

Bài báo nghiên cứu

**BA KHÔNG GIAN LÀM VIỆC XÁC SUẤT VÀ SỰ KẾT NỐI
TRONG CÔNG VIỆC TOÁN HỌC
CỦA HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

Trần Kiên Minh¹, Nguyễn Thị Sinh^{1,2*}

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, Việt Nam

²Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Sinh – Email: ntsinh@ued.udn.vn

Ngày nhận bài: 22-11-2025; Ngày nhận bài sửa: 10-4-2026; Ngày duyệt đăng: 14-4-2026

TÓM TẮT

Thống kê và Xác suất là mạch kiến thức quan trọng của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 của Việt Nam. Xác suất là chủ đề tương đối khó đối với học sinh trung học phổ thông do tính trừu tượng của ngôn ngữ xác suất và tính đa nghĩa vốn có của khái niệm. Dựa trên lý thuyết Không gian làm việc toán học (Mathematical Working Spaces – MWS), nghiên cứu này phân biệt ba không gian làm việc xác suất: không gian cổ điển (CPWS), không gian thực nghiệm (FPWS) và không gian chủ quan (SPWS), nhằm phân tích công việc toán học của học sinh trong các tình huống học tập xác suất có tích hợp mô phỏng ngẫu nhiên với Excel. Bốn tình huống học tập được thiết kế và triển khai tại hai lớp 12 ở Huế và Đà Nẵng. Kết quả cho thấy học sinh không chỉ vận hành công việc toán học trong từng không gian mà còn thể hiện các kết nối rõ rệt giữa FPWS, SPWS và CPWS. Trải nghiệm mô phỏng với Excel giúp học sinh hình thành dự đoán hợp lý và củng cố lập luận xác suất cổ điển, trong khi các tính toán lý thuyết hỗ trợ điều chỉnh dự đoán chủ quan và hiểu sự hội tụ giữa tần suất và xác suất. Nghiên cứu khẳng định giá trị của mô phỏng với công nghệ trong dạy học xác suất ở trường phổ thông.

Từ khóa: Excel; không gian làm việc toán học; không gian làm việc xác suất; mô hình hoá xác suất; xác suất

1. Giới thiệu

1.1. Đặt vấn đề

Thống kê và Xác suất là một trong ba mạch kiến thức chính của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 (Ministry of Education and Training of Vietnam, 2018). Trong bối cảnh phát triển xã hội hiện nay, xác suất đóng một vai trò trung tâm trong nhiều lĩnh vực như khoa học dữ liệu, trí tuệ nhân tạo, kỹ thuật, kinh tế, góp phần hình thành năng lực ra quyết định của mỗi cá nhân trong những điều kiện bất định. Vì vậy, việc dạy học xác suất ở trung học phổ thông cần hướng đến phát triển cho học sinh một hiểu biết đầy đủ và

Cite this article as: Tran, K. M., & Nguyen, T. S. (2026). Three probability working spaces and their connections in upper secondary students' Mathematical work. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 23(6), 1504-1514. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.6.5381\(2026\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.6.5381(2026))

linh hoạt về khái niệm xác suất, đặc biệt là mối liên hệ giữa xác suất theo nghĩa cổ điển và xác suất thực nghiệm thông qua mô phỏng với sự hỗ trợ của công nghệ.

Về khía cạnh lịch sử và tri thức luận, có ba quan niệm khác nhau về bản chất của xác suất: cổ điển, tần suất và chủ quan. Các nghiên cứu quốc tế đã chỉ ra rằng học sinh thường gặp khó khăn trong việc liên kết giữa các quan niệm này, đặc biệt giữa xác suất lí thuyết và tần suất thực nghiệm (English & Watson, 2016; Park & Kim, 2023; Prodromou, 2012). Đồng thời, vai trò của mô phỏng và hoạt động thực nghiệm đã được ghi nhận là có tiềm năng làm cầu nối giúp học sinh chuyển đổi giữa các quan niệm xác suất (Ireland & Watson, 2009; Kazak & Pratt, 2021).

Việc thúc đẩy những kết nối giữa các quan niệm cổ điển, tần suất và chủ quan của học sinh trung học phổ thông trong học tập về xác suất là một vấn đề quan trọng và có ý nghĩa trong dạy học. Dựa trên lí thuyết Không gian làm việc toán học (Kuzniak, 2022; Kuzniak et al., 2016), nghiên cứu này đề xuất phân biệt ba không gian làm việc xác suất: không gian làm việc xác suất cổ điển (Classical Probability Working Space – CPWS), không gian làm việc xác suất thực nghiệm (Frequentist Probability Working Space – FPWS) và không gian làm việc xác suất chủ quan (Subjective Probability Working Space – SPWS). Ba không gian này phản ánh ba cách học sinh vận hành công việc toán học khi làm việc với các mô hình xác suất khác nhau. Việc phân tích công việc toán học của học sinh trong ba không gian này, cũng như các dịch chuyển và kết nối giữa chúng, có ý nghĩa quan trọng đối với việc hiểu sâu quá trình tư duy xác suất của học sinh.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi thiết kế một chuỗi tình huống học tập xác suất tích hợp mô phỏng với Excel nhằm tạo điều kiện để học sinh thao tác trong cả ba không gian làm việc xác suất. Từ đó, nghiên cứu hướng đến hai mục tiêu cụ thể: (a) nhận diện các biểu hiện của công việc toán học của học sinh lớp 12 trong từng không gian làm việc xác suất; (b) phân tích những kết nối và dịch chuyển trong công việc toán học của học sinh giữa ba không gian làm việc CPWS, FPWS và SPWS trong quá trình giải quyết vấn đề xác suất.

