

Bài báo nghiên cứu

SỰ BÙNG NỔ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SÓNG NHÓT ĐÀN HỒI
NGẪU NHIÊN VỚI DỮ LIỆU DẠNG LOGARITHM PHI TUYẾNNguyễn Thanh Long^{1,2}, Nguyễn Xuân Việt Trung^{1,2,3*}¹Trường Đại học FPT, Việt Nam²FPT PolySchool Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam³Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*Tác giả liên hệ: Nguyễn Xuân Việt Trung – Email: trungnxv@fe.edu.vn

Ngày nhận bài: 08-4-2026; Ngày nhận bài sửa: 21-4-2026; Ngày duyệt đăng: 24-6-2026

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu tính chất định tính của nghiệm, đặc biệt là hiện tượng bùng nổ nghiệm trong thời gian hữu hạn đối với một lớp phương trình sóng nhót đàn hồi ngẫu nhiên trên miền bị chặn. Mô hình khảo sát có tính phức tạp cao, với sự xuất hiện đồng thời của số hạng nhót đàn hồi, số hạng dạng Kirchhoff và nguồn logarithm phi tuyến — một sự kết hợp mới nhằm mô phỏng các hiện tượng vật lý trong môi trường chịu nhiễu ngẫu nhiên và tính phi địa phương. Chúng tôi xây dựng phiên hàm năng lượng phù hợp, áp dụng công thức Itô để thiết lập các bổ đề kỹ thuật và các hệ thức vi phân quan trọng. Bằng phương pháp năng lượng kết hợp các bất đẳng thức hỗ trợ và phép nhúng Sobolev, chúng tôi đánh giá được sự tăng trưởng của phiên hàm năng lượng, từ đó chứng minh sự bùng nổ của nghiệm. Kết quả chính thiết lập các điều kiện đủ trên dữ liệu ban đầu và các tham số của hệ thống để đảm bảo nghiệm bùng nổ trong thời gian hữu hạn, mở rộng các kết quả đã công bố về phương trình sóng ngẫu nhiên và cung cấp khung lý thuyết cho việc phân tích các mô hình tương tự trong tương lai.

Từ khóa: phương trình đạo hàm riêng; ngẫu nhiên; bùng nổ; số hạng nhót đàn hồi; logarithm phi tuyến; phương trình Kirchhoff

1. Giới thiệu

Trong bài báo này chúng tôi xét phương trình ngẫu nhiên dạng sóng nhót đàn hồi sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \mathcal{N}(u, t)\Delta u + \int_0^t h(t-\Lambda)\Delta u(\Lambda)d\Lambda \\ \quad = |u|^{p-2}u \ln|u|^k + \varepsilon\sigma(x, t)\partial_t W_t(x, t), & (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathcal{D}, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times [0, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó $\mathcal{D}$ là miền bị chặn có biên $\partial\mathcal{D}$ trơn, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$, $k \in [0, \infty)$.

Cite this article as: Nguyen, T. L., & Nguyen, X. V. T. (2026). Blow-up of solutions to a stochastic viscoelastic equation with logarithmic nonlinearity. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 23(7), 1628-1639. [https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.7.5705\(2026\)](https://doi.org/10.54607/hcmue.js.23.7.5705(2026))

$$\mathcal{N}(u, t) = \xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \xi_2 \langle \nabla u(t), \nabla u_t(t) \rangle,$$

trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong không gian $L^2(\mathcal{D})$, ngoài ra các số ξ_j ($j = 0, 1, 2$) là các hằng số dương và cố định. Số mũ p thỏa mãn

$$p \in (2, \infty) \text{ nếu } d = 1, 2 \text{ và } p \in \left(2, \frac{2d}{d-2}\right) \text{ nếu } d \geq 3. \quad (1.2)$$

