LỜI GIẢI CHÍNH XÁC CHO BÀI TOÁN MICZ-KEPLER CHÍN CHIỀU

NGUYỄN THÀNH SƠN*, THỚI NGỌC TUẤN QUỐC**,
LÊ ĐẠI NAM***, LÊ VĂN HOÀNG****

TÓM TẮT

Gần đây, bài toán MICZ-Kepler chín chiều được thiết lập để mô tả chuyển động của điện tử trong thế Coulomb với sự có mặt của đơn cực SO(8). Một điều rất thú vị là bài toán này tương đương với bài toán dao động tử điều hòa mười sáu chiều. Trong công trình này, chúng tôi đưa ra lời giải giải tích chính xác cho bài toán trong hệ tọa độ cầu chín chiều.

Từ khóa: đơn cực-SO(8), bài toán MICZ-Kepler, phương trình Schrodinger.

ABSTRACT

Exact analitical solutions of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem

Recentli, the nine-dimensional MICZ-Kepler problem has been established as a system which describes the motion of a nine-dimensional charged particle in the Coulomb potential with the presence of the SO(8) monopole. Interestingli, this system is equivalent to the sixteen-dimensional harmonic oscillator. In this research, the accurate analitical solutions of the Schrodinger equation of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem are built in spherical coordinates

Keywords: SO(8)-monopole, MICZ-Kepler problem, Schrodinger equation.

1. Giới thiệu

Bài toán MICZ-Kepler được Zwanziger, Mc Intosh và Cisneros xây dựng từ những năm 60 [7,16], bằng cách mở rộng bài toán Kepler khi thêm vào hệ này trường đơn cực từ Dirac. Đây là một bài toán quan trọng được khảo sát nhiều bằng các phương pháp khác nhau trong vài thập niên qua và đến bây giờ vẫn còn được quan tâm. Mở rộng bài toán này cho không gian nhiều chiều là việc rất tự nhiên và được đưa ra trong nhiều công trình [5-6]. Tuy nhiên, đáng chú ý nhất là các trường hợp không gian 2 chiều, 3 chiều, 5 chiều và 9 chiều. Bài toán MICZ-Kepler trong các không gian này có một vị trí rất đặc biệt, do nó lần lượt tương đương với bài toán dao động tử điều hòa 2 chiều, 4 chiều, 8 chiều và 16 chiều [12-15]. Một điều thú vị là các phép biến đổi kết nối các bài toán này liên quan đến định lí Hurwitz 1, 2, 4, 8 [1] được đưa ra từ cuối thế kỉ

* ThS, Đại học Kiến trúc TPHCM
** ThS, Trường THPT Năng khiếu TPHCM
*** Sinh viên, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
**** PGS TSKH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

XIX cho việc xây dựng các đại số chia chuẩn hóa liên quan đến số thực, số phức, số quaternion và số octonion [1,3]. Định lí này cho thấy chỉ tồn tại mối liên kết giữa bài toán Coulomb với bài toán dao động tử điều hòa cho 4 trường hợp nêu trên. Sau bài toán MICZ-Kepler 3 chiều, bài toán MICZ-Kepler 5 chiều được xây dựng từ các công trình và nghiên cứu rất kĩ trong các công trình [4,9]. Riêng bài toán MICZ-Kepler 9 chiều, trường hợp cuối cùng trong các bài toán MICZ-Kepler nêu trên, được đưa ra và nghiên cứu gần đây [12,14,15].

Bài toán MICZ-Kepler chín chiều được đưa ra [12,14,15] mô tả chuyển động của hạt mang điện trong trường Coulomb và trường đơn cực-SO(8). Việc xây dựng bài toán này xuất phát từ việc tìm ra phép biến đổi bình phương song tuyến kết nối bài toán Coulomb chín chiều với dao động tử điều hòa 16 chiều. Một trường đơn cực được xây dựng sao cho khi kết hợp bài toán Coulomb với nó sẽ tương đương với dao động tử điều hòa 16 chiều. Kết quả cho thấy đó là trường đơn cực SO(8) [14]. Một điều rất thú vị là từ hướng tiếp cận khác, phân thớ Hopf [9] và mở rộng phân thớ này cho trường hợp $S_{15} \xrightarrow{S_8} S_7$ cũng đã đưa ra khái niệm đơn cực SO(8) [3].

