

Bài báo nghiên cứu

KHÔNG GIAN BESOV MORREY LIÊN KẾT VỚI TOÁN TỬ SCHRÖDINGER VỚI HÀM THỂ BÌNH PHƯƠNG NGHỊCH ĐẢO

Trần Hoàng Vũ, Nguyễn Phúc Nguyên, Võ Hoàng Nhật*, Huỳnh Trần Minh Thuận

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Võ Hoàng Nhật – Email: vohoangnhat.140903@gmail.com

Ngày nhận bài: 13-9-2025; Ngày nhận bài sửa: 12-8-2026; Ngày duyệt đăng: 21-8-2026

TÓM TẮT

Cho $\mathbb{L} = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}$ là toán tử Schrödinger trên $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, với hàm thế bình phương nghịch

đảo. Do tính kì dị của hàm thế, đặc biệt khi $a < 0$, nhân nhiệt của $\mathbb{L}$ không thỏa mãn các đánh giá Gaussian chuẩn thường được sử dụng trong lý thuyết các không gian hàm liên kết với toán tử. Mục tiêu của bài báo là xây dựng và nghiên cứu một lớp không gian Besov Morrey liên kết với $\mathbb{L}$. Phương pháp được sử dụng dựa trên các đánh giá của nhân nhiệt, phép tính hàm, một không gian phân phối thích hợp với $\mathbb{L}$, cùng với một số bất đẳng thức trên không gian Morrey. Trên cơ sở đó, chúng tôi định nghĩa các không gian Besov Morrey gắn với $\mathbb{L}$ và chứng minh rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào việc lựa chọn phân hoạch đơn vị. Các kết quả chính thiết lập các đặc trưng chuẩn tương đương thông qua các hàm bình phương theo phương thẳng đứng và thông qua các hàm bình phương sinh bởi các nửa nhóm phân thứ của $\mathbb{L}$. Các kết quả này mở rộng lý thuyết Besov gắn với toán tử Schrödinger có hàm thế bình phương nghịch đảo sang khung Morrey, qua đó cho phép mô tả đồng thời tính trơn và tính chất địa phương của hàm.

Từ khóa: không gian Morrey; không gian Besov; Hàm thế bình phương nghịch đảo

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét toán tử Schrödinger $\mathbb{L} = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}$ với $a \geq -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ và với hàm thế bình phương nghịch đảo trên $n \geq 3$. Toán tử Schrödinger $\mathbb{L}$ được hiểu là mở rộng Friedrichs của toán tử $\mathbb{L} = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}$ được định nghĩa ban đầu trên $C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Ta đã biết rằng $\mathbb{L}$ là không âm và tự liên hợp khi $a \geq -\left(\frac{n-2}{n}\right)^2$, và phép mở rộng này có thể không duy nhất nếu $-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 < a < 1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^2$.

Cite this article as: Tran, H. V., Nguyen, P. P., Vo, H. N., & Huynh, T. M. T. (2026). Besov–Morrey spaces associated with schrödinger operators with inverse-square potentials. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 23(8), 1810-1821. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.8.5647\(2026\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.8.5647(2026))

Mặt khác, các không gian Morrey cổ điển - vốn là sự tổng quát tự nhiên của các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$, được giới thiệu lần đầu bởi Morrey trong (Morrey, 1938) nhằm khảo sát tính chất địa phương của nghiệm cho các phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai. Sau đây, ta nhắc lại định nghĩa của không gian Morrey.

Định nghĩa 1.1. (Không gian Morrey) Với $0 \leq p \leq r < \infty$, không gian Morrey M_p^r được định nghĩa bởi

$$M_p^r = \left\{ f \in L_{\text{loc}}^p : \|f\|_{M_p^r} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{\frac{n}{r} - \frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x_0, R))} \right\} < \infty.$$

So với không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$, không gian Morrey mô tả tính chính quy địa phương một cách chính xác hơn và do đó cho phép cải thiện các kết quả về tính chính quy trong các bài toán biên elliptic và các phương trình tiến hóa phi tuyến.