Giả sử rằng hàm số $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thuộc lớp C^1 , không tăng và thỏa mãn ba điều kiện sau

$$(G1) \quad h(0) \text{ và } \xi_0 - \int_0^\infty h(\Lambda) d\Lambda \text{ là các hằng số thực dương;}$$

$$(G2) \quad \text{Tồn tại hai hằng số không âm } \varsigma_1, \varsigma_2 \text{ thỏa } -\varsigma_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\varsigma_2 h(t), \quad t \geq 0;$$

$$(G3) \quad \int_0^\infty h(\Lambda) d\Lambda < \frac{d-2}{d-1}.$$

Được phát triển từ thập niên 1960, phương trình sóng ngẫu nhiên loại Kirchhoff-nhót đàn hồi là nền tảng quan trọng để mô tả chính xác các đặc tính cơ học vật liệu. Thành phần phi tuyến dạng logarithm trong mô hình này xuất hiện phổ biến trong vũ trụ học (Qu et al., 2014); vật lý hạt nhân (Yan & Yong, 2018), quang học (Enqvist & McDonald, 1998) và địa vật lý (Ioku, 2011). Sự tồn tại toàn cục và các tính chất khác của các lớp phương trình trên đã được khảo sát trong (Choucha et al., 2021; Boulaaras et al., 2019; Barrow & Parsons, 1995; Bartkowski & Gorka, 2008; Chen et al., 2015; Kafini & Messaoudi, 2020). Sự đan xen giữa tính ngẫu nhiên, cấu trúc phi địa phương loại Kirchhoff và thành phần phi tuyến logarithm tạo nên một khung lý thuyết quan trọng để giải quyết các bài toán biên hiện đại trong khoa học và kỹ thuật. Tiếp nối những công trình trên, bài báo này tập trung nghiên cứu tính chất nghiệm của phương trình sóng ngẫu nhiên loại Kirchhoff, nhót đàn hồi và nguồn dạng logarithm.

1.2. Một số kí hiệu và định nghĩa

Chúng tôi kí hiệu $H = L^2(\mathcal{D})$ và $V = H_0^1(\mathcal{D})$ và $\|\cdot\|_p$ là chuẩn trên không gian $L^p(\mathcal{D})$.

Xét không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathbb{P}, \mathfrak{F})$ với $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ là σ -đại số con của $\mathfrak{F}$ và $\mathbb{E}(\cdot)$ là kì vọng liên quan đến độ đo xác suất $\mathbb{P}$. Giả sử $\{W(x, t)\}_{t \geq 0}$ là quá trình Wiener liên tục giá trị V với toán tử phương sai R thỏa mãn $\text{Tr}(R) < \infty$. Ngoài ra $R(e_k) = \lambda_k e_k$ ($k \geq 1$), trong đó e_k là vectơ riêng với $C_0 = \sup_{k \geq 1} \|e_k\|_\infty < \infty$ và λ_k là giá trị riêng của R thỏa mãn $\text{Tr}(R) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k < \infty$. Kí hiệu $W(x, t) = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k} B_k(t) e_k(x)$, với $\{B_k(t)\}_{t \geq 0}$ là dãy các chuyển động Brownian tiêu chuẩn giá trị thực và độc lập trên không gian xác suất trên. Với mỗi quá trình $\phi(s) \in L_2^0(V) = L^2(R^{1/2}V, V)$, tích phân ngẫu nhiên liên quan đến quá trình R -

Wiener là $\int_0^t \phi(s) dW(s)$ cũng là một quá trình martingale. Hằng số $\varepsilon > 0$ trong phương trình (1.1) để đo cường độ nhiễu, $\sigma(x, t)$ nhận giá trị $L^2(\mathcal{D})$ thỏa mãn

$$\mathbb{E} \int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} \sigma^2(x, t) dx dt < \infty. \quad (1.3)$$

Định nghĩa 1.1. (Nghiệm yếu) Một hàm u được gọi là nghiệm của (1.1) nếu u thỏa (1.1), $u \in L^2(\Omega; L^\infty([0, T]; H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0, T]; H_0^1(\mathcal{D})))$

và

$$u_t \in L^2(\Omega; L^\infty([0, T]; H_0^1(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0, T]; L^2(\mathcal{D}))).$$

Định nghĩa 1.2. (Phiếm hàm năng lượng) Phiếm hàm năng lượng cho nghiệm của (1.1) là

$$\begin{aligned} F(t) = & \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(\xi_0 - \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{4} \|\nabla u\|_2^4 + \frac{1}{2} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds \\ & + \frac{k}{p^2} \|u\|_p^p - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó $(h \circ \psi)(\Lambda) = \int_0^\Lambda h(\Lambda - s) \|\psi(\cdot, \Lambda) - \psi(\cdot, s)\|_2^2 ds$.