Mặc dù với công cụ rất mạnh là lí thuyết nhóm được sử dụng trong các công trình [3] đã đưa ra một loạt các kết quả quan trọng trong khảo sát hiệu ứng Hall lượng tử khi hạt chuyển động trong trường định chuẩn SO(8), bài toán MICZ-Kepler 9 chiều được khảo sát sau đó bằng phương pháp giải tích tường minh [12,14,15] vẫn có nhiều vật lí mới. Trong công trình [14], chúng tôi đã chứng minh chuyển động của hạt mang điện trong trường Coulomb và trường đơn cực SO(8) (bài toán MICZ-Kepler 9 chiều) là tương đương với bài toán dao động tử điều hòa 16 chiều. Tiếp theo đó chúng tôi tìm ra đối xứng ẩn của bài toán MICZ-Kepler 9 chiều là véc-tơ Runge-Lenz mở rộng [12] từ đây xây dựng nhóm đối xứng của bài toán là SO(10) và nhóm đối xứng động lực của bài toán là SO(10,2) [15]. Như vậy, có thể nói nghiên cứu bài toán MICZ-Kepler 9 chiều là có ý nghĩa và trong công trình này chúng tôi sẽ xây dựng hàm sóng tường minh và năng lượng tương ứng cho bài toán này trong hệ tọa độ cầu.

2. Bài toán MICZ-Kepler chín chiều

Bài toán MICZ-Kepler chín chiều là một hệ bao gồm chuyển động của hạt mang điện và có *isospin* chuyển động trong trường Coulomb và trường đơn cực theo mô hình SO(8) với các toán tử động lượng có dạng sau:

$$\hat{\pi}_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + A_k \hat{Q}_{kj}, \qquad \hat{\pi}_9 = -i\frac{\partial}{\partial x_9} \tag{1}$$

với chỉ số ($j = 1, 2, ..., 8$). Khi cần kí hiệu cả 9 thành phần xung lượng ta sử dụng chỉ số là kí tự Hi Lạp có giá trị từ 1 đến 9: $\hat{\pi}_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, ..., 9$. Từ đây trở về sau sự lặp lại các chỉ số Latinh có nghĩa lấy tổng theo chỉ số đó từ 1 đến 8, trong khi sự lặp lại chỉ số Hi Lạp có nghĩa là lấy tổng theo chỉ số đó từ 1 đến 9.

Trong biểu thức (1) ta có thành phần tương tác $A_k\hat{Q}_{kj}$ với:

$$A_k = \frac{x_k}{r\left(r+x_9\right)}, \qquad (k=1,..,8) \tag{2}$$

và hệ 56 toán tử $\hat{Q}_{kj}$ phản đối xứng $\hat{Q}_{kj} = -\hat{Q}_{jk}$ tạo thành một đại số kín SO(8):

$$\left[\hat{Q}_{jk}, \hat{Q}_{mn}\right] = i\delta_{jm}\hat{Q}_{kn} + i\delta_{kn}\hat{Q}_{jm} - i\delta_{jn}\hat{Q}_{km} - i\delta_{km}\hat{Q}_{jn} \tag{3}$$

trong đó δ_{jk} là kí hiệu Kronecker. Do các toán tử này là phản đối xứng cho nên ta có tất cả 28 toán tử độc lập. Trong công trình [13], chúng tôi đã đưa ra dạng tường minh của hệ toán tử $\hat{Q}_{kj}$ thông qua 7 tham số là biến số góc $(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Tuy nhiên, để khảo sát bài toán chúng ta có thể chọn dạng tường minh của các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ bất kì thỏa mãn các tính chất giao hoán (3).