Trong những năm gần đây, đã có nhiều tác giả mở rộng lý thuyết không gian Besov sang Besov Morrey (viết tắt là BM) bằng cách thay thế không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ trong định nghĩa của không gian Besov bởi không gian Morrey. Không gian BM, được giới thiệu lần đầu bởi Kozono và Yamazaki (Kozono & Yamazaki, 1994) nhằm khảo sát nghiệm địa phương theo thời gian của hệ phương trình Navier–Stokes với dữ liệu ban đầu thuộc các không gian này. Thực tế, không gian BM mang nhiều đặc trưng của cả không gian Besov và không gian Morrey. Điều này xuất phát từ việc các không gian BM giữ được nhiều tính chất quan trọng của không gian Besov, đồng thời mô tả tốt hơn các dao động địa phương và các điểm kỳ dị của hàm so với không gian Besov. Ngoài ra, Mazzucato (Mazzucato, 2003a; Mazzucato, 2003b) đã thiết lập các đặc trưng sóng nhỏ cho không gian BM. Vào các năm 2018 và 2020, (Dao et al., 2018; Nguyen et al., 2020) đã nghiên cứu các không gian BM và Triebel Lizorkin Morey liên kết với toán tử Hermite bằng cách sử dụng kỹ thuật hàm cực đại do Fefferman, Stein và Peetre đưa ra, trong khi các phương pháp thông thường đối với các không gian hàm này thường dựa trên phân tích Littlewood–Paley. Năm 2021 và 2022, (Tran et al., 2021; Le et al., 2022) đã xây dựng không gian BM và Triebel Lizorkin Morey liên kết với toán tử tự liên hợp không âm thỏa mãn thỏa mãn các đánh giá Gaussian chuẩn.

Trong bài báo này, trước hết chúng tôi xây dựng lý thuyết về không gian BM mới gắn với toán tử $\mathbb{L}$ (xem Định lý 3.2, 3.3 và 3.4). Trong các công trình trước đây (Bui et al., 2012; Iwabuchi, 2018; Keryacharian & Petrushev, 2015; Keryacharian & Petrushev, 2009), các đánh giá chặn trên kiểu Gaussian và chặn trên kiểu Poisson đóng vai trò thiết yếu. Các điều kiện này đảm bảo nửa nhóm sinh bởi toán tử bị chặn trên L^p với mọi $1 \leq p \leq \infty$. Trong thiết lập của chúng tôi, cả đánh giá Gaussian lẫn đánh giá Poisson đều không còn đúng khi $a < 0$. Khi đó, tồn tại $p \in [1, \infty]$ để nửa nhóm $e^{-t\mathbb{L}}$ không bị chặn trên L^p . Do đó, các phương pháp trong (Bui et al., 2012; Iwabuchi, 2018; Keryacharian & Petrushev, 2015; Keryacharian & Petrushev, 2009) không thể áp dụng trong trường hợp này. Chúng tôi khắc phục khó khăn này bằng cách sử dụng một không gian phân phối mới được giới thiệu trong (Bui, 2020). Phương pháp của chúng tôi dựa trên các đánh giá chính xác của nhân nhiệt trong (Liskevich & Sobol, 2003; Milman & Semenov, 2004).

2. Kiến thức chuẩn bị

Với $\theta > 0$, hàm cực đại Hardy–Littlewood $\mathcal{M}_\theta$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{M}_\theta f(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^\theta dy \right)^{1/\theta}, x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó sup được lấy trên tất cả các quả cầu B chứa x . Khi $\theta = 1$, ta viết $\mathcal{M}$ thay cho $\mathcal{M}_1$.

2.1. Không gian Morrey. Ta nhắc lại ở đây một số đánh giá quan trọng liên quan đến không gian Morrey, sẽ được sử dụng trong các phần tiếp theo.

Bổ đề 2.1. (Dao et al., 2018). Các khẳng định sau là đúng:

1. Với $0 < p \leq r < \infty$ và $\theta > 0$, ta có

$$\|f^\theta\|_{M_p^r} \lesssim \|f\|_{M_{p\theta}^{r\theta}}^\theta.$$

2. (Bất đẳng thức Minkowski) Với $0 < q \leq p \leq r < \infty$, ta có

$$\left\| \left(\int_a^b |F(\cdot, t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{M_p^r} \lesssim \left(\int_a^b \|F(\cdot, t)\|_{M_p^r}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Ta cần đến tính chất sau đây của hàm cực đại.

Bổ đề 2.2. (Nguyen et al., 2020, Bổ đề 2.6) Cho $0 < p \leq r \leq \infty$ và $0 < \theta < p$. Khi đó toán tử $\mathcal{M}_\theta$ bị chặn trên M_p^r .

2.2. Đánh giá nhân

$$\text{Ta đặt } \sigma := \frac{n-2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(n-2)^2 + 4a} \text{ và } n_\sigma = \begin{cases} \frac{n}{\sigma}, & \sigma > 0, \\ \infty, & \sigma \leq 0, \end{cases} \text{ và } K_\sigma = \begin{cases} (n'_\sigma, n_\sigma), & \sigma > 0, \\ [1, \infty], & \sigma \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{Với } s \in \mathbb{R} \text{ ta đặt } w_s(x, t) = \left(1 + \frac{t}{|x|} \right)^{s \vee 0} \text{ với } x \in \mathbb{R}^n \text{ và } t > 0 \text{ trong đó } s \vee 0 = \max\{s, 0\}.$$

Ta bắt đầu với một số đánh giá cơ bản

Định lý 2.3. (Milman & Semenov, 2004; Liskevich & Sobol, 2003). Giả sử $n \geq 3$ và

$$a \geq -\left(\frac{n-2}{2} \right)^2. \text{ Kí hiệu } p_t(x, y) \text{ là nhân của nửa nhóm } e^{-t\mathbb{L}}. \text{ Khi đó, tồn tại hai hằng số}$$

dương C và c sao cho với mọi $t > 0$ và $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$p_t(x, y) \leq C \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{|x|} \right)^\sigma \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{|y|} \right)^\sigma t^{-n/2} e^{-|x-y|^2/ct}. \quad (1)$$

Ta đã biết rằng đánh giá chặn trên trong (2) có thể được chuyển sang cho đạo hàm theo thời gian của nhân nhiệt.