Ta viết lại phương trình (1.1) dưới dạng hệ phương trình Itô một cách tương đương

$$\begin{cases} du = v dt \\ dv = \left[\mathcal{N}(u, t) \Delta u - \int_0^t h(t - \Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda + |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right] dt + \varepsilon \sigma(x, t) dW_t, \end{cases} \quad (1.5)$$

hoặc dưới dạng tích phân

$$\begin{cases} u(t) = u(0) + \int_0^t v(t) dt \\ v(t) = v(0) + \int_0^t \left[\mathcal{N}(u, s) \Delta u - \int_0^s h(s - \Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda + |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right] ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(x, s) dW_s, \end{cases} \quad (1.6)$$

Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả chính và chứng minh ở dưới, chúng tôi viết

$$G(t) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x) \sigma^2(x, s) dx ds \text{ và } \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \text{Tr}(R) C_0^2 \mathbb{E} \int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} \sigma^2(x, s) dx ds =: E_1 < \infty$$

Vì $G'(t) \geq 0$ ($t \geq 0$) nên

$$0 \leq G(t) \leq E_1, \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

1.3. Kết quả chính

Định lý 1.3. Giả sử rằng các điều kiện (G1), (G2) và (G3) thỏa mãn. Giả sử (u, v) là nghiệm của hệ phương trình (1.6) với dữ liệu $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ thỏa mãn

$$\mathbb{E}(F(0)) \leq -(1+\beta)E_1 \leq -1, \quad (1.8)$$

trong đó β là hằng số không âm và E_1 được cho ở trên. Khi đó nghiệm u của (1.1) bùng nổ tại thời điểm hữu hạn.

2. Sự bùng nổ của nghiệm phương trình ngẫu nhiên

2.1. Một số bổ đề cần thiết

Bổ đề 2.1. Nếu (u, v) là nghiệm của (1.6) với giả thiết $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$. Khi đó phiếm hàm năng lượng (1.4) thỏa mãn

$$\begin{aligned} F(t) = F(0) - \frac{\xi_2}{4} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t (h' \circ \nabla u)(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t h(s) \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \\ + \int_0^t \langle v(s), \varepsilon \sigma(s) dW_s \rangle ds + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x) \sigma^2(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Chứng minh. Áp dụng công thức Itô cho (1.6), ta được

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 = \|v(0)\|_2^2 + \int_0^t \|\varepsilon \sigma(s)\|_{L_2^0}^2 ds + 2 \int_0^t \langle v(s), \varepsilon \sigma(s) dW_s \rangle \\ + 2 \int_0^t \left\langle v(s), \mathcal{N}(u, s) \Delta u(s) - \int_0^s h(s - \Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda + |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ta xử lý từng số hạng có trong (2.2). Đầu tiên, ta xử lý số hạng

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\varepsilon \sigma(s)\|_{L_2^0}^2 ds &= \varepsilon^2 \int_0^t \|\sigma(s) Q^{1/2}\|_{L_2}^2 ds = \varepsilon^2 \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \|\sigma(s) Q^{1/2}(e_j)\|_{L^2}^2 ds \\ &= \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \|\sigma(\cdot, s) \sqrt{\lambda_j} e_j(\cdot)\|_{L^2}^2 ds = \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x) \sigma^2(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tiếp theo, ta xử lý số hạng cuối cùng của (2.2) bằng cách xem xét ba biến đổi. Biến đổi 1:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \langle v(s), \mathcal{N}(u, s) \Delta u(s) \rangle ds &= -2 \int_0^t \mathcal{N}(u, s) \langle \nabla v(s), \nabla u(s) \rangle ds \\ &= -2 \int_0^t \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(s)\|_2^2 + \frac{\xi_2}{2} \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right) \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \\ &= - \int_0^t \frac{d}{ds} \left[\left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right) \|\nabla u(s)\|_2^2 \right] ds - \frac{\xi_2}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right)^2 ds \\ &= - \left[\left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \right) \|\nabla u\|_2^2 - \left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 \right) \|\nabla u_0\|_2^2 \right] - \frac{\xi_2}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right)^2 ds \\ &= -\xi_0 \left(\|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 \right) - \frac{\xi_1}{2} \left(\|\nabla u\|_2^4 - \|\nabla u_0\|_2^4 \right) - \frac{\xi_2}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 \right)^2 ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Biến đổi 2:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^t \left\langle v(s), \int_0^s h(s-\Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda \right\rangle ds &= -2 \int_0^t \int_0^s h(s-\Lambda) \langle \Delta u(\Lambda), v(s) \rangle d\Lambda ds \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s h(s-\Lambda) \langle \nabla u(\Lambda), \nabla u_s(s) \rangle d\Lambda ds. \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy được

