TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 15, Số 10 (2018): 130-144
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
EDUCATION SCIENCE
Vol. 15, No. 10 (2018): 130-144

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN KHÁI NIỆM TẬP MỞ, TẬP ĐÓNG TRONG GIẢI TÍCH VÀ TÔPÔ HỌC

Nguyễn Ái Quốc*[*]*, Võ Thị Tú Quỳnh
Trường Đại học Sài Gòn
Ngày nhận bài: 10-4-2018; ngày nhận bài sửa: 22-4-2018; ngày duyệt đăng: 25-10-2018

TÓM TẮT

Tập mở, tập đóng là các khái niệm cơ bản của tôpô học, đặc biệt là trong không gian mêtric. Nhiều khái niệm trong tôpô đại cương cũng như trong không gian mêtric đều được xây dựng dựa trên tập mở, tập đóng. Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận làm rõ quá trình hình thành và phát triển của khái niệm tập mở, tập đóng và xác định các đặc trưng tri thức luận của hai đối tượng này.

Từ khóa: đặc trưng tri thức luận, không gian mêtric, phân tích tri thức luận, tập đóng, tập mở.

ABSTRACT

An epistemological analysis of open sets and closed sets in analysis and topology

Open, closed sets are the basic concepts of Topology, especially in the metric space. Many of the concepts in the topology as well as in the metric space are based on these concepts. This paper presents an epistemological analysis that clairify the emergence and development of concept of open and closed set and determines the epistemological characteristics of theses two knowledge objects.

Keywords: epistemological characteristic, metric space, epistemological analysis, closed set, open set.

1. Đặt vấn đề

1.1. Vai trò công cụ cơ bản của các khái niệm trong Giải tích

Tập mở, tập đóng là hai khái niệm cơ bản và xuất hiện hầu hết trong các lĩnh vực của Giải tích như Tôpô đại cương, Giải tích hàm, Giải tích lồi, Giải tích hàm ứng dụng, Quy hoạch phi tuyến, Giải tích phức, Giải tích thực, vì vậy việc nghiên cứu tri thức luận về hai khái niệm này thực sự cần thiết trong việc dạy học các môn Giải tích ở bậc đại học.

1.2. Tồn tại những quan niệm sai của sinh viên về khái niệm tập mở

Trong hai tháng 9 và 10/2017, một thực nghiệm khảo sát dưới dạng phỏng vấn trực tiếp được tiến hành trên 10 sinh viên năm thứ ba ngành Sư phạm Toán của các Trường Đại học: Sài Gòn, Đồng Nai, Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh và Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh về khái niệm tập mở. Các sinh viên này đã kết thúc các học phần về không gian tôpô và không gian mêtric ở năm thứ hai với thời lượng 60 tiết, diễn ra trong

[*] Email: *nguyenaq2014@gmail.com*

15 tuần. Mục đích của khảo sát là nhằm tìm hiểu quan niệm của sinh viên về tập mở sau khi học xong các học phần trên. Chúng tôi cũng lưu ý rằng có ba cách định nghĩa tập mở trong không gian mêtric được đưa vào ở bốn trường đại học trên là: Định nghĩa theo hình cầu mở, định nghĩa theo phần trong và định nghĩa theo lân cận.

- Định nghĩa tập mở theo hình cầu mở

  "Tập con G của X gọi là tập mở nếu $\forall a \in G$ tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(a,\varepsilon) \subset G$.

  Tập con F của X gọi là tập đóng nếu $X \setminus F$ là tập mở." (Sutherland, 2009, tr. 54)

- Định nghĩa tập mở theo lân cận

  "Một tập hợp con U của □ được gọi là mở nếu với mỗi $x \in U$, tồn tại một số thực dương ε sao cho $O_\varepsilon(x) \subset U$." (Trần Tráng, 2005, tr. 44)

  "Một tập hợp con của □ được gọi là đóng nếu nó là phần bù của một tập hợp con mở trong □." (Trần Tráng, 2005, tr. 48)

- Định nghĩa tập mở theo phần trong:

  " Cho A là một tập con của không gian mêtric X. Ta nói A là tập mở nếu $\overset{0}{A} = A$.

  Hay có thể nói A mở khi và chỉ khi $A \subseteq \overset{0}{A}$.

  Ta nói tập con A là đóng nếu X\A là mở." (Nguyễn Văn Khuê, 2001, tr. 18)

Câu hỏi đặt ra là: "Bạn hãy định nghĩa tập mở trong một không gian mêtric".

Kết quả cho thấy ở sinh viên (SV) khoa toán có ba cách xác định một tập mở trong không gian mêtric: Định nghĩa hình thức, sử dụng khái niệm biên, và tập mở được thể hiện bằng hợp các quả cầu mở. Các quan niệm này ở sinh viên khá chênh lệch so với các định nghĩa chính thức.

Chẳng hạn, sinh viên SV1 cho rằng một tập hợp là mở nếu với bất kì điểm nào trong tập, ta đều có thể vẽ một quả cầu mở xung quanh điểm đó sao cho quả cầu chứa trong tập hợp. Sinh viên này đã không quan tâm đến việc điểm đó là tâm của quả cầu, mặc dù định nghĩa này gần với định nghĩa hình thức của tập mở theo hình cầu mở.

Sinh viên SV2 thì cho rằng tập mở là tập mà ta có thể lấy bất kì quả cầu mở xung quanh bất kì điểm nào chứa hoàn toàn trong tập đó. Định nghĩa này không đúng mặc dù "mạnh" hơn định nghĩa hình thức vì ta không cần mọi quả cầu cho mỗi điểm mà chỉ cần ít nhất một quả cầu cho mỗi điểm.

Trong khi đó, có 6 sinh viên khác thì trả lời rằng tập mở là hợp của các quả cầu mở và hai sinh viên còn lại thì cho rằng tập mở là một khoảng không chứa biên của nó. Các sinh viên này đã sử dụng các tính chất để định nghĩa tập mở và riêng hai sinh viên cuối cùng thì chỉ nói đến khái niệm tập mở trên đường thẳng thực.

Tất cả các sinh viên đều không nói đến các quả cầu là mở trong không gian mêtric (X, d).