1.2. Cơ sở lí thuyết

1.2.1. Mô hình hoá xác suất

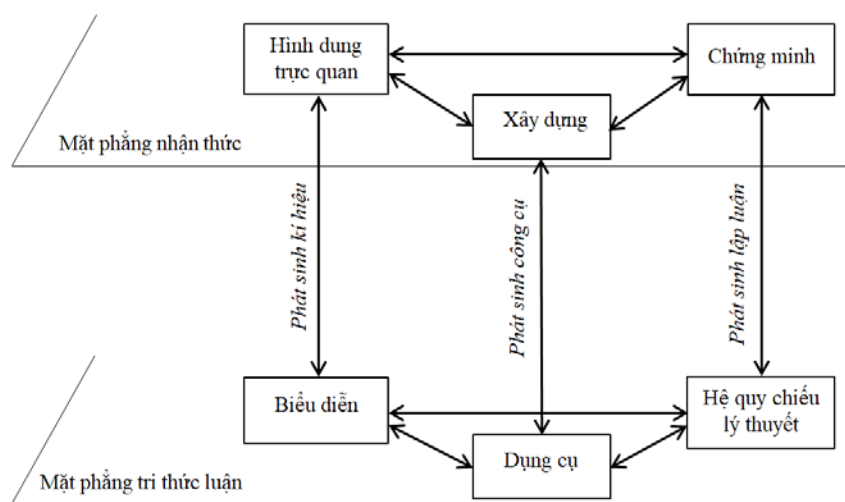
Theo Park và Kim (2023), mô hình hoá xác suất là quá trình ước tính xác suất thật (true probability) của một biến cố bằng cách thiết lập một mô hình xác suất cho tình huống đưa ra. Dựa vào cách nhìn trên, chúng tôi quan niệm mô hình hoá xác suất dựa trên xác suất lí thuyết là quá trình thiết lập một mô hình xác suất, bao gồm một không gian mẫu và các xác suất được gán cho các biến cố sơ cấp, cho một tình huống ngẫu nhiên căn cứ trên bản chất vốn có của các biến cố. Mô hình hoá xác suất dựa trên xác suất thực nghiệm là quá trình thiết lập một mô hình xác suất thông qua việc tạo sinh ra dữ liệu dựa trên việc thực hiện lặp lại các thí nghiệm ngẫu nhiên. Mô hình hoá xác suất dựa trên xác suất chủ quan được hiểu như là quá trình gán một độ tin cậy cá nhân vào mỗi biến cố sơ cấp của một tình huống ngẫu nhiên cho trước. Cách nhìn mô hình hoá xác suất này, trong đó xác suất được xem như một

giá trị trong một mô hình, có tiềm năng nối khớp được các quan niệm khách quan và chủ quan về xác suất, từ đó thúc đẩy việc hiểu đúng và đầy đủ khái niệm xác suất của học sinh.

1.2.2. Lí thuyết Không gian làm việc toán học

Lí thuyết Không gian làm việc toán học (Theory of Mathematical Working Spaces) của (Kuzniak et al., 2016; Kuzniak, 2022) cung cấp một khung lí thuyết để mô tả và phân tích công việc toán học của một cá nhân trong quá trình giải quyết nhiệm vụ toán học. Theo lí thuyết này, một *không gian làm việc toán học* (MWS) được hiểu như một kết cấu khái niệm trừu tượng bao gồm hai mặt phẳng: mặt phẳng tri thức luận (epistemological plane) và mặt phẳng nhận thức (cognitive plane), tương ứng với cấu trúc tri thức được thể chế hoá và cách người học vận hành công việc toán học.

Mặt phẳng tri thức luận liên quan đến bản chất và cấu trúc của tri thức toán học mà cá nhân (học sinh hoặc giáo viên) đang tiếp cận, bao gồm các định nghĩa, khái niệm và hệ thống lí thuyết được thể chế hóa trong chương trình và sách giáo khoa. Ba thành phần tương tác cấu thành mặt phẳng này gồm có: Biểu diễn (Representamen); Dụng cụ (Artifact) và Hệ quy chiếu lí thuyết (Referential). Ba thành phần này xác định “kết cấu tri thức” mà người học có thể huy động khi làm việc với một nhiệm vụ toán.