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla u(\Lambda), \nabla u_s(s) \rangle &= -2 \langle \nabla u(s) - \nabla u(\Lambda), \nabla u_s(s) \rangle + 2 \langle \nabla u(s), \nabla u_s(s) \rangle \\ &= -\frac{d}{ds} \|\nabla u(s) - \nabla u(\Lambda)\|_2^2 + \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2, \end{aligned}$$

kéo theo

$$\begin{aligned} &-2 \int_0^t \left\langle v(s), \int_0^s h(s-\Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda \right\rangle ds \\ &= -\int_0^t \int_0^s h(s-\Lambda) \frac{d}{ds} \|\nabla u(s) - \nabla u(\Lambda)\|_2^2 d\Lambda ds + \int_0^t \int_0^s h(s-\Lambda) \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 d\Lambda ds \\ &= -\int_0^t \int_0^s \frac{d}{ds} \left(h(s-\Lambda) \|\nabla u(s) - \nabla u(\Lambda)\|_2^2 \right) d\Lambda ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s h'(s-\Lambda) \|\nabla u(s) - \nabla u(\Lambda)\|_2^2 d\Lambda ds + \int_0^t \int_0^s h(\Lambda) d\Lambda \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\int_0^s h(\Lambda) d\Lambda \|\nabla u(s)\|_2^2 \right) ds - \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (h' \circ \nabla u)(s) ds - \int_0^t h(s) \|\nabla u(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Biến đổi 3:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \left\langle v(s), |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds &= 2 \int_0^t \int_{\mathcal{D}} |u(s)|^{p-2} u(s) \ln |u(s)|^k u_t(s) dx ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{p} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx \right) ds - \frac{2k}{p^2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u(s)\|_p^p ds. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Thay các biến đổi (2.3)-(2.6) vào (2.2), sau đó nhân hai vế cho $1/2$, cùng với định nghĩa của F ở (1.4), ta thu được (2.1). Chứng minh bổ đề hoàn tất. $\square$

Bổ đề 2.2. Nếu (u, v) là nghiệm của (1.6) với giả thiết $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$. Khi đó

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(F(t)) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(h' \circ \nabla u)(t) - \frac{\xi_2}{4} \mathbb{E} \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(t)\|_2^2 \right)^2 - \frac{1}{2} h(t) \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} G'(t), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \langle u, v \rangle(t) &= \mathbb{E} \|v(t)\|_2^2 - \mathbb{E} \left(\mathcal{N}(u, t) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(\Lambda) \rangle d\Lambda + \mathbb{E} \left\langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Chứng minh. Đạo hàm hai vế (2.1) trong Bổ đề 2.1 và lấy kì vọng ta được (2.7). Ngoài ra

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle u, v \rangle(t) - \mathbb{E} \langle u, v \rangle(0) &= \mathbb{E} \int_0^t \frac{d}{ds} \langle u, v \rangle(s) ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} u, v \right\rangle(s) ds + \mathbb{E} \int_0^t \left\langle u, \frac{d}{ds} v \right\rangle(s) ds =: J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

và biến đổi từng số hạng J_1 và J_2 . Đối với số hạng J_1 , đơn giản ta có được

$$J_1 = \mathbb{E} \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} u, v \right\rangle(s) ds = \mathbb{E} \int_0^t \langle v, v \rangle(s) ds = \mathbb{E} \int_0^t \|v(s)\|_2^2 ds. \quad (2.10)$$

Với số hạng J_2 , nhân hai vế (1.6) cho u và lấy tích phân trên $\mathcal{D}$ và kì vọng, ta thu được

$$\begin{aligned} J_2 &= \mathbb{E} \int_0^t \left\langle u, \mathcal{N}(u, s) \Delta u - \int_0^s h(s - \Lambda) \Delta u(\Lambda) d\Lambda + |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \langle u, \mathcal{N}(u, s) \Delta u \rangle ds - \mathbb{E} \int_0^t \int_0^s \langle u, h(s - \Lambda) \Delta u(\Lambda) \rangle d\Lambda ds + \mathbb{E} \int_0^t \left\langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds \\ &= -\mathbb{E} \int_0^t \mathcal{N}(u, s) \|\nabla u(s)\|_2^2 ds + \mathbb{E} \int_0^t \int_0^s h(s - \Lambda) \langle \nabla u(s), \nabla u(\Lambda) \rangle d\Lambda ds \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t \left\langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Thay (2.10) và (2.11) vào (2.9) ta thu được kết quả

