrm{K},\ |a| > 1$ và $\delta = 1 - \frac{1}{k(1-\theta_1)}$ $(0 \leq \delta < 1)$.

Theo chứng minh trong Định lí 2.3, ta có

$$\log\mu(r,g) = \frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

$$\log\mu(r,f) = (1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

$$\log\mu(r,f^k) = k(1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

Do $\delta = 1 - \dfrac{1}{k(1-\theta_1)}$ nên $k(1-\delta) = \dfrac{1}{1-\theta_1} \geq 1$.

Theo Mệnh đề 1.2 ta có:

$$T(r,\psi) = \max\left\{\log\mu(r, f^k), \log\mu(r,g)\right\}$$
$$= k(1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

$$\bar{N}(r,\psi) = N\left(r, \frac{1}{g}\right) = \frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) = (1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

Do đó,

$$\theta_\psi(\infty) = 1 - \limsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,\psi)}{T(r,\psi)} = 1 - \frac{1}{k(1-\delta)} = 1 - (1-\theta_1) = \theta_1$$

$$\theta_\psi(0) = 1 - \limsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right)}{T(r,\psi)} = 1 - \frac{1}{k} = \theta_2$$

b) $k < \dfrac{1}{1-\theta_1}$. Khi đó, xét hàm $\psi = \dfrac{g^k}{f}$ với

$$g(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{a^i}\right) \text{ và } f(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a^{\left[\frac{i}{1-\delta}\right]}}\right),$$

trong đó,

$a \in \mathrm{K}$, $|a| > 1$ và $\delta = 1 - k(1-\theta_1)$ $(0 \leq \delta < 1)$.

Vì $\delta = 1 - k(1-\theta_1)$ nên $1 - \delta = k(1-\theta_1) \leq k$

Bởi vậy, theo tính toán ở phần trên ta có

$$T(r,\psi) = \max\left\{\log\mu(r, g^k), \log\mu(r, f)\right\} = k\frac{(\log r)^2}{2\log|a|} + O(\log r)$$

$$\overline{N}(r,\psi)=N\left(r,\frac{1}{f}\right)=(1-\delta)\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r)$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)=N\left(r,\frac{1}{g}\right)=\frac{(\log r)^2}{2\log|a|}+O(\log r)$$

Do đó, $\theta_\psi(\infty)=1-\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\overline{N}(r,\psi)}{T(r,\psi)}=1-\dfrac{(1-\delta)}{k}=\theta_1$

$$\theta_\psi(0)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)}{T(r,\psi)}=1-\frac{1}{k}=\theta_2$$

Vậy, với mọi $\theta_1\in[0,1], \theta_2\in\left\{1-\frac{1}{k}\middle| k\in\mathbb{N}\right\}$ luôn tồn tại hàm chỉnh hình ψ sao cho $\theta_\psi(\infty)=\theta_1,\ \theta_\psi(0)=\theta_2$.

Bây giờ, đặt $\varphi=\dfrac{\alpha_1\psi-\alpha_2}{\psi-1}$. Khi đó, ta có $\theta_\varphi(\alpha_1)=\theta_\psi(\infty)=\theta_1,\ \theta_\varphi(\alpha_2)=\theta_\psi(0)=\theta_2$ và định lí đã được chứng minh □

Định lí dưới đây cho thấy số 2 trong Định lí 1.7 không thể thay thế bởi một số nhỏ hơn.

Định lí 2.5.

Cho $\alpha,\beta\in \mathrm{K}\cup\{\infty\}, \alpha\neq\beta$. *Tồn tại hàm phân hình* φ *trên* K *sao cho* $\theta_\varphi(\alpha)=\theta_\varphi(\beta)=1$ *và do đó* $\sum\limits_{\alpha\in \mathrm{K}\cup\{\infty\}}\theta_\varphi(\alpha)=2$

Chứng minh.

Xét hàm $g(z)=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{a_i}\right)$ và $h(z)=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{a_i}\right)^i$

Theo Bổ đề 2.1, ta có g,h chỉnh hình trên K và $\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{h}\right)=N\left(r,\dfrac{1}{g}\right)$.

Từ định lí 1.3, ta có: $T(r,h)=T\left(r,\dfrac{1}{h}\right)+O(1)$

Do đó: $\theta_h(0)=1-\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)}{T(r,h)}=1-\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N\left(r,\frac{1}{g}\right)}{N\left(r,\frac{1}{h}\right)}$

Với mỗi số nguyên dương k, ta có

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right)\geq N\left(r,\frac{1}{g^k}\right)+O(\log r)$$

Do đó, $\limsup_{r\to\infty}\dfrac{N\left(r,\frac{1}{g}\right)}{N\left(r,\frac{1}{h}\right)}\leq\dfrac{1}{k}$, suy ra $\theta_h(0)\geq 1-\dfrac{1}{k}$ với mọi k. Cho $k\to\infty$ ta có $\theta_h(0)=1$.

Mặt khác, do h là hàm chỉnh hình trên K nên $N(r,h)=0$ và $\theta_h(\infty)=1$.

Bây giờ, đặt $\varphi=\dfrac{\alpha h-\beta}{h-1}$. Khi đó, ta có $\theta_\varphi(\alpha)=\theta_\varphi(\beta)=1$ và định lí đã được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. Boutabaa (1990), "Theorie de Nevanlinna p - adique", *Manuscripta Math.*, 67, 251 – 269.
2. W. Cherry and Z.Ye (1997), "Non- Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the Non – Archimedean Nevanlinna inverse problem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349 (12), 5043 – 5071.
3. W. Cherry and Z.Ye (2000), *Nevanlinna Theory of Value Distribution*, Springer
4. D. Drasin (1976), "The Inverse Problem of Nevanlinna Theory", *Acta Math.*, 138, 83-151.
5. H.H. Khoai and M.V. Quang (1988), "On p-adic Nevanlinna theory", *Lecture Notes in Math*, 1351, 146 – 158.
6. M.V. Quang (1989), "Some applications of p-adic Nevanlinna Theory", *Acta Math – Vietnamica*, 14 (1), 39 – 50.
7. C.C. Yang and P.C. Hu (2000), *Meromophic functions over Non- Archimedean fields*, Kluwer Academic Publishers.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 06-3-2015; ngày phản biện đánh giá: 02-4-2015; ngày chấp nhận đăng: 18-5-2015)