1.3. Sự cần thiết của phân tích tri thức luận

Những sai lầm của sinh viên và nguồn gốc của chúng là câu hỏi mà nhà nghiên cứu cần trả lời trước khi tìm cách giúp sinh viên loại bỏ được sai lầm. Theo Brousseau (1983):

> Sai lầm không phải chỉ là hậu quả của sự không biết, không chắc chắn, ngẫu nhiên, như cách nghĩ của những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm và chủ nghĩa hành vi, mà còn có thể là hậu quả của những kiến thức đã có từ trước, đã từng có ích đối với việc học trước kia, nhưng lại là sai, hoặc đơn giản là không còn phù hợp nữa đối với việc lĩnh hội tri thức mới. Những sai lầm thuộc loại này không phải thất thường hay không dự đoán được. Chúng tạo thành chướng ngại. Trong hoạt động của giáo viên cũng như trong hoạt động của học sinh, sai lầm bao giờ cũng góp phần xây dựng nên nghĩa của kiến thức được thu nhận bởi những chủ thể này. (tr. 171)

Một phân tích tri thức luận lịch sử khái niệm tập mở và tập đóng nhằm xác định các đặc trưng và các chướng ngại tri thức luận cho phép giải thích thỏa đáng các sai lầm trên của sinh viên khoa toán theo quan điểm didactic Toán. Đó cũng là mục đích của nghiên cứu trình bày trong bài viết này.

Phân tích tri thức luận lịch sử một tri thức là nghiên cứu quá khứ để khám phá ra quá trình hình thành nên một tri thức, những vấn đề gắn liền với tri thức đó, những trở ngại, những bước nhảy quan niệm cho phép tri thức nảy sinh. (Lê Thị Hoài Châu, 2017)

Phân tích tri thức luận một tri thức nhằm làm rõ:

- Những điều kiện, những trở ngại cho sự nảy sinh tri thức khoa học và sự "tiến triển" của tri thức hay kiến thức. Từ đó, người ta có thể xác định các chướng ngại tri thức luận. Đó là chướng ngại gắn liền với lịch sử phát triển của tri thức mà việc vượt qua nó đóng vai trò quyết định đối với quá trình xây dựng kiến thức của chủ thể. Trong học tập, việc vượt qua những chướng ngại tri thức luận là điều không thể tránh khỏi, bởi đó là yếu tố cấu thành nên kiến thức.
- Nghĩa của tri thức, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết.
- Những quan niệm có thể gắn liền với tri thức.

2. Phân tích tri thức luận của khái niệm tập mở, tập đóng

2.1. Quá trình hình thành và phát triển của khái niệm tập mở, tập đóng trong lịch sử

2.1.1. Quan niệm giải tích của Cantor (QC) về tập đóng

Trong khoảng thời gian từ 1872 đến 1890, các bài toán hội tụ gắn liền với chuỗi lượng giác đã đưa Georg Cantor đến việc nghiên cứu các tính chất của một số tập con vô hạn của đường thẳng thực. Vì lợi ích của các nghiên cứu này, ông đã giới thiệu khái niệm cơ bản về điểm giới hạn của một tập và các ý tưởng về tập đóng, tập dẫn xuất và tập trù mật. (Burton, 2011, tr. 729)

Các nghiên cứu quan trọng nhất của Cantor trong lí thuyết tập hợp trải dài qua một loạt sáu bài báo tựa đề "Uber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten"("Về các tập điểm tuyến tính vô hạn") xuất bản trên tạp chí *Mathematische Annalen* của Đức trong giai đoạn 1879 – 1884. (Burton, 2011, tr. 695)

Năm 1872, Cantor đưa ra cái tên "Grenzpunkt" cho khái niệm điểm giới hạn của một tập trong khi mở rộng định lí của ông về tính duy nhất của sự biểu diễn một hàm số thực bởi các chuỗi lượng giác của nó từ trường hợp hàm số đó liên tục đến trường hợp nó không liên tục tại rải rác một số điểm. Định nghĩa của ông về điểm giới hạn của một tập hợp *P* trên một đường thẳng dựa trên một định nghĩa của "lân cận", mà định nghĩa này lại dựa trên định nghĩa "phần trong" của một khoảng:

> Một điểm giới hạn của một tập điểm *P* được hiểu là một điểm nằm trên đường thẳng theo cách mỗi lân cận của điểm đó chứa nhiều vô số điểm của *P*. Có thể xảy ra rằng điểm giới hạn cũng thuộc *P*. Lân cận của một điểm có nghĩa là bất kì khoảng nào chứa điểm đó nằm trong phần trong của nó. Từ điều này, dễ dàng chứng minh rằng một tập điểm gồm nhiều vô hạn điểm phải có ít nhất một điểm giới hạn. (Cantor, 1872, tr. 98)

Trong bài báo 1872 của ông về chuỗi lượng giác, Cantor đã sử dụng thuật ngữ "điểm giới hạn" mới của ông để định nghĩa "tập dẫn xuất" của tập điểm *P*, tức là tập tất cả các điểm giới hạn của *P*. Sau đó ông lặp lại phép tính của tập dẫn xuất với $P^{(n)}$ không đổi cho tập dẫn xuất thứ *n* của *P*. Giống như Weierstrass, Cantor chỉ xem định lí Bolzano-Weierstrass là một định lí trong giải tích cổ điển. Điều tương tự cũng đúng với cách mà Cantor xem xét các khái niệm về điểm giới hạn và tập dẫn xuất.

Năm 1884, Cantor lần đầu tiên định nghĩa khái niệm tập đóng như là một tập có chứa tất cả các điểm giới hạn của nó. Ông chỉ ra rằng bất kì tập *P* đóng là tập dẫn xuất của một tập *Q* nào đó và cũng chỉ ra rằng tập dẫn xuất của $A \cup B$ là hợp của tập dẫn xuất của *A* và tập dẫn xuất của *B*. (Cantor, 1884, tr. 226)

Như vậy, Cantor đã định nghĩa khái niệm tập đóng dựa trên khái niệm điểm giới hạn (mà ngày nay gọi là điểm tụ) và tập dẫn xuất trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$ và xem xét nó với quan điểm giải tích thực. Sự ra đời của tập đóng gắn liền với việc mở rộng định lí của Cantor về tính duy nhất của sự biểu diễn một hàm số thực bởi các dãy hàm lượng giác của nó và kết quả của định lí Bolzano – Weierstrass rằng mọi tập đóng vô hạn bị chặn trong không gian Euclide n chiều có ít nhất một điểm tụ. Do đó quan niệm giải tích của Cantor (QCT) về tập đóng mang hình thức khái niệm toán học[1], mang tính tiếp cận địa phương[2] và có cơ chế đối tượng[3].