Mệnh đề 2.4. (Bui et al., 2017). Giả sử $n \geq 3$ và $a \geq -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. Khi đó, tồn tại hai hằng số dương C và c sao cho với mọi $t > 0$ và $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$|q_t(x, y)| \leq C \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{|x|}\right)^\sigma \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{|y|}\right)^\sigma t^{-n/2} e^{-|x-y|^2/ct}, \quad (2)$$

Trong đó $q_t(x, y)$ là nhân tương ứng của toán tử $t\mathbb{L}e^{-t\mathbb{L}}$.

Kí hiệu $E_{\mathbb{L}}(\lambda)$ là **họ các phép chiếu phổ** của toán tử $\mathbb{L}$. Khi đó, theo lý thuyết phổ, với mọi hàm Borel bị chặn $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ta có thể định nghĩa

$$F(\mathbb{L}) = \int_0^\infty F(\lambda) dE_{\mathbb{L}}(\lambda)$$

như một toán tử bị chặn trên $L^2(\mathbb{R}^n)$. Trong phần tiếp theo, ta đặt

$$w_t(x, \lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{|x|}\right)^t$$

với mọi $t \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ và $x \in \mathbb{R}^n$.

Ta giới thiệu một số đánh giá nhân cho phép tính hàm của toán tử $\mathbb{L}$.

Bổ đề 2.5. (Bui, 2020) Ta có:

a) Cho $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là hàm chẵn. Khi đó, với mọi $N > 0$ tồn tại hằng số C sao cho

$$|\varphi(t\sqrt{\mathbb{L}})(x, y)| \leq \frac{C}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(x, t) w_\sigma(y, t), \quad (3)$$

với mọi $t > 0$ và $x, y \in X$.

b) Cho $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là các hàm chẵn. Khi đó, với mọi $N > 0$ tồn tại hằng số C sao cho

$$|\varphi_1(t\sqrt{\mathbb{L}})\varphi_2(t\sqrt{\mathbb{L}})(x, y)| \leq \frac{C}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(x, t) w_\sigma(y, t) \quad (4)$$

với mọi $t \leq s < 2t$ và $x, y \in X$.

c) Cho $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là các hàm chẵn, với $\varphi_2^{(\nu)} = 0$ với mọi $\nu = 0, 1, 2, \dots, 2\ell$ với một vài $\ell \in \mathbb{Z}_+, \ell \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó, với mọi $N > 0$ tồn tại hằng số C sao cho

$$|\varphi_1(t\sqrt{\mathbb{L}})\varphi_2(t\sqrt{\mathbb{L}})(x, y)| \leq C \left(\frac{s}{t}\right)^{2\ell} \frac{1}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(x, t) w_\sigma(y, t) \quad (5)$$

Với mọi $t \geq s > 0$ và $x, y \in X$.

Với $t, N > 0$ ta định nghĩa

$$T_{t,N} f = \int_{\mathbb{R}^n} T_{t,N}(x, y) f(y) dy \text{ trong đó } T_{t,N}(x, y) = \frac{1}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(x, t) w_\sigma(y, t).$$

Từ đây về sau, N luôn được giả sử lớn hơn n , trừ khi có phát biểu khác.

Mệnh đề 2.6. Cho $N > n, n_\sigma' \leq r \leq p < n_\sigma$. Khi đó, ta có

$$\|T_{t,N} f\|_{M_p^r} \leq C \|f\|_{M_p^r} \quad (6)$$

trong đó $C = C(n, p)$.

Chứng minh. Khi $\sigma \leq 0$, chứng minh của Mệnh đề 2.13 trong (Bui, 2020) cho ta $T_{t,N} \leq Mf$.

Từ Bổ đề 2.2 ta suy ra được (6).

Ta chứng minh cho $\sigma > 0$. Cho $f \in M_p^r, t > 0$, và $x \in \mathbb{R}^n$. Đặt $B = B(0, t)$. Ta phân tích

$$T_{t,N} f(x) = T_{t,N}(f)(x)\chi_{B^c}(x) + T_{t,N}(f\chi_{B^c})(x) + T_{t,N}(f\chi_B)(x)\chi_B(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x).$$

Trước hết, ta đánh giá I_1 . Với $x \in B^c$ và $1 < \theta < p$, chứng minh của Mệnh đề 2.13

trong (Bui, 2020) cho ta $|I_1(x)| \lesssim \mathcal{M}_\theta f(x)$. Áp dụng Bổ đề 2.2, suy ra $\|I_1\|_{M_p^r} \lesssim \|f\|_{M_p^r}$.