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle u, v \rangle(t) &= \mathbb{E} \langle u, v \rangle(0) + \mathbb{E} \int_0^t \|v(s)\|_2^2 ds + \mathbb{E} \int_0^t \left\langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \right\rangle ds \\ &- \mathbb{E} \int_0^t \mathcal{N}(u, s) \|\nabla u(s)\|_2^2 ds + \mathbb{E} \int_0^t \int_0^s h(s - \Lambda) \langle \nabla u(s), \nabla u(\Lambda) \rangle d\Lambda ds. \end{aligned}$$

Đạo hàm hai vế, ta thu được (2.8). Kết thúc chứng minh bổ đề. $\square$

Tiếp theo, ta xét phiếm hàm thực $H(t) = G(t) - \mathbb{E}(F(t))$, theo điều kiện **(G2)**, ta có

$$H'(t) = \frac{\xi_2}{4} \mathbb{E} \left(\frac{d}{ds} \|\nabla u(t)\|_2^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \mathbb{E}(h' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} h(t) \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 \geq 0. \quad (2.12)$$

2.2. Sự bùng nổ của nghiệm

Giả sử các điều kiện (G1), (G2), (G3) thỏa, với $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ và (u, v) là nghiệm của hệ phương trình (1.6) thỏa (1.8). Chúng tôi định nghĩa phiếm hàm

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \delta \mathbb{E} \langle u, v \rangle(t) + \delta \frac{\xi_2}{4} \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^4,$$

trong đó $0 < \alpha < (p-2)/(2p)$ và δ là hằng số dương sẽ chọn sau.

Bước 1. Chứng minh tồn tại hằng số dương γ sao cho

$$\begin{aligned} L'(t) \geq \gamma \left[H(t) + \mathbb{E} \|v\|_2^2 + \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E} \|u\|_p^p \right. \\ \left. + \mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds + \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx + \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Từ định nghĩa phiếm hàm F , giả thiết (2.13) và các đánh giá (2.12), (1.7), ta có được

$$0 < (1 + \beta)G(t) \leq (1 + \beta)E_1 = H(0) \leq H(t) \leq G(t) + \frac{1}{p} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx. \quad (2.14)$$

Do đó

$$H(t) - G(t) \geq \frac{\beta}{\beta + 1} H(t) \geq 0. \quad (2.15)$$

Đạo hàm L , cùng với (2.8) trong Bổ đề 2.2, ta có

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \delta \frac{d}{dt} \mathbb{E} \langle u, v \rangle(t) + \delta \frac{\xi_2}{4} \frac{d}{dt} \left(\mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^4 \right) \\ &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \delta \left[-\mathbb{E} \left(\mathcal{N}(u, t) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) + \mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(\Lambda) \rangle d\Lambda \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \|v(t)\|_2^2 + \mathbb{E} \langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \rangle(t) \right] + \delta \frac{\xi_2}{2} \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 \frac{d}{dt} \left(\mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(\Lambda) - \nabla u(t) \rangle d\Lambda \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \|\nabla u(t) - \nabla u(\Lambda)\|_2^2 d\Lambda + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \|\nabla u(t)\|_2^2 d\Lambda \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} (h \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

kéo theo

$$\mathbb{E} \int_0^t h(t - \Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(\Lambda) \rangle d\Lambda$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \int_0^t h(t-\Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(\Lambda) - \nabla u(t) \rangle d\Lambda + \mathbb{E} \int_0^t h(t-\Lambda) \langle \nabla u(t), \nabla u(t) \rangle d\Lambda \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \mathbb{E} (h \circ \nabla u)(t).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Lấy tùy ý $a \in (0, (p-4)/p)$, khi đó ta có

$$\mu_1 := \frac{p(1-a)}{4} - 1 > 0. \tag{2.18}$$

Ngoài ra, ta giả thiết thêm

$$\int_0^\infty h(\Lambda) d\Lambda < \xi_0 \frac{\frac{p(1-a)}{2} - 1}{\frac{p(1-a)}{2} - \frac{1}{2}} < \xi_0. \tag{2.19}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &:= \frac{p(1-a)}{2} \left(\xi_0 - \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) - \left(\xi_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) \\
 &\geq \left[\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right] \xi_0 - \xi_0 \left[\frac{p(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right] \left[\frac{p(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right]^{-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Từ định nghĩa hàm $H(t)$ và (1.4), ta nhận xét rằng