2.1.2. Dedekind với quan niệm nguyên thủy về tập mở (trước 1879)

Dedekind là người có những ý tưởng đầu tiên về tập mở mặc dù ông gọi nó với một cái tên khác là "Körper". Ngày 19-01-1879, Dedekind có gửi cho Cantor một bức thư, trong đó có đề cập đến bản thảo có tựa đề *General Theorems about Spaces*, bắt đầu với định nghĩa của cái mà ông gọi là một "Körper":

[1] Hình thức *khái niệm toán học*: có tên và có định nghĩa. Chúng vừa là đối tượng vừa là công cụ của hoạt động toán học.
[2] *Tiếp cận địa phương* một khái niệm khi đối tượng gắn liền với khái niệm được xét trên một lân cận đủ bé.
[3] Khái niệm có *cơ chế đối tượng* khi nó là đối tượng nghiên cứu.

> Một hệ [tức là tập] các điểm *p*, *p*',… tạo thành một Körper nếu với mỗi điểm *p* của nó, có một độ dài *d* sao cho tất cả các điểm có khoảng cách từ chúng đến *p* nhỏ hơn *d* thì thuộc *P*. Các điểm *p*, *p'*…[được gọi là] nằm trong *P*. (Dedekind, 1931, tr. 353)

Như vậy, Körper của Dedekind chính xác là một tập mở trong không gian Euclide, có thể là không gian *n* chiều. Ông sử dụng khái niệm Körper để định nghĩa thế nào là một điểm nằm bên ngoài một Körper *P*. Từ hai định nghĩa này, ông đã định nghĩa một "điểm biên" ("Grenzpunkt") của *P* như một điểm không nằm trong và không nằm ngoài *P*; "biên" ("Begrenzung") của *P* được định nghĩa là tập tất cả các điểm biên của *P*. Kết quả cuối cùng của ông là: biên của một Körper không thể là một Körper (Dedekind, 1931, 354).

Dedekind đã kết thúc bản thảo ngắn sau khi đưa ra định nghĩa của biên một tập. Ông không tiếp tục phát triển khái niệm tập mở vì vào thời điểm đó, ông định công bố các bài thuyết trình của Dirichlet về lí thuyết thế năng và đưa ra một khảo sát chặt chẽ đối với nguyên lí của Dirichlet. Tuy nhiên, ông được xem là người đầu tiên đưa ra định nghĩa khái niệm một tập mở.

Như vậy, quan niệm của Dedekind (QDD) về tập mở là quan niệm hình học, xem xét tập mở theo khoảng cách trong không gian Euclide n chiều mà ngày nay gọi là định nghĩa theo quả cầu mở. Tập mở ra đời với vai trò là một công cụ được Dedekind sử dụng để xét thế nào là một điểm nằm bên ngoài một Körper P. Quan niệm QDD về tập mở có hình thức của một khái niệm cận toán học và có cơ chế công cụ tường minh.[4]

2.1.3. Peano và Jordan với tiếp cận không thành công đối với tập mở

Cantor không bao giờ sử dụng ý tưởng tổng quát của một tập mở, thậm chí trên một đường thẳng. Thay vào đó, ông chỉ nói đến một điểm "bên trong" một khoảng (Cantor, 1872, tr. 98) hoặc "những điểm trong" của một tập điểm liên tục (Cantor, 1879, tr. 135). Tuy nhiên, định nghĩa về điểm trong của Cantor năm 1879 gần với định nghĩa của Giuseppe Peano đưa ra trong tác phẩm "*Geometric Applications of the Infinitesimal Calculus*" (Peano, 1887).

Peano xem xét một tập điểm *A* (trong không gian 1, 2, hoặc 3 chiều) và định nghĩa một điểm *p* là "điểm trong" của nếu có một số dương *r* sao cho tất cả các điểm có khoảng cách từ *p* đến chúng nhỏ hơn *r* thì thuộc *A*. Trong hai định nghĩa tiếp theo, Peano vượt xa những gì Cantor đã làm và phát biểu rằng một điểm *p* được gọi là "điểm ngoài" của *A* nếu *p* là điểm trong phần bù của *A*. Sau cùng, *p* được gọi là một *điểm biên* của *A* nếu *p* không phải là điểm trong lẫn điểm ngoài của *A*. Peano nhận ra rằng nếu *A* chứa một số nhưng không phải tất cả các điểm trong không gian, thì *A* nhất thiết phải có một điểm biên, có thể thuộc hoặc không thuộc *A* (Peano, 1887, tr. 152-160).

[4] Khái niệm có *cơ chế tường minh* khi nó được vận dụng bởi chủ thể và chủ thể có thể trình bày hay giải thích nó.

Như vậy, những ý tưởng của Peano có thể dễ dàng dẫn đến khái niệm tập mở vào lúc đó vì ông có thể định nghĩa tập mở là tập tất cả các điểm trong của nó, nhưng rất tiếc điều này đã không xảy ra.

Năm 1892, trong một bài báo về tích phân xác định, các ý tưởng của Cantor được Jordan sử dụng theo một cách mới và hiệu quả hơn. Làm việc trong không gian *n*-chiều, Jordan đã giới thiệu một mêtric ("écart") khác với hàm khoảng cách thông thường được Định lí Pythagore đưa ra. Mêtric của Jordan chỉ ra khoảng cách của hai điểm ($a_1, a_2, ..., a_n$) và ($b_1, b_2, ..., b_n$) là: $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$.

Tiếp theo, ông đưa ra một định nghĩa về điểm giới hạn khác với Cantor, nhưng hai thập kỉ sau trở thành định nghĩa chuẩn:

"Một điểm p được gọi là điểm giới hạn của tập E nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ có một điểm q của E khác p sao cho khoảng cách giữa p và q nhỏ hơn ε". (Jordan, 1892)

Tuy nhiên, trong bản sửa đổi của tác phẩm "Cours d'analysis" năm 1893, Jordan đã sửa đổi định nghĩa của ông về điểm giới hạn của một tập *E* như sau:

"Điểm p được gọi là một điểm giới hạn của E nếu p là giới hạn của một dãy các điểm thuộc E" (1893, tr. 19).