Tiếp theo, ta ước lượng $I_2(x)$.

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &= |T_{t,N}(f\chi_{B^c})(x)\chi_B(x)| = w_\sigma(x, t)\chi_B(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(y, t) |f\chi_{B^c}(y)| dy \\ &\lesssim t^\sigma |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \int_{B^c} \frac{1}{t^n} \left(\frac{t}{|y|}\right)^N |f(y)| dy, \end{aligned}$$

ước lượng trên được suy ra trực tiếp từ đánh giá: $x \in B$ nên $1 < \frac{t}{|x|}$, do đó

$$w_\sigma(x, t) < 2^\sigma t^\sigma |x|^{-\sigma}.$$

Mặt khác $y \in B^c$ nên $w_\sigma(y, t) < 2^\sigma$ và $1 + \frac{|x-y|}{t} \geq 1 + \frac{|y|-|x|}{t} \geq \frac{|y|}{t}$, do đó

$$\left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} \leq \left(\frac{t}{|y|}\right)^N.$$

Ta có

$$\int_{B^c} \frac{1}{t^n} \left(\frac{t}{|y|}\right)^N |f(y)| dy = \sum_{j \geq 0} \int_{2^j t \leq |y| \leq 2^{j+1} t} \frac{1}{t^n} \left(\frac{t}{|y|}\right)^N |f(y)| dy \lesssim \sum_{j \geq 0} \frac{1}{t^n} 2^{-jN} dy \int_{2^j B} |f(y)| dy$$

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned} \int_{2^j B} |f(y)| dy &\leq \left(\int_{2^j B} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{2^j B} 1^{p'} dy\right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p(2^j B)} (2^j t)^{n(1-1/p)} \\ &\lesssim (2^j t)^{-n/r+n/p} \|f\|_{M_p^r} (2^j t)^{n-n/p} = (2^j t)^{n-n/r} \|f\|_{M_p^r}. \end{aligned}$$

Ước lượng trên dẫn đến

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\lesssim t^\sigma |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \int_{B^c} \frac{1}{t^n} \left(\frac{t}{|y|}\right)^N |f(y)| dy \lesssim t^\sigma |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \sum_{j \geq 0} \frac{1}{t^n} 2^{-jN} (2^j t)^{n-n/r} \|f\|_{M_p^r} \\ &\lesssim t^{\sigma-n/r} \|f\|_{M_p^r} |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-n+n/r)} \lesssim t^{\sigma-n/r} \|f\|_{M_p^r} |x|^{-\sigma} \chi_B(x), \end{aligned}$$

với lưu ý rằng $N > n$ nên chuỗi $\sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-n+n/r)}$ hội tụ.

Lấy chuẩn $\|\cdot\|_{M_p^r}$ hai vế, ta được

$$\|I_2\|_{M_p^r} \lesssim t^{\sigma-n/r} \|f\|_{M_p^r} \cdot \|x|^{-\sigma} \chi_B(x)\|_{M_p^r} \lesssim t^{\sigma-n/r} \|f\|_{M_p^r} t^{n/r-\sigma} = \|f\|_{M_p^r}.$$

Cuối cùng, ta ước lượng $I_3(x)$.

$$\begin{aligned} |I_3(x)| &\lesssim w_\sigma(x) \chi_B(x) \int_B \frac{1}{t^n} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-N} w_\sigma(y, t) |f(y)| dy \\ &\lesssim \frac{1}{t^n} \cdot t^\sigma |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \sum_{j \geq 0} \int_{2^{-j-1}t \leq |y| \leq 2^{-j}t} \left(\frac{t}{|y|}\right)^\sigma |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Với mỗi $j \geq 0$, ta có

$$\int_{2^{-j-1}t \leq |y| \leq 2^{-j}t} \left(\frac{t}{|y|}\right)^\sigma |f(y)| dy \lesssim \int_{2^{-j-1}t \leq |y| \leq 2^{-j}t} 2^{j\sigma} |f(y)| dy \lesssim 2^{j\sigma} \int_{2^{-j}B} |f(y)| dy.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned} \int_{2^{-j}B} |f(y)| dy &\leq \left(\int_{2^{-j}B} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{2^{-j}B} 1^{p'} dy\right)^{1/p'} \lesssim \|f\|_{L^p(2^{-j}B)} (2^{-j}t)^{n(1-1/p)} \\ &\lesssim (2^{-j}t)^{n/p-n/r} \|f\|_{M_p^r} \cdot (2^{-j}t)^{n(1-1/p)} = (2^{-j}t)^{n(1-1/r)} \|f\|_{M_p^r}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} |I_3(x)| &\lesssim \frac{1}{t^n} \cdot t^\sigma |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \|f\|_{M_p^r} \sum_{j \geq 0} 2^{j\sigma} (2^{-j}t)^{n(1-1/r)} \\ &\lesssim \frac{t^{n(1-1/r)} \cdot t^\sigma}{t^n} \cdot |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \|f\|_{M_p^r} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(n/r'-\sigma)} \\ &\lesssim t^{\sigma-n/r} |x|^{-\sigma} \chi_B(x) \|f\|_{M_p^r}, \end{aligned}$$

với lưu ý rằng $r < n_\sigma$ nên $\sigma < \frac{n}{r'}$.