Bây giờ ta viết phương trình Schrodinger cho bài toán MICZ-Kepler chín chiều [6-8] trong hệ đơn vị nguyên tử như sau:

$$\left(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{\hat{Q}^2}{8r^2} - \frac{\mathbf{Z}}{r}\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\,\Psi(\mathbf{r}) \tag{4}$$

trong đó, $\mathbf{Z}$, E lần lượt là điện tích hạt nhân và năng lượng của hạt; $\pi^2 = \hat{\pi}_\lambda\hat{\pi}_\lambda$ với toán tử xung lượng được định nghĩa ở công thức (1); toán tử bình phương $\hat{Q}^2 = \hat{Q}_{jk}\hat{Q}_{jk}$; $r = \sqrt{x_\lambda x_\lambda}$ là khoảng cách trong không gian 9 chiều.

Ta khai triển phương trình (4) thu được dạng sau:

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{\hat{Q}_{kj}\hat{L}_{kj}}{2r\left(r+x_9\right)} + \frac{\hat{Q}^2}{4r\left(r+x_9\right)} - \frac{\mathbf{Z}}{r} - E\right)\Psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{5}$$

trong đó, toán tử Laplace trong không gian 9 chiều và các toán tử $\hat{L}_{kj}$ được định nghĩa:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\lambda}\ ,\ \hat{L}_{kj} = x_k\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - x_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right). \tag{6}$$

Ta dễ dàng kiểm chứng các toán tử là toán tử $\hat{L}_{kj}$ phản xứng với các chỉ số j, k và thỏa mãn hệ thức giao hoán của đại số SO(8) như sau:

$$\left[\hat{L}_{kj}, \hat{L}_{mn}\right] = i\delta_{km}\hat{L}_{jn} + i\delta_{jn}\hat{L}_{km} - i\delta_{kn}\hat{L}_{jm} - i\delta_{jm}\hat{L}_{kn}\,. \tag{7}$$

3. Bài toán MICZ-Kepler trong hệ tọa độ cầu

Ta sẽ giải phương trình (5) trong tọa độ cầu 9 chiều, được định nghĩa qua phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned}
x_9 &= r\cos\theta \\
x_8 &= r\sin\theta\cos\varphi_6 \\
x_7 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\cos\varphi_5 \\
x_6 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\cos\varphi_4 \\
x_5 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\sin\varphi_4\cos\varphi_3 \\
x_4 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\sin\varphi_4\sin\varphi_3\cos\varphi_2 \\
x_3 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\sin\varphi_4\sin\varphi_3\sin\varphi_2\cos\varphi_1 \\
x_2 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\sin\varphi_4\sin\varphi_3\sin\varphi_2\sin\varphi_1\cos\varphi_0 \\
x_1 &= r\sin\theta\sin\varphi_6\sin\varphi_5\sin\varphi_4\sin\varphi_3\sin\varphi_2\sin\varphi_1\sin\varphi_0
\end{aligned} \tag{8}$$

Các biến số trong tọa độ cầu có miền giá trị sau:

$$r: 0 \to +\infty; \qquad \theta,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6 : 0 \to \pi; \qquad \varphi_0 : 0 \to 2\pi\,. \tag{9}$$

Toán tử Laplace trong không gian 9 chiều trong tọa độ cầu có dạng sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\lambda} = \frac{1}{r^8}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^8\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^7\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^7\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{4}{r^2\sin^2\theta}\hat{L}^2 \tag{10}$$

trong đó $\hat{L}^2 = \hat{L}_{kj}\hat{L}_{kj} \quad (k > j)$; các toán tử $\hat{L}_{kj}$ chỉ phụ thuộc vào 7 góc $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6$. Để thuận lợi tính toán chúng ta chọn dạng tường minh các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ có dạng tường minh giống $\hat{L}_{kj}$ với việc thay các góc $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6$ bằng các góc $\tilde{\varphi}_0,\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\tilde{\varphi}_3,\tilde{\varphi}_4,\tilde{\varphi}_5,\tilde{\varphi}_6$. Ta thấy các toán tử $\hat{L}_{kj}$ và $\hat{Q}_{kj}$ là hàm của các biến số khác nhau cho nên:

$$\left[\hat{L}_{kj},\hat{Q}_{mn}\right] = 0$$

với các chỉ số bất kì. Ta định nghĩa các toán tử mới như sau:

$$\hat{J}_{kj} = \hat{L}_{kj} + \hat{Q}_{kj} \tag{11}$$

và dễ dàng kiểm chứng các toán tử này cũng thỏa mãn điều kiện quan hệ giao hoán của nhóm SO(8):

$$\left[\hat{J}_{kj},\hat{J}_{mn}\right] = i\delta_{km}\hat{J}_{jn} + i\delta_{jn}\hat{J}_{km} - i\delta_{kn}\hat{J}_{jm} - i\delta_{jm}\hat{J}_{kn}\,. \tag{12}$$

Ta có thể viết lại phương trình (5) trong tọa độ cầu như sau:

$$\begin{aligned}
\Bigg\{ -\frac{1}{2r^8}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^8\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{2r^2\sin^7\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^7\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
+ \frac{\hat{L}^2}{8r^2\sin^2\theta/2} + \frac{\hat{J}^2}{8r^2\cos^2\theta/2} - \frac{\mathbf{Z}}{r} - E \Bigg\}\Psi(r,\theta,\varphi) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

với toán tử bình phương $\hat{J}^2 = \hat{J}_{kj}\hat{J}_{jk} \quad (k > j)$. Ở đây kí hiệu φ có nghĩa là 7 góc $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ như trong biến đổi (8). Thông thường, nếu ta sử dụng biểu diễn các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ là các ma trận bậc 8 thì hàm sóng $\Psi(r,\theta,\varphi)$ sẽ là các spinor có 8 thành phần. Tuy nhiên ở đây chúng ta sử dụng các toán tử SO(8) là các toán tử vi phân được tham số hóa qua 7 biến số góc $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4, \tilde{\varphi}_5, \tilde{\varphi}_6$. Lúc này hàm sóng $\Psi(r,\theta,\varphi)$ ngoài 9 biến số không gian còn phụ thuộc vào 7 tham số của đại số SO(8) chứa trong các toán tử $\hat{Q}_{kj}(\tilde{\varphi})$. Ta sẽ kí hiệu hàm sóng là $\Psi(r,\theta,\varphi,\tilde{\varphi})$.

Đặt toán tử

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin^7\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^7\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\hat{L}^2}{4\sin^2\theta/2} + \frac{\hat{J}^2}{4\cos^2\theta/2} \qquad (14)$$

là toán tử mô-men động lượng toàn phần mở rộng, ta viết lại phương trình Schrodinger:

$$\left\{-\frac{1}{2r^8}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^8\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\Lambda}^2}{2r^2} - \frac{\mathbf{Z}}{r} - E\right\}\Psi(r,\theta,\varphi,\tilde{\varphi}) = 0\ . \qquad (15)$$

Ta thấy phương trình (15) có sự phân li biến số giữa r,θ và nhóm các góc $(\varphi,\tilde{\varphi})$. Điều này cho phép ta tìm nghiệm giải tích chính xác cho bài toán MICZ-Kepler 9 chiều.