Jordan (1892) kế thừa định nghĩa tập dẫn xuất của Cantor và định nghĩa lại tập đóng theo thuật ngữ tập dẫn xuất của Cantor:

"Tập dẫn xuất của E là tập tất cả các điểm giới hạn của E. Một tập E là đóng nếu tập dẫn xuất của E là một tập con của E".

Như vậy, định nghĩa của Jordan về điểm giới hạn (1892) chính là định nghĩa hiện nay về điểm tụ và định nghĩa về tập đóng (1892) đồng nhất với khái niệm tập đóng hiện nay (tập đóng là tập chứa tất cả các điểm tụ của nó). Định nghĩa của Jordan về điểm giới hạn (1893) chính là định nghĩa hiện nay về điểm dính.

Sau đó, Jordan định nghĩa "điểm trong" của *E* là các điểm thuộc *E* mà không thuộc tập dẫn xuất của phần bù của *E* (Jordan, 1892, tr. 72). Với những định nghĩa này, Jordan đã có thể định nghĩa một tập *E* là "mở" nếu *E* chứa tất cả và chỉ những điểm trong của *E*, nhưng ông đã không làm vì chỉ quan tâm đến việc định nghĩa các điểm biên của một tập *E* (những điểm trong không thuộc *E* cũng không thuộc phần bù của nó) và chỉ ra rằng tập các điểm biên của *E* luôn luôn khác rỗng và đóng.

Như vậy, trong giai đoạn này, Peano và Jordan đều nhìn thấy các phần tôpô trong công trình của họ như là các thành phần của giải tích chứ không phải là những đóng góp cho một chủ đề riêng biệt về tôpô. Đáng tiếc là cả hai ông đã không tiếp cận thành công khái niệm tập mở vì chỉ quan tâm đến biên của một tập. Tuy nhiên, Jordan đã tiếp cận thành công khái niệm tập đóng với quan niệm Mêtric (QJ). Quan niệm này mang hình thức khái niệm toán học và có cơ chế đối tượng tường minh.

2.1.4. Borel, Baire, Lebesgue và sự ra đời của tập mở

Định lí đầu tiên trong giải tích không thể tách rời với tập mở là Định lí Borel-Lebesgue. Định lí này sử dụng một khái niệm được gọi là “compactness” (tính compac): Một tập *E* được gọi là compac nếu, cho họ bất kì *S* của tập mở chứa *E*, có một số hữu hạn tập con của *S* chứa *E*. Định lí này sau đó phát biểu rằng mọi tập đóng và bị chặn của số thực là compac. Khái niệm của một tập mở là cần thiết để phát biểu tính compac, và do đó cần thiết cho định lí trong vấn đề khái quát đầy đủ. Tuy nhiên, khi Borel phát biểu phiên bản đầu tiên của định lí trong luận án tiến sĩ của mình, ông đã không đề cập đến các tập mở.

Khái niệm về một tập mở đã được nêu lên lần đầu tiên trong một bản in, bốn năm sau khi Borel chứng minh định lí của ông. Khái niệm này lần đầu tiên được René Baire xuất bản trong luận án tiến sĩ của mình khi thảo luận về các hàm thực nửa liên tục. Sau khi định nghĩa một “quả cầu đóng” *S* và “quả cầu mở” S' cùng tâm và bán kính trong không gian Euclidean *n* chiều, ông viết:

> Với điểm bất kì của S', có một quả cầu bán kính dương nhận điểm đó làm tâm mà tất cả các điểm của nó đều thuộc S'. Tổng quát hơn, tôi gọi mọi tập hợp các điểm có tính chất này là một *miền mở* có *n* chiều. (Baire, 1899, tr. 6-7)

Sau đó, Baire sử dụng một dãy các *miền mở* để chứng minh một định lí về các điều kiện mà theo đó, trong một miền mở cho trước, tất cả các hàm nửa liên tục trên có cùng một chặn trên nhỏ nhất.

Như vậy, Baire định nghĩa tập mở (miền mở) qua các quả cầu mở trong không gian Euclide n chiều để chứng minh định lí hàm nửa liên tục trên. Do đó, quan niệm của Baire về tập mở (QB) là quan niệm hình học, có hình thức khái niệm toán học và có cơ chế công cụ tường minh.

Tên “tập mở” được Lebesgue đưa ra trong luận án tiến sĩ mình năm 1902 có mục đích chính là giới thiệu độ đo Lebesgue (như một mở rộng của các tập Borel đo được[5]) và tích phân Lebesgue. Lebesgue đã chịu ảnh hưởng rõ rệt của tác phẩm “Cours d’analyse” (giáo trình giải tích) năm 1893 của Jordan, ông đã chấp nhận các định nghĩa về điểm trong của một tập và bao đóng của một tập (1902, tr. 231). Sau đó, ông đã định nghĩa một tập trên một đường thẳng là “mở” nếu nó không chứa bất kì điểm biên nào của nó. Tiếp theo, ông nói thêm rằng mọi điểm của một tập mở *E* là điểm trong của *E* và phần bù của một tập mở là đóng. Điều này cho phép ông chỉ ra rằng một tập mở là Borel đo được, nghĩa là một tập Borel. Điều này là cần thiết vì Borel đã định nghĩa các tập Borel đo được như lớp các tập hợp thu được bằng cách bắt đầu với các khoảng đóng và sau đó đóng dưới các phép toán của phần bù và hợp đếm được, và đặc biệt chỉ ra rằng các tập đóng là Borel đo được (Borel, 1898, tr. 49).

[5] Một tập Borel là một phần tử của một Borel Sigma-đại số, hay nói cách khác, tập Borel là tập có thể được xây dựng từ các tập mở hay tập đóng bằng cách lặp đi lặp lại các hợp và giao đếm được.

Sau đó, Lebesgue đã mở rộng các khảo sát trên, bao gồm các tập mở, cho không gian Euclide *n* chiều (1902, tr. 232-234). Trên mặt phẳng, ông sử dụng thường xuyên cái mà ông gọi là một “miền” hơn là các tập mở của ông, nghĩa là phần trong của một đường cong kín đơn (không tự cắt) (1902, tr. 235), tương ứng với “Gebiet” trong tiếng Đức.