Tương tự như $I_2(x)$, ta có

$$\|I_3\|_{M_p^r} \lesssim t^{\sigma-n/r} \|x|^{-\sigma} \chi_B(x)\|_{M_p^r} \|f\|_{M_p^r} \lesssim t^{\sigma-n/r} t^{n/r-\sigma} \|f\|_{M_p^r} = \|f\|_{M_p^r}.$$

Từ đó ta thu được điều phải chứng minh ■

Nhận xét 2.7.

Từ các đánh giá nhân trong (1) và (2), suy ra rằng các toán tử $e^{-t\mathbb{L}}$ và $t\mathbb{L}e^{-t\mathbb{L}}$ thỏa mãn (6) với mọi $t > 0$. Cho $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là một hàm chẵn. Từ Bổ đề 2.5 và Mệnh đề 2.6, suy ra rằng $\varphi(t\sqrt{\mathbb{L}})$ thỏa mãn (6) với mọi $t > 0$.

2.3. Không gian phân phối

Không gian phân phối đóng vai trò thiết yếu trong lý thuyết các không gian Besov. Toàn bộ nội dung của mục 3 được lấy từ (Bui, 2020).

Lớp các hàm thử $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ gắn với toán tử L được định nghĩa là tập tất cả các hàm $\phi \in \cap_{m \geq 1} \mathcal{D}(\mathbb{L}^m)$, trong đó $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ là miền xác định của $\mathbb{L}$, sao cho

$$\mathcal{P}_{p,\ell,m} = \left\| \left(1 + |\cdot|\right)^{\ell} \mathbb{L}^m \phi \right\|_p < \infty, \quad \forall \ell > 0, m \in \mathbb{N} \text{ và } p \in K_{\sigma}.$$

Ta có $f = g$ trong $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ khi và chỉ khi $f = g$ hầu khắp nơi. Như thường lệ, ta định nghĩa không gian các phân phối $\mathcal{S}'_{\mathbb{L}}$ là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ với cặp đôi ngẫu được xác định bởi $\langle f, \phi \rangle = f(\bar{\phi})$ với mọi $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{L}}$ và $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbb{L}}$. Không gian phân phối $\mathcal{S}'_{\mathbb{L}}$ thích hợp để định nghĩa các không gian Besov thuần nhất. Tuy nhiên, để nghiên cứu phiên bản thuần nhất của các không gian này, ta cần một số điều chỉnh.

Ta định nghĩa $\mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$ là tập tất cả các hàm $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $g_k \in \mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ thỏa mãn $\phi = \mathbb{L}^k g_k$. Nếu g_k tồn tại thì nó là duy nhất trong $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$. Ta có $f = g$ trong $\mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$ khi và chỉ khi $f = g$ hầu khắp nơi. Khi đó, ta kí hiệu $\mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty}$ là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính trên $\mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$.

Trong phần tiếp theo, ta gọi “**phân hoạch đơn vị**” là một hàm $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sao cho $\text{supp } \psi \subset \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, $\int \psi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \neq 0$ và $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\lambda) = 1$ trên $(0, \infty)$ trong đó $\psi_j(\lambda) := \psi(2^{-j}\lambda)$ với mọi $j \in \mathbb{Z}$.

3. Không gian Besov Morrey liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ và các đặc trưng

Định nghĩa 3.1. Cho ψ là một phân hoạch đơn vị. Với $p \in K_{\sigma}$, $p \leq r \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, và $s \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa không gian Besov thuần nhất $BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)$ như sau:

$$BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty} : \|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

$$\text{trong đó } \|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \left\| \psi_j(\sqrt{\mathbb{L}}) f \right\|_{\mathbf{M}_p^r} \right)^q \right\}^{1/q}.$$

Định lý 3.2. Định nghĩa của không gian Besov $BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)$ trong Định nghĩa 3.1 không phụ thuộc vào việc lựa chọn hàm ψ .

Chứng minh. Giả sử $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là một phân hoạch đơn vị khác. Khi đó, với mọi $j \in \mathbb{N}$, chứng minh của Định lý 4.2 trong (Bui, 2020) cho ta $\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}}) f = \sum_{k=j-2}^{j+2} \varphi_k(\sqrt{\mathbb{L}}) \varphi_k(\sqrt{\mathbb{L}}) f$.