4. Thành phần hàm sóng theo nhóm các góc $(\varphi,\tilde{\varphi})$

Theo phép biến đổi (8), dạng tường minh của toán tử $\hat{L}^2$ được viết như sau

$$-\hat{L}^2 = \Delta_\varphi = \sum_{m=1}^{7}\left(\prod_{j=m+1}^{7}\frac{1}{\sin^2\varphi_j}\right)\frac{1}{\sin^{m-1}\varphi_m}\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\left(\sin^{m-1}\varphi_m\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\right)$$

Dạng tường minh của toán tử $\hat{Q}^2$ có thể lấy từ biểu thức trên bằng việc thay $\varphi \to \tilde{\varphi}$. Vì vậy, chỉ cần tìm hàm riêng và trị riêng của $\hat{L}^2$ ta có thể suy ra nghiệm của $\hat{Q}^2$ và ngược lại. Một điều dễ dàng nhận thấy ở các các số hạng trong toán tử $\hat{L}^2$ là các đạo hàm theo các biến số góc ở các số hạng là độc lập nhau nên hàm riêng của $\hat{L}^2$ là tích các hàm theo các góc độc lập $D(\varphi) = \prod_{j=0}^{6}\Phi_j(\varphi_j)$.

Tác động $\hat{L}^2$ lên $D(\varphi)$ và tiến hành tách biến ta được 7 phương trình vi phân bậc hai theo góc $\varphi_j\ (j = 1,..,7)$, trong đó phương trình hàm sóng $\Phi_0(\varphi_0)$ là khác dạng so với các hàm sóng $\Phi_j(\varphi_j)\ (j = 1,..,6)$.

$\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0^2}\Phi_0\left(\varphi_0\right)=-l_0^2\Phi_0\left(\varphi_0\right)$, với nghiệm $\Phi_0\left(\varphi_0\right)=\exp\left(il_0\varphi_0\right)$, l_1 là số nguyên.

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\varphi_j{}^2}-j\cot\varphi_j\frac{\partial}{\partial\varphi_j}+\frac{l_{j-1}(l_{j-1}+j-1)}{\sin^2\varphi_j}\right)\Phi_j(\varphi_j)=l_j(l_j+j)\Phi_j(\varphi_j) \tag{16}$$

với $j=1,..,6$ và l_j là số bất kì. Các phương trình (16) có cùng dạng:

$$\left(\frac{1}{\sin^{2d+1}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin^{2d+1}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-\frac{a\left(a+d\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{b\left(b+d\right)}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)\Phi=-c\left(c+2d+1\right)\Phi \tag{17}$$

với $a=b=l_{j-1}/2$. $d=\left(j-1\right)/2, a=b=l_{j-1}/2, c=l_j$

Giải phương trình (17), ta được phương trình siêu bội có nghiệm là đa thức Gegenbauer hoặc đa Legendre liên kết loại 1 [14]

$$\Phi_j\left(\varphi_j\right)=\sqrt{\frac{(c+d)(c+2a+2d)}{(c-2a)!}}\sin^{-d/2}\varphi_jP_{c+d/2}^{-2a-d/2}\left(\cos\varphi_j\right)$$

với điều kiện các chỉ số lượng tử l_j phải là các số nguyên thỏa mãn $\left|l_0\right|\le l_1\le\ ...\ \le l_6\equiv L$.

Kết hợp lại ta có hàm riêng của toán tử $\hat{L}^2$ là hàm cầu bảy chiều suy rộng:

$$D_{l_1,\dots,l_5}^{L,m_l}\left(\varphi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im_l\varphi_0)\prod_{j=1}^{6}\Phi_j\left(\varphi_j\right) \tag{18}$$

ứng với trị riêng là $L\left(L+6\right)$ (*L=0,1,2,...*). Ở đây, chỉ số lượng tử l_0 khác chỉ số lượng tử khác, nó là số nguyên và là nghiệm riêng của toán tử $\hat{L}_{12}$, ta có thể xem nó như số lượng tử từ. Từ đây để phân biệt ta kí hiệu $l_0\equiv m_l$: $-l_1\le m_l\le l_1$.