Trong cuốn sách về Tích phân Lebesgue năm 1904, Lebesgue chính là người đã đưa ra khái niệm tổng quát về tập mở trong không gian Euclide *n* chiều, tổng quát hóa Định lí Borel cho họ phủ mở không đếm được.

Như vậy, quan niệm của Lebesgue (QL) về tập mở và tập đóng là quan niệm giải tích, trong đó ông quan niệm tập mở theo điểm biên và các điểm trong, tập đóng theo phần bù của tập mở. Ông sử dụng các khoảng đóng của □ để xây dựng các tập Borel. Do đó, quan niệm QL về tập mở và tập đóng mang hình thức khái niệm toán học, có cơ chế công cụ tường minh và đối tượng nghiên cứu, có tính chất khái quát hóa cho không gian Euclide n chiều.

Mặc dù Lebesgue đã có nghiên cứu đột phá về các tập mở, nhưng tập mở phổ biến khá chậm thông qua cộng đồng toán học. Tại Anh, W.H. và G.C. Young đã định nghĩa một tập điểm là “mở” nếu nó không đóng, một định nghĩa không tương thích với định nghĩa của Lebesgue, trong đó một tập điểm là mở chỉ nếu phần bù của nó là đóng. Tương tự như vậy, họ gọi một khoảng là "mở" nếu nó không bao gồm ít nhất một trong các điểm cuối của nó (Young, 1906, tr. 15-19).

Như vậy, Young tiếp cận tập mở bằng một quan niệm sai lầm vì một tập không đóng thì chưa hẳn là một tập mở, chẳng hạn trong □ có tập không đóng cũng không mở.

2.1.5. Quan niệm trừu tượng của Maurice Fréchet (QF) về tập đóng

Năm 1904, Fréchet đã khái quát hóa không gian Euclide thành những không gian trừu tượng hơn qua việc giới thiệu không gian *L*, nhằm mục đích mở rộng định lí của Weierstrass rằng một hàm liên tục (của một hoặc nhiều biến thực) trên một khoảng đóng và bị chặn thì đạt được chặn trên nhỏ nhất của nó.

Sau đó, Fréchet định nghĩa *p* là một “điểm giới hạn” của tập con *A* của *X* nếu *p* là giới hạn của một dãy nào đó các phần tử khác nhau của *A* và *A* được định nghĩa là “đóng” nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó.

Như vậy, định nghĩa tập đóng của Fréchet chính xác như cách của Cantor, trong đó tập đóng là tập chứa tất cả các điểm giới hạn của nó mà ngày nay gọi là các điểm tụ. Quan niệm giải tích Fréchet (QF) về tập đóng mang tính trừu tượng khi khái quát hóa không gian Euclide n chiều thành không gian L và sau đó là không gian mêtric.

2.1.6. Quan niệm tôpô của Felix Hausdorff (QH) về tập mở và tập đóng

Ý tưởng về một tập mở trong một không gian trừu tượng (trái ngược với không gian Euclide *n* chiều dựa trên ý tưởng của Baire và Lebesgue) bắt nguồn từ Felix Hausdorff trong ngữ cảnh không gian tôpô của ông. Tuy nhiên, cái mà Hausdorff gọi là một không gian tôpô là một ý tưởng chuyên biệt hơn cái mà ngày nay được gọi là không gian tôpô.

Cái mà ông ấy dùng như ý tưởng nguyên thủy là “lân cận của một điểm”. Để tránh sự nhầm lẫn, người ta gọi các không gian của ông ấy là “không gian lân cận”. Hausdorff đã định nghĩa một không gian lân cận là một tập *E*, mà các phần tử của nó được gọi là “điểm”, cùng với một tập hợp các tập con của *E*. Các tập con này được gọi là các lân cận và phải tuân theo bốn tiên đề:

(A) Mỗi điểm *x* thuộc ít nhất một lân cận của U_x, và mỗi lân cận U_x chứa *x*.

(B) Nếu U_x và V_x là hai lân cận của cùng một điểm *x*, thì có một lân cận W_x của *x* sao cho $W \subseteq U \cap V$.

(C) Nếu một điểm *y* thuộc lân cận U_x của *x*, thì có một lân cận V_y của *y* sao cho V_y là tập con của U_x.

(D) Nếu *x* và *y* là hai điểm phân biệt, thì có một lân cận U_x của *x* và một lân cận V_y của *y* sao cho $U_x \cap V_y = \varnothing$. (Hausdorff, 1914, tr. 213)

Ngay sau khi đưa ra tiên đề của mình cho một không gian tôpô, Hausdorff đã định nghĩa “điểm trong” của tập con *A* của một không gian tôpô. Cụ thể, *x* là một điểm trong của *A* nếu lân cận nào đó của *x* là một tập con của *A*, và *x* được gọi là một điểm biên của *A* nếu *x* thuộc *A* nhưng không phải là một điểm trong của *A*. Sau đó một tập *A* được định nghĩa là một tập mở (“Gebiet”) nếu tất cả các điểm của nó là các điểm trong (1914, tr. 214-215). Cuối cùng, ông chỉ ra rằng hợp của họ bất kì (đếm được hay không đếm được) của các tập mở là mở, và giao hữu hạn của các tập hợp mở là mở.

Sau khi định nghĩa tập mở theo ngôn ngữ lân cận, Hausdorff quay sang điểm tụ và tập hợp đóng. Ông định nghĩa *p* là một điểm tụ (“Häufungspunkt”) của một tập *B* nếu mọi lân cận của *p* chứa vô số điểm của *B*. Một tập được định nghĩa là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm tụ của nó. Sau đó, Hausdorff chỉ ra rằng “giao của họ bất kì các tập đóng là đóng và hợp một số hữu hạn bất kì các tập đóng là đóng.” (1914, tr. 219-225).

Như vậy, Hausdorff là người đầu tiên định nghĩa tập mở theo các điểm trong và tập đóng theo các điểm tụ sau khi ông xây dựng không gian tôpô bằng hệ thống tiên đề dựa trên các lân cận. Quan niệm của Hausdorff về tập đóng và tập mở là quan niệm tôpô, mang tính chất trừu tượng và có cơ chế đối tượng nghiên cứu.