Từ đây, kết hợp với Nhận xét 2.7, suy ra rằng với mọi $p \in K_{\sigma}$, ta có

$$\|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \lesssim \sum_{k=j-2}^{j+2} \|\phi_k(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r}.$$

$$\text{Do đó, ta suy ra } \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q} \lesssim \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\phi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\phi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q} \lesssim \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q}.$$

$$\text{Vì vậy } \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\phi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q} \sim \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \right\}^{1/q}.$$

Điều này cho thấy rằng không gian Besov $BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)$ không phụ thuộc vào việc lựa chọn hàm ψ . ■

3.1. Các đặc trưng liên tục thông qua hàm bình phương theo phương thẳng đứng

Tương tự như trong trường hợp cổ điển, không gian Besov mới $BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)$ có thể được đặc trưng thông qua các hàm bình phương theo phương thẳng đứng.

Định lý 3.3. Cho ψ là một phân hoạch đơn vị. Với $p \in K_\sigma, 1 \leq q \leq \infty, p \leq r \leq \infty$ và $s \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} \sim \left[\int_0^\infty \left(t^{-s} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}.$$

Chứng minh Định lý 4.2. Từ đồng nhất thức trong Mệnh đề 3.4, ta có

$$\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f = c_\psi \int_0^\infty \psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f \frac{dt}{t} \text{ trong } \mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty}$$

$$\text{với mọi } j \in \mathbb{Z}, \text{ trong đó } c_\psi = \left[\int_0^\infty \psi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right]^{-1}.$$

Do $\text{supp } \psi \subset \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$, nên đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng:

$$\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f = c_\psi \int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f \frac{dt}{t}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski trong Bổ đề 2.1, cùng với Bổ đề 2.5 và Mệnh đề 2.6, ta thu được

$$\|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \lesssim \int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \frac{dt}{t}.$$

Với $q \in [1, \infty]$ và $s \in \mathbb{R}$, sử dụng bất đẳng thức Hölder, suy ra

$$(2^{js} \|\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r})^q \lesssim \int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} (t^{-s} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r})^q \frac{dt}{t}$$

Do đó, ta suy ra rằng

$$\|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left[\int_0^\infty \left(t^{-s} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}.$$

Với mỗi $t > 0$ ta có thể chọn $j \in \mathbb{Z}$ sao cho $t \in [2^{-j-1}, 2^{-j})$. Khi đó, ta có,

$$\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f = \sum_{k=j-2}^{j+2} \psi(t\sqrt{\mathbb{L}}\psi_k(\sqrt{\mathbb{L}}))f$$

Dựa vào Nhận xét 2.7, suy ra rằng với mọi $p \in K_\sigma$, ta có

$$\|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} = \sum_{k=j-2}^{j+2} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r}, \quad \forall t \in [2^{-j-1}, 2^{-j})$$

Từ đó suy ra

$$\int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} (t^{-s} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r})^q \frac{dt}{t} = \sum_{k=j-3}^{j+3} (2^{ks} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r})^q, \quad \forall t \in [2^{-j-1}, 2^{-j}).$$

Lấy tổng theo mọi $j \in \mathbb{N}$ ta thu được

$$\left[\int_0^\infty \left(t^{-s} \|\psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f\|_{M_p^r} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \lesssim \|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Điều này hoàn tất chứng minh. ■

3.2. Các đặc trưng liên tục thông qua các hàm bình phương gắn với nửa nhóm phân số

Với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa toán tử $\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} : \mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$ bởi:

$$\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} f = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha/2)} \int_0^\infty t^{-\alpha/2} (t\mathbb{L})^m e^{-t\mathbb{L}} f \frac{dt}{t}$$

với mọi $m \in \mathbb{N}, m > \frac{\alpha}{2}$.

Theo kết quả trong (Bui, 2020), $\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} : \mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$ được định nghĩa tốt. Do đó, ta có thể định nghĩa toán tử $\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} : \mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty} \rightarrow \mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty}$ bằng cách đặt $\left\langle \mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} f, g \right\rangle = \left\langle f, \mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} g \right\rangle$ với $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{L},\infty}$ và $g \in \mathcal{S}_{\mathbb{L},\infty}$.

Tiếp theo, ta mô tả các không gian mới này thông qua các hàm bình phương gắn với nửa nhóm phân số.