Dạng tường minh của toán tử $\hat{Q}^2$ tương tự như $\hat{L}^2$ bằng việc thay $\varphi\to\tilde{\varphi}$. Giải tương tự ta có được hàm riêng

$$D_{q_1,\dots,q_5}^{Q,m_q}\left(\tilde{\varphi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im_q\tilde{\varphi}_0)\prod_{j=1}^{6}\Phi_j\left(\tilde{\varphi}_j\right) \tag{19}$$

với trị riêng $Q\left(Q+6\right)$. Ở đây ta kí hiệu $q_6\equiv Q, q_0\equiv m_q$ với miền biến đổi của các chỉ số lượng tử là: $Q=0,1,2,...; q_1,q_2,...,q_5$ là các số nguyên không âm thỏa điều kiện $0\le q_1\le q_2\le q_3\le q_4\le q_5\le Q$; m_q là số nguyên thỏa điều kiện $-q_1\le m_q\le q_1$.

Xây dựng hàm riêng của toán tử $\hat{J}^2$ và $\hat{J}_{12}$ trong đó không có sự tách biến giữa hai nhóm biến số $\{\varphi\}$ và $\{\tilde{\varphi}\}$. Việc xây dựng hàm sóng thế này hoàn toàn tương tự như đã làm cho việc cộng mô-men quỹ đạo trong các không gian thấp chiều hơn. Ta viết hàm sóng dưới dạng tổ hợp của tích của hàm sóng (18) với hàm sóng (19):

$$\Omega_{Jj_5j_4j_3j_2j_1m_j}\left(\varphi_s,\tilde{\varphi}_s\right)=\sum_{\substack{Ll_5\ldots l_1m_l\\ Qq_5\ldots q_1m_q}} C^{Jj_5j_4j_3j_2j_1m_j}_{Ll_5l_4l_3l_2l_1m_l,Qq_5q_4q_3q_2q_1m_q} D^{Lm_l}_{l_5l_4l_3l_2l_1}\left(\varphi_s\right) D^{Qm_q}_{q_5q_4q_3q_2q_1}\left(\tilde{\varphi}_s\right), \tag{20}$$

và tìm các hệ số $C^{Jj_5j_4j_3j_2j_1m_j}_{Ll_5l_4l_3l_2l_1m_l,Qq_5q_4q_3q_2q_1m_q}$ sao cho (20) là hàm riêng của $\hat{J}^2$ ứng với trị riêng là $J\left(J+6\right)$. Ta thấy với cách xây dựng như trên thì (25) vẫn là hàm riêng của toán tử $\hat{L}^2$ và $\hat{Q}^2$ ứng với trị riêng $L\left(L+6\right)$ và $Q\left(Q+6\right)$ tương ứng. $C^{Jj_5j_4j_3j_2j_1m_j}_{Ll_5l_4l_3l_2l_1m_l,Qq_5q_4q_3q_2q_1m_q}$ là hệ số Clebsh-Gordan, quy trình xây dựng nó được đưa ra trong [11] cho việc cộng mô-men trong không gian nhiều chiều bất kì ứng với nhóm quay SO(n). Ta sẽ không lập lại các tính toán đó cho nhóm SO(8) cho hàm cầu 7 chiều (10) mà chỉ giới hạn trong việc xác định các chỉ số lượng tử. Các chỉ số lượng tử thỏa mãn điều kiện sau [11]:

$$\begin{cases} m_j=m_l+m_q; \\ j_1=\left|l_1-q_1\right|,\left|l_1-q_1\right|+1,\left|l_1-q_1\right|+2,\ldots,l_1+q_1; \\ j_2=\left|l_2-q_2\right|,\left|l_2-q_2\right|+2,\left|l_2-q_2\right|+4,\ldots,l_2+q_2; \\ j_3=\left|l_3-q_3\right|,\left|l_3-q_3\right|+2,\left|l_3-q_3\right|+4,\ldots,l_3+q_3; \\ j_4=\left|l_4-q_4\right|,\left|l_4-q_4\right|+2,\left|l_4-q_4\right|+4,\ldots,l_4+q_4; \\ j_5=\left|l_5-q_5\right|,\left|l_5-q_5\right|+2,\left|l_5-q_5\right|+4,\ldots,l_5+q_5; \\ J=\left|L-Q\right|,\left|L-Q\right|+2,\left|L-Q\right|+4,\ldots,L+Q. \end{cases} \tag{21}$$