2.1.7. Quan niệm tôpô của Heinrich Tietze (QT) và Pavel Alekxandrov (QA) về tập mở

Năm 1923, một nhà tôpô học người Áo, Heinrich Tietze xuất bản bài báo tựa đề *Những đóng góp cho tôpô tổng quát. I. Các tiên đề cho các dạng khác của khái niệm lân cận* trên tạp chí nổi tiếng *Mathematische Annalen*. Không như Hausdorff chỉ sử dụng “Gebiet” thay cho tính từ “mở” (“offen” trong tiếng Đức) để mô tả một tập, Tietze chấp nhận tính từ “offen” trong cuốn *Vorlesungen über reelle Funktionen* của nhà giải tích học Constantin Carathéodory làm việc tại Đức (1918, tr. 40) là người đã đề cập đến một “offen Menge” hay “tập mở” hơn là “Gebiet” (Tietze, 1923, tr. 292).

Tietze mong muốn tìm một tập hợp các tiên đề cho một không gian lân cận được biểu diễn với khái niệm tập mở, hơn là với khái niệm lân cận như ý tưởng nguyên thủy. Ông tiếp cận rất gần các tiên đề của Hausdorff (*A*) - (*D*) và đã định nghĩa cái mà chúng ta sẽ gọi một không gian *O* là tập *E* mà các phần tử của nó được gọi là điểm, thỏa mãn bốn điều kiện sau:

(A^0) Mỗi điểm *x* thuộc ít nhất một tập mở.

(B^0) Nếu *U* và *V* là các tập mở với ít nhất một điểm chung, thì $U \cap V$ là một tập mở.

(C^0) Nếu mỗi điểm *x* của *A* là một phần tử của một tập con nào đó của *A*, thì *A* là mở.

(D^0) Nếu *x* và *y* là các điểm phân biệt thì có một tập mở *U* chứa *x* và một tập mở *V* chứa *y* sao cho *U* và *V* rời nhau. (Tietze, 1923, tr. 294)

Tietze quan sát thấy rằng trong không gian lân cận, tập hợp của tất cả các tập mở (tức là các tập con của không gian chỉ chứa các điểm trong) là một không gian *O*. Ngược lại, nếu trong một không gian *O*, tất cả các tập mở có chứa một điểm *x* được coi là một lân cận của *x* thì họ của tất cả các tập, là các lân cận của điểm nào đó của không gian, là một không gian lân cận.

Năm 1925, nhà tôpô học người Nga, Pavel Alekxandrov xuất bản một bài báo về tôpô trong các không gian Euclide trên tạp chí *Mathematische Annalen*. Trong bài báo, ông đưa ra định nghĩa các không gian lân cận của Hausdorff theo ngôn ngữ tập mở mà ông gọi là "Gebiet". Định nghĩa này đơn giản hơn rất nhiều so với định nghĩa của Tietze:

(1) Giao của hai tập mở là mở, và hợp của một tập bất kì các tập mở là mở;

(2) Hai điểm phân biệt bất kì được chứa trong các tập mở rời nhau. (1925, tr. 298).

Như vậy, quan niệm tôpô của Heinrich Tietze (QT) và Pavel Alekxandrov (QA) về tập mở có khác biệt rất lớn so với quan niệm của Hausdorff khi xây dựng không gian các lân cận bằng ngôn ngữ tập mở, hay chính xác hơn là xây dựng không gian tôpô trừu tượng trên tập mở, và do đó cơ chế hoạt động của khái niệm tập mở được chuyển từ vai trò đối tượng nghiên cứu (đối với Hausdorff) sang đối tượng công cụ tường minh. Hơn nữa, tập mở trong hai quan niệm này có hình thức thể hiện khái niệm toán học và mang tính trừu tượng.

2.1.8. Quan niệm tôpô của Waclaw Sierpin'ski về tập đóng và tập mở

Năm 1926, Sierpin'ski, nhà Tôpô học người Ba Lan, đã công bố trên tạp chí *Mathematische Annalen* một phân tích chi tiết về ý tưởng "tập dẫn xuất" A' của *A* có thể được sử dụng làm cơ sở cho tôpô bằng cách đặt nghiên cứu của ông trong bối cảnh của tất cả những gì đã được đưa ra trong hai mươi năm trước: điểm giới hạn của Fréchet, điểm tụ của Riesz, khoảng cách của Hausdorff và Fréchet và bao đóng của Kutarowski. Mục đích của bài báo là chứng tỏ tôpô có thể được phát triển như thế nào bằng cách lấy khái niệm của tập dẫn xuất làm ý tưởng nguyên thủy.

Trong phần cuối cùng của bài viết, Sierpin'ski đã có một cách tiếp cận khác và lấy khái niệm "tập đóng" làm ý tưởng nguyên thủy duy nhất. Sau đó ông xem xét một tập bất kì *E* khác rỗng và một tập bất kì *F* các tập con của *E*, thỏa mãn chỉ hai tiên đề sau:

"(1) Tập *E* đóng.

(2) Giao của bất kì tập đóng là đóng." (1926)

Do đó các phần tử của *F* được định nghĩa là "đóng". Ông gọi tập *E* cùng với tập *F* các tập con như vậy là một không gian *F*. Sau đó, ông chứng minh rằng một tập *E* là một không gian *F* nếu và chỉ nếu *E* có một phép toán đơn điệu của tập dẫn xuất, trong đó tập dẫn xuất của *A* được xem là tập tất cả các phần tử *p* của *E* sao cho mỗi tập đóng bao hàm $A\setminus\{p\}$ chứa *p*.

Tương tự như vậy, ông đã đưa ra một bộ tiên đề cho bao đóng một tập sao cho *E* thỏa mãn các tiên đề này nếu và chỉ nếu *E* là một không gian *F*, trong đó một tập được xem là đóng nếu nó bằng với bao đóng của nó.

Năm 1928, Sierpin'ski xuất bản bằng tiếng Ba Lan một cuốn sách tựa đề *Topologia ogólna* (*General Topology*) mà được chuyển ngữ tiếng Anh năm 1934. Trong tác phẩm này, ông tự coi mình là người đi theo con đường của Fréchet (chứ không phải của Hausdorff) và lấy khái niệm nguyên thủy là "tập mở". Sierpin'ski giới thiệu một số ít các tiên đề cho các tập mở trong chương đầu của ông và sau đó thêm một hoặc nhiều tiên đề trong sáu chương sau.