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \rangle &= a \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx + (1-a) \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx \\
 &= a \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx + p(1-a) [H(t) - G(t)] + \frac{p}{2} (1-a) \mathbb{E} \|v\|_2^2 \\
 &\quad + \frac{p}{2} (1-a) \left(\xi_0 - \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{4} p(1-a) \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^4 \\
 &\quad + \frac{p}{2} (1-a) \mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds + \frac{k}{p} (1-a) \mathbb{E} \|u\|_p^p.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Thay (2.15), (2.17), (2.21) vào (2.16), cùng với các hệ số dương có trong (2.18), (2.20) và đánh giá (2.15), (2.16), ta thu được

$$\begin{aligned}
 L'(t) &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \delta \mathbb{E} \|v(t)\|_2^2 + \delta \mathbb{E} \langle u, |u|^{p-2} u \ln |u|^k \rangle(t) \\
 &\quad - \delta \left(\xi_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \delta \xi_1 \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^4 - \frac{\delta}{2} \mathbb{E} (h \circ \nabla u)(t) \\
 &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \delta p(1-a) [H(t) - G(t)] + \delta \left[\frac{p(1-a)}{2} + 1 \right] \mathbb{E} \|v(t)\|_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta \left[\frac{p(1-a)}{2} \left(\xi_0 - \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) - \left(\xi_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\Lambda) d\Lambda \right) \right] \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
 & +\delta \left[\frac{p(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right] \mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds + \delta a \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx \\
 & +\delta \xi_1 \left[\frac{p(1-a)}{4} - 1 \right] \mathbb{E} \|\nabla u(t)\|_2^4 + \delta \frac{k(1-a)}{p} \mathbb{E} \|u\|_p^p \\
 & \geq \delta p(1-a) \frac{\beta}{\beta+1} H(t) + \delta (2\mu_1 + 3) \mathbb{E} \|v\|_2^2 + \delta \mu_2 \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2 + \delta a \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx \\
 & +\delta \left(2\mu_1 + \frac{3}{2} \right) \mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds + \delta \xi_1 \mu_1 \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^4 + \delta \frac{k(1-a)}{p} \mathbb{E} \|u\|_p^p. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Đầu tiên, ta chọn $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$L(0) > 0, \tag{2.23}$$

sau đó ta gọi $\gamma > 0$ là hệ số nhỏ nhất trong các hệ số của $H(t)$, $\mathbb{E} \|v\|_2^2$, $\mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2$, $\mathbb{E} \|u\|_p^p$,

$\mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds$, $\mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx$, $\mathbb{E} \|\nabla u\|_2^4$ có trong (2.22), thu được đánh giá (2.13).

Từ (2.13) ta có $L'(t) > 0$, kết hợp (2.23) dẫn đến

$$L(t) \geq L(0) > 0, \quad t \geq 0. \tag{2.24}$$

Bước 2. Chứng minh tồn tại hằng số dương K sao cho

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq K^{-1} L'(t), \quad t \geq 0. \tag{2.25}$$

Các bất đẳng thức Holder, Young và phép nhúng trong không gian Lebesgue chỉ ra rằng

$$\left(\mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} uv dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left(\mathbb{E} \|u\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\mathbb{E} \|v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq c \left[\eta'^{-1} \left(\mathbb{E} \|u\|_p^2 \right)^{\frac{\eta'}{2(1-\alpha)}} + \eta^{-1} \left(\mathbb{E} \|v\|_2^2 \right)^{\frac{\eta}{2(1-\alpha)}} \right],$$

với $(1/\eta) + (1/\eta') = 1$. Chọn $\eta = 2(1-\alpha) > 1$ thì $\eta' = \frac{\eta}{\eta-1} = \frac{2(1-\alpha)}{2(1-\alpha)-1} = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$, khi đó

$$\left(\mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} uv dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\left(\mathbb{E} \|u\|_p^2 \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}} + \mathbb{E} \|v\|_2^2 \right] \leq c \left[\mathbb{E} \|u\|_p^{2/(1-2\alpha)} + \mathbb{E} \|v\|_2^2 \right]. \tag{2.26}$$