Hình 1. Sơ đồ không gian làm việc toán học (Kuzniak et al., 2016)

Mặt phẳng nhận thức là nơi diễn ra các thao tác, biểu diễn và lập luận cụ thể của người học khi giải quyết một vấn đề toán học. Mặt phẳng này tập trung mô tả cách thức cá nhân tiếp cận, xây dựng và vận hành công việc toán học thông qua các quá trình nhận thức cụ thể. Mặt phẳng nhận thức của một cá nhân được tổ chức thành ba quá trình nhận thức cơ bản, tương ứng với ba thành phần tri thức luận, đó là: Hình dung trực quan (Visualization); Xây dựng (Construction) và Chứng minh (Proving).

Trong một không gian làm việc toán học cho trước, công việc toán học của mỗi cá nhân được đặc trưng bởi ba quá trình hình thành: kí hiệu, công cụ và lập luận. Quá trình hình thành kí hiệu liên quan đến cách người học diễn giải, sử dụng các biểu diễn, cũng như sự chuyển đổi qua lại giữa các dạng biểu diễn. Quá trình hình thành công cụ liên quan đến cách

người học sử dụng và điều khiển các dụng cụ (vật lí, phần mềm) để xây dựng, thử nghiệm và giải quyết vấn đề toán học. Quá trình hình thành lập luận đề cập đến cách người học xây dựng các lập luận, giải thích, chứng minh dựa trên các định nghĩa, định lí, quy tắc toán học. Ba quá trình hình thành này cho phép nhận diện được học sinh làm gì, sử dụng gì và suy luận như thế nào khi thực hiện công việc toán học.

1.2.3. Không gian làm việc xác suất và sự kết nối

Dựa trên khái niệm không gian làm việc toán học của Kuzniak và ý tưởng về các không gian làm việc kết nối của Minh và Lagrange (2016), trong nghiên cứu này, chúng tôi “nhúng” mỗi mô hình xác suất vào một không gian làm việc, và đề xuất phân biệt ba không gian làm việc xác suất thành phần là: không gian làm việc xác suất cổ điển (CPWS), không gian làm việc xác suất thực nghiệm (FPWS) và không gian làm việc xác suất chủ quan (SPWS). CPWS chứa mô hình xác suất theo quan niệm cổ điển, ở đó người học làm việc trong các tình huống được giả định đối xứng trong phát sinh ngẫu nhiên. FPWS chứa mô hình xác suất theo quan niệm tần suất, ở đó người học thực hiện mô phỏng để phát sinh dữ liệu, thực hiện các tính toán tần suất và ước tính xác suất. SPWS chứa mô hình xác suất theo quan niệm chủ quan, ở đó người học hình thành niềm tin cá nhân, dự đoán hoặc ước lượng xác suất hoàn toàn dựa trên trực giác và cảm nhận cá nhân.

Bằng cách nhúng ba mô hình xác suất vào ba không gian làm việc như trên, chúng tôi hướng đến thúc đẩy những kết nối có thể giữa các không gian làm việc trong quá trình giải quyết vấn đề xác suất của học sinh. Cách tiếp cận như vậy hỗ trợ giả định của chúng tôi rằng việc kết nối ba không gian làm việc xác suất cho phép học sinh hiểu sâu kiến thức về xác suất bằng cách tương tác và làm việc trong các mô hình và không gian khác nhau, thúc đẩy một hiểu biết đầy đủ hơn về xác suất. Trong nghiên cứu này, lí thuyết MWS được sử dụng làm khung phân tích nhằm nhận diện cách học sinh vận hành công việc toán học trong ba không gian làm việc xác suất và mô tả quá trình dịch chuyển và kết nối công việc toán học của học sinh giữa các không gian này.

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Ngữ cảnh và công cụ nghiên cứu

Nghiên cứu được triển khai theo hướng nghiên cứu thiết kế với phương pháp thực nghiệm định tính, nhằm khám phá cách học sinh trung học phổ thông vận hành và kết nối các không gian làm việc xác suất trong quá trình giải quyết vấn đề. Thực nghiệm được tiến hành tại hai lớp 12 ở Huế và Đà Nẵng, mỗi lớp gồm 35 học sinh. Một chuỗi bốn tình huống học tập được xây dựng, trong đó mỗi tình huống tích hợp hoạt động mô phỏng ngẫu nhiên bằng phần mềm Microsoft Excel và bao gồm cả ba quan niệm xác suất: cổ điển, tần suất và chủ quan. Các tình huống được thiết kế nhằm tạo điều kiện để học sinh mô phỏng dữ liệu (FPWS), vận dụng mô hình lí thuyết (CPWS), đồng thời đưa ra dự đoán và lí giải dựa trên trực giác cá nhân (SPWS).

Dữ liệu được thu thập từ ba nguồn chính: (1) phiếu học tập của các nhóm học sinh (6–8 nhóm/lớp), trong đó học sinh thực hiện mô phỏng, tính toán xác suất, dự đoán và đối chiếu

kết quả; (2) tệp Excel chứa dữ liệu mô phỏng; và (3) ghi âm phỏng vấn bán cấu trúc với ba cặp học sinh ở mỗi lớp, tập trung vào lí giải xác suất và sự chuyển đổi mô hình.