Định lý 3.4. Cho ψ là một phân hoạch đơn vị và $\alpha > 0$. Với $p \in K_\sigma, 1 \leq q \leq \infty, p \leq r \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ và $m > s/\alpha$, ta có

$$\|f\|_{BM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} \sim \left[\int_0^\infty \left(t^{-\frac{s}{\alpha}} \left\| \left(t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}} \right)^m e^{-t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}}} f \right\|_{M_p^r} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}. \quad (7)$$

Chứng minh. Trước hết, ta khẳng định rằng

$$\left\| \left[\int_0^\infty \left(t^{-\frac{s}{\alpha}} \left| (t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}})^m e^{-t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}}} f \right| \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \right\|_{M_p^r} \lesssim \|f\|_{FM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (8)$$

Thật vậy, cho ψ là một phân hoạch đơn vị. Cố định $t > 0$ và $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $t \in [2^{-k\alpha}, 2^{-(k+1)\alpha})$. Đặt $\Psi(t\lambda) = (t\lambda^\alpha)^m e^{-t\lambda^\alpha}$. Theo kết quả trong (Bui, 2020, p. 29), ta có

$$\left[\int_0^\infty \left(t^{-\frac{s}{\alpha}} \left| (t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}})^m e^{-t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}}} f \right| \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \lesssim \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[T_{2^{-j\alpha}, N} (2^{j\alpha} |\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f|) \right]^q \right\}^{1/q}.$$

Lấy chuẩn M_p^r hai vế và áp dụng (6) ta có (8). Do đó, ta còn cần chứng minh

$$\|f\|_{FM_{p,q,r}^{s,\mathbb{L}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left[\int_0^\infty \left(t^{-\frac{s}{\alpha}} \left| (t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}})^m e^{-t\mathbb{L}^{\frac{\alpha}{2}}} f \right| \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \right\|_{M_p^r}. \quad (9)$$

Để làm điều này, từ (Bui, 2020, Mệnh đề 3.11), ta có

$$f = c \int_0^\infty \Psi(t\sqrt{\mathbb{L}}) \psi(t\sqrt{\mathbb{L}}) f \frac{dt}{t} \text{ trong } \mathcal{S}'_{\mathbb{L}, \infty}.$$

Suy ra rằng, với mọi $j \in \mathbb{Z}$, ta có $\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f = c \int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \psi_j(\sqrt{\mathbb{L}}) \Psi(t\sqrt{\mathbb{L}}) \psi(t\sqrt{\mathbb{L}}) f \frac{dt}{t}$.

Áp dụng Bổ đề 2.5 và bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned} |\psi_j(\sqrt{\mathbb{L}})f(x)| &\lesssim \int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \int_{\mathbb{R}^n} T_{2^{-j}, N}(x, y) |\Psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f(y)| dy \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} T_{2^{-j}, N}(x, y) \left[\int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \|\Psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f(y)\|^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} dy \\ &\lesssim T_{2^{-j}, N} \left[\int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} \|\Psi(t\sqrt{\mathbb{L}})f(y)\|^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Dựa vào (6), ta suy ra (9). Điều này hoàn tất chứng minh. ■

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã xây dựng và nghiên cứu các không gian Besov Morrey liên kết với toán tử Schrödinger $\mathbb{L} = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}$ trên $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, với hàm thế bình phương nghịch đảo. Việc nghiên cứu được thực hiện trong bối cảnh nhân nhiệt của $\mathbb{L}$ không nhất thiết thỏa mãn các đánh giá Gaussian chuẩn, đặc biệt trong trường hợp $a < 0$. Để khắc phục khó khăn này, chúng tôi sử dụng các đánh giá nhân, không gian phân phối liên kết với $\mathbb{L}$ và một số bất đẳng thức trên không gian Morrey.

Trên cơ sở đó, chúng tôi đã định nghĩa các không gian Besov Morrey liên kết với $\mathbb{L}$ và chứng minh rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào việc lựa chọn phân hoạch đơn vị.

Đồng thời, chúng tôi thiết lập các đặc trưng chuẩn tương đương thông qua các hàm bình phương theo phương thẳng đứng và thông qua các hàm bình phương sinh bởi các nửa nhóm phân thứ của $\mathbb{L}$. Các kết quả này cho thấy lý thuyết Besov gắn với toán tử Schrödinger có hàm thế bình phương nghịch đảo có thể được mở rộng một cách tự nhiên sang khung Morrey, qua đó kết hợp được cả thông tin về tính trơn và tính chất địa phương của hàm.

Các kết quả thu được tạo cơ sở cho việc tiếp tục nghiên cứu các không gian hàm kiểu Triebel–Lizorkin–Morrey gắn với $\mathbb{L}$, cũng như các ứng dụng của những không gian này đối với các phương trình elliptic, parabolic và các phương trình tiến hóa liên quan đến toán tử Schrödinger.

- ❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.
- ❖ **Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi ngân sách khoa học và công nghệ của Bộ giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2026-SPS-02, Tên đề tài: Sự tồn tại và tính chính quy nghiệm của một số lớp phương trình elliptic và parabolic..