Như vậy, Sierpin'ski định nghĩa tập đóng là tập bằng với bao đóng của nó trong bối cảnh tiếp cận không gian tôpô bằng ba cách khác nhau dựa trên tập dẫn xuất, tập mở và tập đóng. Vì thế, quan niệm tôpô của Sierpin'ski (QS) về tập mở và tập đóng có cơ chế công cụ tường minh, mang hình thức thể hiện khái niệm toán học, có tính trừu tượng và tiên đề hóa.

2.2. Một số kết quả thu được từ việc phân tích lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm tập mở, tập đóng

2.2.1. Những điều kiện cho sự hình thành tập mở, tập đóng

Khái niệm tập đóng ra đời năm 1884, khi Cantor nghiên cứu mở rộng định lí của ông về tính duy nhất của sự biểu diễn một hàm số thực bởi các chuỗi lượng giác của nó trong trường hợp hàm số đó liên tục và cả trường hợp nó không liên tục tại rải rác một số điểm. Tập đóng được Cantor định nghĩa là một tập chứa tất cả các điểm giới hạn của nó và định nghĩa này gắn liền với định nghĩa mới của ông về điểm giới hạn và tập dẫn xuất mà ông đưa ra vào năm 1872.

Khái niệm tập mở ra đời năm 1899, dưới tên gọi ban đầu là miền mở, khi Baire sử dụng để chứng minh một định lí về các điều kiện để trong một miền mở cho trước, tất cả các hàm nửa liên tục trên có cùng một chặn trên nhỏ nhất. Miền mở của Baire là tập hợp các điểm thuộc một quả cầu mở S' trong không gian Euclide *n* chiều sao cho với mỗi điểm có một quả cầu bán kính dương nhận điểm đó làm tâm mà tất cả các điểm của nó đều thuộc S'.

Tập mở có tên chính thức trong luận án của Lebesgue năm 1902 khi ông giới thiệu độ đo Lebesgue và tích phân Lebesgue, trong đó ông định nghĩa một tập trên đường thẳng là mở nếu nó không chứa bất kì điểm biên nào của nó; mọi điểm của tập mở là điểm trong của nó và phần bù của một tập mở là đóng.

2.2.2. Các quan niệm gắn liền với tập đóng

- Quan niệm giải tích của Cantor (QC), Jordan (QJ), Fréchet (QF), Lebesgue (QL): Cantor quan niệm tập đóng là tập chứa tất cả điểm giới hạn của nó mà ngày nay gọi là điểm tụ; Jordan quan niệm tập đóng là tập chứa tập dẫn xuất của tập đó mà ngày nay chính là tập chứa tất cả các điểm tụ của nó; Fréchet quan niệm tập đóng giống Jordan nhưng khái quát hóa trong không gian L và không gian Mêtric; Lebesgue quan niệm tập đóng là phần bù của tập mở.
- Quan niệm tôpô của Hausdorff (QH), Sierpin'ski (QS): Hausdorff quan niệm tập đóng là tập các điểm tụ của nó giống Jordan và Fréchet, nhưng khái quát hóa trong không gian lân cận; Sierpin'ski quan niệm tập đóng là tập bằng với bao đóng của nó và quan niệm xây dựng không gian tôpô dựa trên tập đóng bằng hệ tiên đề cho bao đóng.

2.2.3. Các quan niệm gắn liền với tập mở

- Quan niệm hình học của Dedekind (QDD), Baire (QBA): Dedekind xem xét tập mở theo khoảng cách trong không gian Euclide *n* chiều mà ngày nay chính là theo các quả cầu mở; Baire định nghĩa tập mở (miền mở) qua các quả cầu mở trong không gian Euclide *n* chiều.
- Quan niệm giải tích của Lesbesgue (QL): ông quan niệm tập mở theo điểm biên và các điểm trong và tổng quát hóa khái niệm tập mở cho không gian Euclide *n* chiều.
- Quan niệm tôpô của Hausdorff (QH), Tietze (QT), Alekxandrov (QA), Sierpin'ski (QS): Hausdorff là người đầu tiên định nghĩa tập mở theo các điểm trong và tập đóng theo các điểm tụ trong Không gian Tôpô được xây dựng trên các lân cận; quan niệm tôpô của Heinrich Tietze và Pavel Alekxandrov về tập mở có khác biệt rất lớn so với quan niệm của Hausdorff khi xây dựng Không gian các lân cận bằng ngôn ngữ tập mở, hay chính xác hơn là xây dựng không gian tôpô trừu tượng trên tập mở; Sierpin'ski xây dựng không gian tôpô dựa trên tập mở bằng hệ tiên đề cho tập mở.

2.2.4. Đặc trưng tri thức luận của khái niệm tập mở, tập đóng

Phân tích tri thức luận quá trình hình thành và phát triển của khái niệm tập mở, tập đóng, chúng tôi thấy có các ý tưởng đóng vai trò quan trọng trong việc hình thành khái niệm tập mở, tập đóng; đồng thời, còn có các khái niệm gắn liền với tập mở, tập đóng. Từ đó cho phép chúng tôi phân loại khái niệm tập mở, tập đóng dựa các đặc trưng khoa học luận như sau:

- Đặc trưng về phạm vi tác động của khái niệm tập mở, tập đóng: giải tích, tôpô, hình học.
- Đặc trưng về các yếu tố gắn liền với khái niệm tập mở, tập đóng: bao đóng, điểm biên, biên, điểm trong, điểm giới hạn, điểm tụ, quả cầu đóng, quả cầu mở.
- Đặc trưng về cơ chế hoạt động của khái niệm: công cụ ngầm ẩn, công cụ tường minh, đối tượng nghiên cứu.
- Đặc trưng về hình thức thể hiện của khái niệm: khái niệm tiền toán học, khái niệm cận toán học, khái niệm toán học.
- Đặc trưng về cách tiếp cận khái niệm: địa phương.
- Đặc trưng về cấp độ thể hiện khái niệm: cấp độ cụ thể trên đường thẳng thực, cấp độ khái quát trong không gian Euclide *n* chiều, cấp độ trừu tượng hóa trong không gian Lesbesgue, không gian mêtric và không gian tôpô, tiên đề hóa trong không gian các lân cận và trong không gian Tôpô.
- Đặc trưng về tính đa tiếp cận khái niệm tập mở: bằng không gian các lân cận, quả cầu mở, các điểm trong, biên, hợp của một họ đếm được các tập mở.
- Đặc trưng về tính đa tiếp cận khái niệm tập đóng: bằng điểm giới hạn của dãy, phần bù của một tập mở, bao đóng, giao của họ bất kì các tập đóng, hợp một số hữu hạn các tập đóng.