Chuỗi thực nghiệm diễn ra trong bốn buổi tại mỗi trường (45–60 phút/buổi) từ tháng 12 năm 2024 đến tháng 01 năm 2025. Quy trình một buổi thực nghiệm gồm: giáo viên trình bày vấn đề bài dạy và giới thiệu tình huống học tập; học sinh làm việc nhóm để hoàn thành phiếu học tập; giáo viên hỗ trợ kĩ thuật và giải thích khi cần; thu phiếu học tập và dữ liệu mô phỏng; phỏng vấn một số cặp học sinh ngay sau hoạt động. Dưới đây là tình huống học tập trong buổi thực nghiệm thứ tư.

Tình huống: Lan chuẩn bị vào học lớp 1, bố của Lan muốn dạy Lan cách tính toán thông qua một trò chơi. Ông tung hai con xúc xắc sáu mặt cân bằng và yêu cầu Lan tính tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai con xúc xắc. Ông quan sát và nhận thấy rằng khi tổng số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 8, thì cứ trong bốn lần tung, Lan tính sai một lần. Khi tổng số chấm lớn hơn 8, thì cứ trong hai lần tung, Lan tính sai một lần. Hãy tính xác suất để Lan trả lời đúng câu hỏi của bố.

- 1) Hãy sử dụng Excel để mô phỏng 500 lần phép thử trên. Từ đó, hãy tính tần suất xuất hiện câu trả lời đúng của Lan trong 500 lần mô phỏng trên.
- 2) Từ kết quả tần suất có được trong 500 lần mô phỏng ở câu 1), em hãy thử đưa ra dự đoán về xác suất p để Lan trả lời đúng câu hỏi của bố.
- 3) Với phép thử ngẫu nhiên tung hai con xúc xắc sáu mặt cân bằng, em hãy hoàn thành bảng dữ liệu thống kê 2×2 để liệt kê các kết quả có thể xảy ra và tính xác suất của:
Biến cố T : “Tổng số chấm trên hai mặt của hai xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 8”.
Biến cố $\bar{T}$: “Tổng số chấm trên hai mặt của hai xúc xắc lớn hơn 8”.
- 4) Gọi D là biến cố “Lan trả lời đúng câu hỏi của bố”.
Dựa vào một sơ đồ hình cây, em hãy tính xác suất $p(D)$. Sau đó, so sánh giá trị xác suất $p(D)$ vừa tính được với giá trị tần suất xuất hiện câu trả lời đúng trong 500 lần mô phỏng phép thử ở câu 1) và với dự đoán của em ở câu 2).

2.2. Phân tích tiên nghiệm

Tình huống trên đề cập đến một bài toán về xác suất có điều kiện, trong đó xác suất trả lời đúng của Lan phụ thuộc vào tổng số chấm trên mặt của hai con xúc xắc. Từ góc nhìn của lí thuyết MWS, tình huống trên có tiềm năng tạo điều kiện cho học sinh làm việc trong ba không gian làm việc xác suất khác nhau. Trong FPWS, học sinh sử dụng công cụ Excel để mô phỏng quá trình tung xúc xắc và thống kê kết quả đúng sai của Lan qua 500 lần thử. Tại đây, học sinh trực tiếp trải nghiệm tính ngẫu nhiên qua mô phỏng, đồng thời hình thành hiểu biết về tần suất xuất hiện của biến cố “Lan trả lời đúng câu hỏi của bố”. Dựa trên kết quả tần suất tính được trên 500 lần mô phỏng với Excel, học sinh được yêu cầu đưa ra dự đoán cá nhân về xác suất p để Lan trả lời đúng câu hỏi của bố. Việc dự đoán này có thể xem như là công việc toán học của học sinh trong không gian làm việc xác suất chủ quan, và với câu 2) này, chúng tôi mong đợi một sự dịch chuyển không gian làm việc xác suất của học sinh, từ FPWS sang SPWS. Cuối cùng, với câu 3) và 4), học sinh được yêu cầu tính toán xác suất các biến cố bằng công thức toán học, tức là học sinh được mong đợi sẽ làm việc trong CPWS. Trong không gian làm việc này, học sinh sẽ sử dụng lập luận, công thức tính dựa trên mô hình xác suất cổ điển để tính xác suất. Về kết quả, dựa vào bảng thống kê 2×2 trong

đề bài, học sinh có thể tính được $P(T) = 13/18$; $P(\bar{T}) = 5/18$ và sử dụng sơ đồ cây để tính xác suất tổng thể của biến cố D “Lan trả lời đúng”

$$P(D) = \frac{13}{18} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{72} \approx 0,68$$

Sau cùng, việc yêu cầu so sánh giữa ba giá trị: xác suất thực nghiệm từ xấp xỉ tần suất dựa trên mô phỏng với Excel, xác suất chủ quan từ dự đoán của cá nhân và xác suất lí thuyết từ tính toán được mong đợi sẽ giúp học sinh có được một hiểu biết sâu và linh hoạt về khái niệm xác suất.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Kết quả