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Bui, H. Q., Duong, X. T., & Yan, L. X. (2012). Calderón reproducing formulas and new Besov spaces associated with operators. *Advances in Mathematics*, 229(4), 2449–2502. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.01.005>
- Bui, T. A. (2020). Besov and Triebel–Lizorkin spaces for Schrödinger operators with inverse-square potentials and applications. *Journal of Differential Equations*, 269(1), 641–688. doi:10.1016/j.jde.2019.12.016
- Bui, T. A., D’Ancona, P., Duong, X. T., Li, J., & Ly, F. K. (2017). Weighted estimates for powers and smoothing estimates of Schrödinger operators with inverse square potentials. *Journal of Differential Equations*, 262(3), 2771–2807. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.11.008>
- Dao, N. A., Trong, N. N., & Truong, L. X. (2018). Besov–Morrey spaces associated to Hermite operators and applications to fractional Hermite equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018(187), 1–14.
- Ifronika, Idris, M., Masta, A. A., & Gunawan, H. (2018). Generalized Hölder’s inequality in Morrey spaces. *Matematički Vesnik*, 70(4), 326–337.
- Iwabuchi, T. (2018). The semigroup generated by the Dirichlet Laplacian of fractional order. *Analysis & PDE*, 11(3), 683–703. <https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.683>
- Kerkyacharian, G., & Petrushev, P. (2015). Heat kernel based decomposition of spaces of distributions in the framework of Dirichlet spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(1), 121–189. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06126-7>
- Kerkyacharian, G., Petrushev, P., Picard, D., & Xu, Y. (2009). Decomposition of Triebel–Lizorkin and Besov spaces in the context of Laguerre expansions. *Journal of Functional Analysis*, 256(4), 1137–1188. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.09.015>
- Kozono, H., & Yamazaki, M. (1994). Semilinear heat equations and the Navier–Stokes equation with distributions in the new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, 19(5–6), 959–1014. <https://doi.org/10.1080/03605309408821042>
- Le, T. H., Pham, T. H. N., & Nguyen, B. D. (2022). Besov–Morrey spaces associated with non-negative self-adjoint operators. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 19(8), 1362–1370. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3512\(2022\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3512(2022))

- Liskevich, V., & Sobol, Z. (2003). Estimates of integral kernels for semigroups associated with second order elliptic operators with singular coefficients. *Potential Analysis*, 18(4), 359–390. <https://doi.org/10.1023/A:1021877025938>
- Mazzucato, A. L. (2003a). Besov-Morrey spaces: Function space theory and applications to nonlinear PDE. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(4), 1297–1364. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03182-1>
- Mazzucato, A. L. (2003b). Decomposition of Besov-Morrey spaces. In Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis (Contemp. Math., Vol. 320, pp. 279–294). Amer. Math. Soc., Providence, RI. <https://doi.org/10.1090/conm/320/05613>
- Milman, P. D., & Semenov, Y. A. (2004). Global heat kernel bounds via desingularizing weights. *Journal of Functional Analysis*, 212(2), 373–398. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2003.12.008>
- Morrey, C. B. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1), 126–166. <https://doi.org/10.2307/1989904>
- Nguyen, N. N. T., Le, X. T., Tran, T. D., & Vo, H. N. (2020). Triebel–Lizorkin–Morrey spaces associated to Hermite operators. *Revista Matemática Complutense*, 33, 527–555. <https://doi.org/10.1007/s13163-019-00314-1>
- Tran, T. D., Nguyen, N. T., & Nguyen, H. T. (2021). Triebel-Lizorkin-Morrey spaces associated with nonnegative self-adjoint operator. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 18(12), 2111–2123. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.18.12.3300\(2021\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.18.12.3300(2021))

BESOV–MORREY SPACES ASSOCIATED WITH SCHRÖDINGER OPERATORS WITH INVERSE-SQUARE POTENTIALS

Tran Hoang Vu, Nguyen Phuc Nguyen, Vo Hoang Nhat, Huynh Tran Minh Thuan*

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Vo Hoang Nhat – Email: vohoangnhat.140903@gmail.com*

Received: September 13, 2025; Revised: August 12, 2026; Accepted: August 21, 2026

ABSTRACT

Let $\mathbb{L} = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}$ be a Schrödinger operator on $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, with an inverse-square potential.

Owing to the singular nature of the potential, especially when $a < 0$, the heat kernel associated with $\mathbb{L}$ does not satisfy the standard Gaussian bounds commonly used in the theory of operator-associated function spaces. The aim of this paper is to develop a theory of homogeneous Besov Morrey spaces associated with $\mathbb{L}$. Our approach relies on sharp heat kernel estimates, spectral functional calculus, a distribution space adapted to $\mathbb{L}$ and some inequalities on Morrey spaces. Based on these tools, we introduce Besov Morrey spaces associated with $\mathbb{L}$ and prove that their definition is independent of the choice of resolution of the identity. Our main results establish equivalent norm characterizations in terms of vertical square functions and square functions generated by fractional semigroups associated with $\mathbb{L}$. These results extend the existing theory of Besov spaces associated with Schrödinger operators with inverse-square potentials to the Morrey setting, thereby providing a framework that captures both smoothness and local behavior of functions.

Keywords: Besov spaces; inverse-square potential; Morrey spaces