Đặt $s = 2/(1-2\alpha)$ thì từ giả thiết $0 < \alpha < (p-2)/(2p)$, ta có $2 < s < p$. Hơn nữa

$$\mathbb{E} \|u\|_p^s \leq c \left(\mathbb{E} \|u\|_p^p + \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2 \right). \tag{2.27}$$

trong đó hằng số $c > 0$. Thật vậy, ta chứng minh (2.27) chia thành hai trường hợp sau.

Nếu $\|u\|_p \geq 1$ hầu chắc chắn trên Ω thì $\mathbb{E} \|u\|_p^s \leq \mathbb{E} \|u\|_p^p \leq c \left(\mathbb{E} \|u\|_p^p + \mathbb{E} \|\nabla u\|_2^2 \right)$.

Nếu $\|u\|_p \leq 1$ hầu chắc chắn trên Ω thì $\mathbb{E}\|u\|_p^s \leq \mathbb{E}\|u\|_p^2$. Bằng cách áp dụng định lý phép nhúng Sobolev, theo giả thiết (1.2) thì $H_0^1(\mathcal{D})$ nhúng liên tục vào $L^p(\mathcal{D})$, do đó

$$\mathbb{E}\|u\|_p^s \leq \mathbb{E}\|u\|_p^2 \leq c\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 \leq c\left(\mathbb{E}\|u\|_p^p + \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2\right).$$

Kết hợp (2.26) và (2.27) ta thu được đánh giá

$$\left(\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} uv dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c\left(\mathbb{E}\|u\|_p^p + \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E}\|v\|_2^2\right). \quad (2.28)$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c\left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4 + \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2\right). \quad (2.28)$$

Nếu $\|\nabla u\|_p \leq 1$ hầu chắc chắn trên Ω thì với $\frac{4}{1-\alpha} > 4$ và bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \leq \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4.$$

Nếu $\|\nabla u\|_p \geq 1$ hầu chắc chắn trên Ω thì $0 < \alpha < (p-2)/(2p) < 1/2$ kéo theo $8(1-\alpha) > 4$, dẫn đến $\|\nabla u\|_2^4 \leq \|\nabla u\|_2^{8(1-\alpha)}$ hầu chắc chắn trên Ω , từ đây thu được

$$\left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^{8(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \leq \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4.$$

Từ định nghĩa hàm L , đánh giá (2.28), bất đẳng thức Holder và (2.14) ta có

$$\begin{aligned} [L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \left[H^{1-\alpha}(t) + \delta \mathbb{E}\langle u, v \rangle + \delta \frac{\xi_2}{4} \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4 \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c \left[H(t) + \left| \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} uv dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^4 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \\ &\leq c \left[H(t) + \mathbb{E} \int_{\mathcal{D}} |u|^p \ln |u|^k dx + \mathbb{E}\|u\|_p^p + \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}\|v\|_2^2 + \mathbb{E} \int_0^t (h \circ \nabla u)(s) ds + \mathbb{E}\|\nabla u\|_2^{4/(1-\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Từ (2.13) và (2.29) thì tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho với $t \geq 0$ thì

$$L'(t) \geq K [L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.30)$$

Chia hai vế (2.30) cho $[L(t)]^{1/(1-\alpha)} > 0$, sau đó lấy tích phân hai trên $(0, t)$ ta được

$$\int_0^t \frac{L'(s)}{[L(s)]^{\frac{1}{1-\alpha}}} ds \geq \int_0^t K ds = Kt. \quad (2.31)$$

Bằng phép tính tích phân cơ bản, ta biến đổi vế trái (2.31) như sau

$$\int_0^t \frac{L'(s)}{[L(s)]^{\frac{1}{1-\alpha}}} ds = \int_0^t [L(s)]^{-\frac{1}{1-\alpha}} dL(s) = \frac{1-\alpha}{-\alpha} \left([L(t)]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - [L(0)]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right).$$

Thay vào (2.31), biến đổi ta thu được

$$[L(t)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \geq \frac{1}{[L(0)]^{-\alpha/(1-\alpha)} - (K\alpha t)/(1-\alpha)}. \quad (2.32)$$