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả quan sát thực nghiệm lớp học với tình huống học tập ở trên thông qua phân tích dữ liệu thực nghiệm của một trường hợp điển hình là cặp học sinh Hoàng-Giang, trong đó Hoàng là nam và Giang là nữ, đều có học lực môn Toán ở mức khá, tốt theo đánh giá của giáo viên. Cả hai học sinh đã được làm quen với việc sử dụng bảng tính Excel trong học tập xác suất ở mức cơ bản, đặc biệt là các thao tác nhập công thức và sử dụng một số hàm đơn giản. Chúng tôi tập trung phân tích đặc trưng và sự vận hành công việc toán học của cặp học sinh này thể hiện trong ba không gian làm việc xác suất FPWS, SPWS, và CPWS cũng như những dịch chuyển và kết nối trong công việc toán học của học sinh giữa ba không gian này.

• Vận hành và dịch chuyển công việc toán học giữa hai không gian FPWS và SPWS

Quá trình làm việc của học sinh ban đầu diễn ra trong FPWS, nơi HS sử dụng công cụ công nghệ để mô phỏng và phân tích dữ liệu. Về chiều công cụ, cặp học sinh Hoàng-Giang thể hiện thành thạo trong việc vận dụng các hàm RANDBETWEEN, IF và COUNTIF trong Excel để thực hiện 500 lần mô phỏng.

A	B	C	D	E	F
XX1	XX2	XX1+XX2	D	E	F
1	5	6		1	343
2	5	7		1	
1	5	6		1	
2	5	7		1	
6	4	10		0	
2	1	3		0	

Hình 2. Hình ảnh mô phỏng bằng Excel của cặp học sinh Hoàng-Giang

Chiều công cụ được phát triển mạnh mẽ trong công việc toán học của cặp học sinh này trong FPWS. Việc sử dụng Excel không chỉ dừng lại ở thao tác công cụ mà còn là cơ hội để học sinh tiếp cận và làm việc với ý tưởng mô phỏng xác suất có điều kiện, từ đó phát triển nhận thức và hình thành tư duy xác suất. Đáng chú ý, sau khi mô phỏng Hoàng đã tính được số câu trả lời đúng của Lan là 343, còn Giang tính được 361 câu, cặp học sinh này đã phân biệt rõ được hai khái niệm cơ bản “tần số” và “tần suất” trong xác suất thực nghiệm, thể hiện qua đoạn trích phỏng vấn sau:

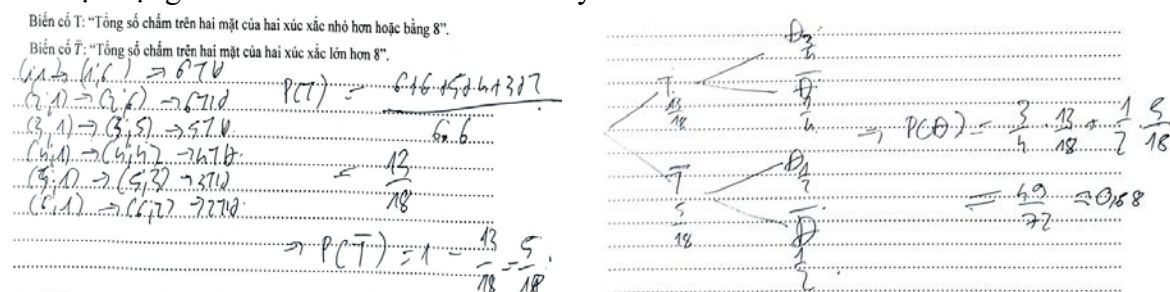
Nhà nghiên cứu: Vậy tần suất xuất hiện câu trả lời đúng là bao nhiêu?
 Hoàng: Dạ, em lấy 343 chia cho 500.
 Nhà nghiên cứu: Số 343, 361 gọi là gì?
 Hoàng-Giang: Dạ, là tần số.
 Nhà nghiên cứu: Vậy tần suất là gì?
 Giang: Dạ, lấy tần số chia cho tổng số mẫu, tức là 361 chia cho 500.

Do tính ngẫu nhiên của quá trình mô phỏng, hai học sinh đã thu được các kết quả tần số và tần suất khác nhau. Cụ thể, kết quả của học sinh Giang là 361/500 (xấp xỉ 0,722), trong khi kết quả của học sinh Hoàng là 343/500 (xấp xỉ 0,686). Sự khác biệt trong dữ liệu thực nghiệm này đã có ảnh hưởng đến dự đoán cá nhân về giá trị xác suất p , tức là độ tin cậy cá nhân mà mỗi học sinh đặt lên biến cố “Lan trả lời đúng câu hỏi của bố”. Với tần suất xấp xỉ 0,722 có được từ mô phỏng với Excel, Giang đã dự đoán giá trị của p từ 0,7 đến 0,9. Ngược lại, với tần suất xấp xỉ 0,686 có được từ kết quả mô phỏng với Excel, Hoàng đưa ra dự đoán giá trị của p trong khoảng từ 0,6 đến 0,7.