2.2.5. Vai trò của đường thẳng thực $\mathbb{R}$ đối với việc hiểu các khái niệm tập đóng, mở trong không gian tổng quát

Từ kết quả phân tích tri thức luận, cho phép chúng tôi rút ra một số nhận định sau:

- Các nhà nghiên cứu đã khái quát hóa khái niệm khoảng cách trong $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$ thành khái niệm mêtric. Các khái niệm về tập đóng và tập mở trong không gian mêtric tổng quát được kế thừa từ các khái niệm tương ứng trong $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$.
- Ta có thể dùng các minh họa trong $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$ để làm rõ các tính chất về tập đóng, tập mở trong không gian mêtric tổng quát. Hơn nữa, một tính chất (nào đó) nếu đúng với mọi không gian mêtric thì phải đúng trong không gian $\mathbb{R}^n$. Do vậy, ta có thể dùng $\mathbb{R}^n$ như một trường hợp đặc biệt để kiểm tra tính chất này.
- Tuy nhiên, một tính chất (nào đó) đúng trong không gian $\mathbb{R}^n$ thì chưa chắc bảo toàn tính đúng trong không gian mêtrtic tổng quát.

2.2.6. Một số chướng ngại tri thức luận được nhận dạng

Phân tích tri thức luận lịch sử cho phép xác định chướng ngại tri thức luận của tập mở là sự khái quát khái niệm tập mở từ đường thẳng thực vào không gian Euclide *n* chiều, và từ không gian Euclide *n* chiều sang không gian tôpô trừu tượng và không gian mêtric tổng quát. Chướng ngại này sinh ra trong sự tiến triển của các quan niệm QL, QH, QT, QA và QS. Tương tự cho trường hợp tập đóng cùng với sự tiến triển của các quan niệm QF, QH và QS.

3. Kết luận

Phân tích tri thức luận lịch sử đã làm rõ các giai đoạn và các quan niệm của quá trình hình thành và phát triển của tập mở và tập đóng. Hai quan niệm ảnh hưởng lớn nhất đến sự hình thành và phát triển của chúng, đó là quan niệm giải tích và quan niệm tôpô. Tập mở và tập đóng được xây dựng trước hết trên đường thẳng thực, về sau được khái quát hóa trong không gian Euclide *n* chiều và được trừu tượng hóa trong không gian mêtric và tôpô. Đặc biệt, tập mở trở thành yếu tố cơ bản nhất với vai trò công cụ để xây dựng các không gian tôpô.

Chính sự trừu tượng hóa hai tri thức này trong các không gian mêtric và không gian tôpô sinh ra chướng ngại tri thức luận mà sinh viên khoa toán phải đương đầu khi nghiên cứu về chúng. Chẳng hạn, những kinh nghiệm trước đó của sinh viên về tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ có ảnh hưởng đến sự hiểu biết tính "mở" và "đóng" của một tập trong các không gian mêtric tổng quát. Đây chính là một vấn đề đặt ra cho các nhà đào tạo sư phạm và nghiên cứu didactic cần quan tâm khi giảng dạy tri thức tập mở và tập đóng cho sinh viên ngành sư phạm Toán.

Chúng tôi sẽ trình bày một nghiên cứu về các sai lầm của sinh viên liên quan đến chướng ngại này trong một bài báo khác.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của didactic Toán*. TP Hồ Chí Minh: Đại học Quốc gia.

Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến. (2003). *Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thực hành dạy – học môn Toán*. Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ, Mã số B2001-23-02.

Lê Thị Hoài Châu. (2017). *Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên*. Hội thảo quốc tế về Didactic Toán lần thứ 6. Actes du sixième colloque international en didactique des mathématiques, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.

Nguyễn Văn Khuê, Bùi Đắc Tắc và Đỗ Đức Thái. (2001). *Cơ sở lí thuyết hàm và giải tích hàm*. Hà Nội: NXB Giáo dục, Đại học Sư phạm Hà Nội.

Trần Tráng. (2005). *Giáo trình tôpô đại cương*. TP Hồ Chí Minh: Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.

Aleksandrov, P. (1925). Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie. *Mathematische Annalen,* 94, 296-308.

Baire, R. (1899). Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di matematica pura ed applicata, 3*(3), 1-123.

Borel, E. (1898). *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier–Villars, Paris.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction*. Seventh Edition, McGraw-Hill, Inc.

Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen, 5*, 123-132. Reprinted in (1932, 92-102). Pagination agrees with the reprint.

Cantor, G. (1879). *Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physicalische Klasse, 127-135. Reprinted in (1932, 134-138). Pagination agrees with the reprint.

Cantor, G. (1884). Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. 6. *Mathematische Annalen* 23, 453-488. Reprinted in (1932, 210-244). Pagination agrees with the reprint.

Carathéodory, C. (1918). *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Teubner, Leipzig.

Dedekind, R. (1931). *Gesammelte mathematische Werke, 2*, (R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore, Eds.). Vieweg, Braunschweig.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Paris 139, 848-850.

Jordan, C. (1892). Remarques sur les intégrales définis. *Journal de mathématiques pures et appliquées, 4*(8), 69-99.

Jordan, C. (1893). *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, 1*, second, revised edition. Gauthier–Villars, Paris.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit, Leipzig.

Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di matematica pura ed applicata, 3*(7), 231-359. Pagination follows the original printing of the dissertation, 1-129.

Peano, G. (1887). *Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale*. Fratelli Bocca, Turin.

Sierpinski, W. (1926). La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits. *Mathematische Annalen*, 97, 321-337.

Sierpinski, W. (1934). *Introduction to General Topology*. University of Toronto, Toronto.

Sutherland, W. A. (2009). *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Second Edition, Emeritus Fellow of New College, Oxford.

Tietze, H. (1923). Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs. *Mathematische Annalen*, 88, 290-312.

Young, W. H., & Young, G. C. (1906). *The Theory of Sets of Points*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.