Đặt $T_0 = \frac{1-\alpha}{\alpha K [L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}$. Theo (2.32) thì $L(t)$ bùng nổ tại thời điểm $T^* \leq T_0 < \infty$. $\square$

3. Kết luận và mở rộng

Bài báo đã thiết lập các điều kiện đủ cho hiện tượng bùng nổ nghiệm trong thời gian hữu hạn của lớp phương trình sóng nhớt đàn hồi ngẫu nhiên chứa toán tử Kirchhoff và nguồn phi tuyến logarithm trên miền bị chặn. Thông qua kỹ thuật phiếm hàm năng lượng và phương pháp hàm lõm, chúng tôi đã xác định được các tiêu chuẩn bùng nổ dựa trên dữ liệu ban đầu và tham số hệ thống, góp phần làm rõ hành vi tiệm cận của nghiệm dưới tác động của nhiễu. Trong tương lai, hướng tiếp cận này có thể mở rộng cho các hệ thống có số hạng trễ hoặc các toán tử phi tuyến tổng quát hơn.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

❖ **Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học FPT theo đề tài mã số DHFPT/2025/33.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Barrow, J. D., & Parsons, P. (1995). Inflationary models with logarithmic potentials. *Physical Review D*, 52, 5576–5587. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5576>
- Bartkowski, K., & Gorka, P. (2008). One-dimensional Klein-Gordon equation with logarithmic nonlinearities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41, 355201. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/35/355201>
- Boulaaras, S., Draifia, A., & Zennir, K. (2019). General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and logarithmic nonlinearity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42, 4795–4814. <https://doi.org/10.1002/mma.5693>
- Chen, H., Luo, P., & Liu, G. (2015). Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422, 84–98. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.030>

- Choucha, A., Boulaaras, S., Ouchenane, D., & Beloul, S. (2021). General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping, logarithmic nonlinearity and distributed delay terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1–22. <https://doi.org/10.1002/mma.7121>
- Enqvist, K., & McDonald, J. (1998). Q-balls and baryogenesis in the MSSM. *Physics Letters B*, 425(3-4), 309–321. [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)00271-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00271-8)
- Ioku, N. (2011). The Cauchy problem for heat equations with exponential nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, 251(4-5), 1172–1194. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.02.015>
- Kafini, M., & Messaoudi, S. (2020). Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay. *Applicable Analysis*, 99, 530–547. <https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1504029>
- Qu, C., Bai, X., & Zheng, S. (2014). Blow-up versus extinction in a nonlocal p-Laplace equation with Neumann boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(1), 326–333. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.040>
- Yan, L., & Yong, Z. (2018). Blow-up and non-extinction for a nonlocal parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Boundary Value Problems*, 2018(1). <https://doi.org/10.1186/s13661-018-1042-7>

BLOW-UP OF SOLUTIONS TO A STOCHASTIC VISCOELASTIC EQUATION WITH LOGARITHMIC NONLINEARITY

Nguyen Thanh Long^{1,2}, Nguyen Xuan Viet Trung^{1,2,3*}

¹FPT University, Vietnam

²FPT PolySchool Ho Chi Minh, Vietnam

³Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

*Corresponding author: Nguyen Xuan Viet Trung – Email: trungnxv@fe.edu.vn

Received: April 08, 2026; Revised: April 21, 2026; Accepted: June 24, 2026

ABSTRACT

This paper investigates qualitative properties of solutions, with particular emphasis on finite-time blow-up for a class of stochastic viscoelastic wave equations on a bounded domain. The model includes a viscoelastic term, a Kirchhoff-type term, and a logarithmic source term, thereby providing a framework that integrates nonlocal effects with random environmental noise. We construct an appropriate energy functional and apply Itô's formula to establish key technical lemmas and differential inequalities. Using the energy method together with auxiliary inequalities and Sobolev embedding theorems, we estimate the growth of the energy functional and prove finite-time blow-up. The main result establishes sufficient conditions on the initial data and system parameters guaranteeing finite-time blow-up, extending existing literature on stochastic wave equations and offering a theoretical basis for analyzing similar models in the future.

Keywords: partial differential equations; stochastic; blow-up; viscoelastic term; logarithmic nonlinearity; Kirchhoff equation