Tóm lại, kết quả thực nghiệm cho thấy tình huống học tập đưa ra đã thúc đẩy công việc toán học của học sinh trong FPWS. Quá trình hình thành công cụ đã giúp học sinh hiểu hơn các khái niệm tần số, tần suất và mối liên hệ với xác suất. Làm việc trên các nhiệm vụ toán 1) và 2) cũng thúc đẩy một sự dịch chuyển công việc toán học của học sinh từ không gian làm việc FPWS sang SPWS.

• Vận hành công việc toán học trong không gian làm việc CPWS

Công việc toán học của học sinh trong CPWS được thể hiện khi học sinh thực hiện hai nhiệm vụ toán 3) và 4) của tình huống học tập. Về chiều kí hiệu, học sinh đã sử dụng hiệu quả bảng dữ liệu thống kê 2×2 để liệt kê và đếm các kết quả có thể xảy ra. Một điểm nổi bật là cặp học sinh Hoàng-Giang đã phối hợp linh hoạt nhiều chiến lược để tính xác suất: không chỉ dùng phương pháp đếm trực tiếp để xác định có 26 trường hợp cho biến cố T , mà còn vận dụng tính chất của biến cố đối để suy ra xác suất của biến cố $\bar{T}$.



Hình 3. Công việc toán học của cặp HS Hoàng-Giang liên quan đến chiều hình thành kí hiệu

Về chiều lập luận, qua cuộc phỏng vấn vào cuối buổi thực nghiệm, cặp học sinh Hoàng-Giang đã thể hiện được các lập luận toán học phù hợp với mô hình xác suất cổ điển để tính xác suất. Cụ thể, xác suất của biến cố T được tính bởi một tỷ số dựa trên định nghĩa xác suất theo nghĩa cổ điển và xác suất của biến cố $\bar{T}$ được tính dựa trên lập luận về biến cố đối thể hiện qua đoạn trích phỏng vấn sau đây:

Hoàng-Giang: Dạ, dựa vào bảng này, em đếm có tổng cộng 26 trường hợp trên tổng cộng 36 trường hợp, nên xác suất là $13/18$

Nhà nghiên cứu: Xác suất của biến cố “Tổng số chấm lớn hơn 8” là bao nhiêu?

Hoàng-Giang: Dạ $5/18$. Em tính được bằng cách dùng biến cố đối.

Nhà nghiên cứu: Khi tổng hai mặt nhỏ hơn hoặc bằng 8 thì xác suất Lan trả lời đúng là?

Hoàng-Giang: Dạ là $3/4$, vì trong 4 lần thì Lan sai 1 lần, nên xác suất là $3/4$.

Nhà nghiên cứu: Vậy xác suất Lan trả lời đúng là bao nhiêu?

Hoàng-Giang: Dạ, dựa vào sơ đồ cây, em tính được xác suất là:

$$P(D) = \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{49}{72} \approx 0,68$$

Như vậy, trong CPWS, các chiều kí hiệu và lập luận đã được cặp học sinh Hoàng-Giang huy động trong công việc toán học để tìm ra các xác suất.

Sự kết nối giữa CPWS với FPWS và SPWS trong công việc toán học của học sinh được mong đợi thể hiện khi học sinh được yêu cầu so sánh kết quả tính xác suất $p(D)$ với tần suất xuất hiện trong 500 lần mô phỏng với Excel và với kết quả dự đoán xác suất của cá nhân học sinh. Với cặp học sinh Hoàng-Giang, chúng tôi nhận thấy có một sự kết nối hai chiều giữa hai không gian làm việc CPWS và FPWS, thể hiện qua việc hiểu mối liên hệ giữa tần suất trong mô phỏng thực nghiệm ngẫu nhiên với xác suất lí thuyết.

Nhà nghiên cứu: Em hãy so sánh kết quả tính xác suất $p(D)$ với tần suất có được khi mô phỏng 500 lần với Excel và với dự đoán cá nhân của em về xác suất trong câu 2).

Hoàng-Giang: Dạ, các kết quả xấp xỉ bằng nhau ạ.

Nhà nghiên cứu: Khi nào thì em dùng tần suất để xấp xỉ xác suất?

Hoàng-Giang: Dạ, khi có số liệu thực tế hoặc số liệu do mô phỏng tạo ra như trên

Nhà nghiên cứu: Khi nào thì em có thể tính trực tiếp xác suất?

Hoàng-Giang: Dạ, khi em dựa vào dữ liệu của bài toán và công thức đã học mà không cần phải làm mô phỏng hay thực nghiệm.

Việc trải nghiệm mô phỏng trong Excel và quan sát tần số xuất hiện biến cố D trong 500 lần mô phỏng đã hỗ trợ cặp học sinh Hoàng-Giang củng cố các tính toán xác suất lí thuyết của D và nhận ra sự xấp xỉ giữa giá trị tần suất từ thực nghiệm và giá trị xác suất từ tính toán lí thuyết. Ở chiều ngược lại, kết quả tính toán xác suất bằng công thức đã giúp học sinh xác nhận lại rằng xác suất của biến cố D gần bằng với tần suất quan sát được trong 500 lần mô phỏng.

Hơn nữa, kết quả tính xác suất của biến cố D đã giúp hai học sinh Hoàng và Giang đối chiếu lại với kết quả dự đoán cá nhân ban đầu về xác suất của biến cố này. Cụ thể, với học sinh Giang, ban đầu em dự đoán giá trị xác suất p của biến cố D là thuộc khoảng $[0,7; 0,9)$. Sau khi tính xác suất bằng công thức và được kết quả

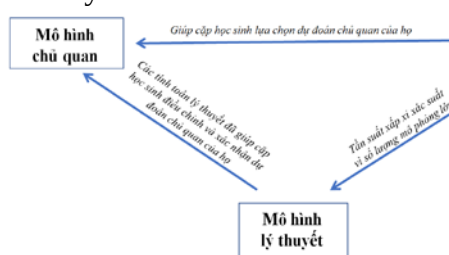
gần bằng 0,68, Giang đã nhận ra dự đoán về khoảng xác suất của mình ban đầu là chưa chính xác và đã điều chỉnh lại. Với học sinh Hoàng, dự đoán chủ quan ban đầu của em về xác suất của biến cố D là thuộc khoảng $[0,6; 0,7)$. Với kết quả tính xác suất gần bằng 0,68, Hoàng xác nhận lại rằng khoảng dự đoán xác suất của mình là phù hợp. Những thể hiện này trong công việc toán học của mỗi học sinh cho thấy một chiều kết nối từ CPWS đến SPWS. Sự

P. tính đc $\approx 0,6801$
Còn P. (cá nhân) $\approx 0,686$
→ Dự đoán của em về xác suất của biến cố D là gần đúng

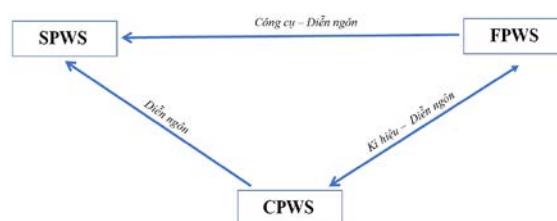
Hình 4. Bài làm của cặp HS Hoàng-Giang

kết nối này đã giúp các học sinh nhận ra sự hội tụ giữa các giá trị tần suất và giá trị xác suất lí thuyết. Từ đó, cặp học sinh Hoàng-Giang đã hiểu hơn vai trò của tần suất và xác suất trong quá trình giải quyết vấn đề xác suất. Điều này cho thấy một quá trình hình thành lập luận ở mức độ cao, nơi học sinh không chỉ thực hiện các phép tính mà còn có khả năng suy ngẫm và khái quát hóa về bản chất của các khái niệm liên quan đến xác suất.

Từ các phân tích trên, chúng tôi tổng hợp lại và đưa ra sơ đồ mô tả những kết nối đã được thể hiện trong công việc toán học của cặp học sinh Hoàng-Giang giữa ba mô hình xác suất cũng như giữa ba không gian làm việc xác suất tương ứng như trên. Trên mỗi sơ đồ, chiều của mũi tên cho biết chiều kết nối đã thể hiện trong công việc toán học của cặp học sinh này.



Hình 5. Sơ đồ mô tả những kết nối giữa ba mô hình xác suất



Hình 6. Sơ đồ mô tả những kết nối giữa ba không gian làm việc xác suất

3.2. Thảo luận

Kết quả nghiên cứu cho thấy việc thiết kế tình huống dạy học đã kích hoạt hiệu quả ba không gian làm việc xác suất và thúc đẩy sự dịch chuyển qua lại giữa chúng. Kết quả này phù hợp với nhận định của Prodromou (2012) về vai trò của mô phỏng trong việc hỗ trợ học sinh kết nối giữa xác suất thực nghiệm và xác suất lí thuyết, đồng thời cho thấy rằng khi thiết kế các hoạt động có định hướng mô hình hóa rõ ràng, học sinh có thể hiểu sâu hơn mối quan hệ này. Kết quả cũng tương đồng với phát hiện của Park và Kim (2023) về vấn đề kết nối giữa dữ liệu và mô hình xác suất dựa trên kết quả mô phỏng nhằm làm phong phú thêm sự hiểu biết về khái niệm xác suất của học sinh. Ngoài ra, kết quả nghiên cứu bổ sung thêm bằng chứng cho luận điểm của Kazak và Pratt (2021) về việc dạy học xác suất nên được định hướng như một quá trình mô hình hóa dữ liệu thực nghiệm, vận dụng công cụ công nghệ để xây dựng và kiểm chứng mô hình xác suất một cách linh hoạt. Kết quả cũng khẳng định tầm quan trọng của công cụ công nghệ và các biểu diễn toán học, như bảng hai chiều và sơ đồ cây, trong việc hỗ trợ học sinh hình thành và vận hành kết nối giữa các quan niệm và mô hình xác suất, tương tự những khuyến nghị đề xuất trong các nghiên cứu về dạy học xác suất trước đây (English & Watson, 2016; Ireland & Watson, 2009).

Cuối cùng, dưới góc nhìn của lí thuyết MWS, sự vận hành của học sinh trong ba chiều công cụ, kí hiệu và lập luận đã làm rõ cách học sinh phát triển hiểu biết khái niệm thông qua tương tác giữa các mô hình xác suất. Những kết nối giữa FPWS, SPWS và CPWS cho thấy học sinh không chỉ thực hiện phép tính, mà còn giải thích, đối chiếu, điều chỉnh và khái quát hóa, từ đó đạt được một hiểu biết sâu và linh hoạt hơn về xác suất.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, dựa trên khái niệm không gian làm việc toán học của Kuzniak và cộng sự, chúng tôi đã đề xuất phân biệt ba không gian làm việc toán học liên quan đến công việc xác suất: CPWS, FPWS và SPWS. Mỗi không gian làm việc xác suất chứa đựng một mô hình xác suất tương ứng. Từ cách tiếp cận mô hình hoá xác suất này, chúng tôi đã thiết kế các tình huống học tập xác suất phù hợp, tích hợp công cụ bảng tính Excel và hướng đến thúc đẩy những kết nối có thể có giữa ba không gian làm việc xác suất này trong công việc toán học của học sinh khi giải quyết vấn đề về xác suất.

Kết quả cho thấy sự xuất hiện nổi bật các kết nối hai chiều giữa FPWS, SPWS và CPWS. Mô phỏng thực nghiệm đóng vai trò chất xúc tác cho việc hình thành và điều chỉnh dự đoán chủ quan, đồng thời trở thành điểm tựa để học sinh hiểu rõ hơn mối quan hệ giữa tần suất và xác suất lí thuyết. Ngược lại, lập luận trong CPWS giúp học sinh kiểm chứng và sửa đổi niềm tin xác suất ban đầu, qua đó hình thành một hiểu biết đầy đủ hơn về xác suất.

Về mặt thực hành, nghiên cứu của chúng tôi mang đến một cách nhìn mới về tiếp cận mô hình hoá trong dạy học xác suất, trong đó cách nhìn xác suất gắn liền với một mô hình xác suất và nhấn mạnh sự huy động và kết nối giữa các mô hình xác suất khác nhau trong các tình huống dạy học xác suất. Sự tích hợp các công cụ công nghệ, chẳng hạn bảng tính Excel, trong dạy học xác suất là rất cần thiết nhằm giúp học sinh trải nghiệm và thực hiện các phép thử ngẫu nhiên thông qua mô phỏng, từ đó hỗ trợ việc hiểu vững chắc các khái niệm như tần số, tần suất và sự ổn định của tần suất khi lặp lại một số lượng lớn các phép thử ngẫu nhiên.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- English, L. D., & Watson, J. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 28–62. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.1.0028>
- Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339–370. <https://doi.org/10.29333/iejme/244>
- Kazak, S., & Pratt, D. (2021). Developing the role of modelling in the teaching and learning of probability. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 113–133. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1802328>
- Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces: Theoretical characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context* (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: A framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 793–807. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Ministry of Education and Training of Vietnam. (2018). *General education curriculum: Mathematics*.
- Park, J., & Kim, D. W. (2023). Facilitating factors and obstacles in the coordination of theoretical probability and relative frequency estimates of probability. *Educational Studies in Mathematics*, 114, 439–460. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10253-w>
- Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM – Mathematics Education*, 44, 855–868. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0469-z>

THREE PROBABILITY WORKING SPACES AND THEIR CONNECTIONS IN UPPER SECONDARY STUDENTS' MATHEMATICAL WORK

Tran Kiem Minh¹, Nguyen Thi Sinh^{1,2*}

¹University of Education, Hue University, Vietnam

²The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam

*Corresponding author: Nguyen Thi Sinh – Email: ntsinh@ued.udn.vn

Received: November 22, 2025; Revised: April 10, 2026; Accepted: April 14, 2026

ABSTRACT

Statistics and probability constitute a key strand of Vietnam's 2018 General Education Curriculum in Mathematics. Probability can be challenging for upper secondary students because of the abstract nature of probabilistic language and the conceptual ambiguity associated with probability. Drawing on the theory of Mathematical Working Spaces (MWS), this study distinguishes three probability working spaces—the Classical Probability Working Space (CPWS), the Frequentist Probability Working Space (FPWS), and the Subjective Probability Working Space (SPWS)—as an analytical framework for examining students' mathematical work in probability learning activities involving random simulations using Excel. Four learning activities were designed and implemented in two Grade 12 classes in Hue and Da Nang. The findings indicate that students not only engaged meaningfully within each probability working space but also established clear connections and transitions among FPWS, SPWS, and CPWS. Excel-based simulations helped students generate reasonable subjective estimates and strengthen classical probabilistic reasoning, whereas theoretical calculations enabled them to revise their subjective estimates and recognize the convergence of relative frequency toward theoretical probability. The study demonstrates the pedagogical value of technology-enhanced simulation in school probability education.

Keywords: Excel; Mathematical Working Spaces; probability; probability modeling; Probability Working Spaces