5. Thành phần hàm sóng theo góc cực θ

Bây giờ ta xét phương trình (13) và tính đến sự phân li biến số. ta thấy rằng các thành phần đạo hàm theo các biến số r,θ ở các số hạng độc lập nhau nên hàm sóng là tích hai hàm độc lập theo r và θ. Do đó, có thể viết $\Psi(r,\theta,\varphi,\tilde{\varphi})=R(r)\,Z(\theta)\,\Omega_{J,m_j,j_1,\ldots,j_5}(\varphi\tilde{\varphi})$ thế vào phương trình (13) ta có 2 phương trình sau:

$$\left(\frac{1}{\sin^7\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^7\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{L'(L'+3)}{\sin^2(\theta/2)}-\frac{J'(J'+3)}{\cos^2(\theta/2)}\right)Z(\theta)=-\lambda(\lambda+7)Z(\theta) \tag{22}$$

$$\left(\frac{1}{r^8}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^8\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\lambda(\lambda+7)}{r^2}+2\left(E+\frac{\mathbf{Z}}{r}\right)\right)R(r)=0 \tag{23}$$

với $-\lambda(\lambda+7)$ là hệ số tách biến cũng là trị riêng của $\hat{\Lambda}^2$

Bây giờ ta tiến hành giải lần lượt các phương trình (22), (23) để tìm các hàm sóng $R(r), Z(\theta)$. Đầu tiên ta sẽ giải phương trình (22) để tìm hàm sóng $Z(\theta)$. Để giải phương trình này, ta đặt một biến số mới $y=(1-\cos\theta)/2$ và viết $Z(\theta)$ dưới dạng:

$$Z(\theta)=C_{\lambda LJ}\,y^{L'}(1-y)^{J'}W(y) \tag{24}$$

trong đó, $C_{\lambda LJ}$ là hệ số chuẩn hóa.

Thế (24) mới vào phương trình (22), ta được phương trình siêu bội

$$y(1-y)\frac{d^2W}{dy^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)y]\frac{dW}{dy}-\alpha\beta W=0 \tag{25}$$

có nghiệm là hàm siêu bội $W(y)={}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,y)$ với $\alpha=-\lambda+L'+J'$, $\beta=\lambda+L'+J'+7$, $\gamma=2L'+4$. Để hàm *W(y)* là hàm hội tụ thì

$$\alpha=-\lambda+L'+J'=-n_\theta,\ n_\theta=0,1,2...$$

suy ra $\lambda=n_\theta+L'+J'$ $\left(\lambda=L'+J', L'+J'+1,...\right)$. Với điều kiện này thì λ là số nguyên hoặc bán nguyên phụ thuộc vào L', J'.

Tiếp tục đặt $a=2J'+3, b=2L'+3$ thì hàm $W(y)$ được viết như sau:

$$W(\cos\theta)={}_2F_1\left(-n_\theta, n_\theta+a+b+1, a+1, \frac{1-\cos\theta}{2}\right)=\frac{n_\theta!\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)}P_{n_\theta}^{(a,b)}(\cos\theta)$$

trong đó $P_{n_\theta}^{(a,b)}(\cos\theta)$ là đa thức Jacobi. Để tính hệ số chuẩn hóa, ta sử dụng tính chất sau của đa thức Jacobi

$$\int_{-1}^{1}(1-y)^a(1+y)^b P_n^{(a,b)}(y)P_{n'}^{(a,b)}(y)dy=\frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1}\frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{n!\,\Gamma(n+a+b+1)}\delta_{nn'}$$

với điều kiện chuẩn hóa:

$$\int_0^{\pi}Z_{\lambda LJ}(\theta)Z^*_{\lambda' LJ}(\theta)\sin^7\theta d\theta=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{26}$$

ta tìm được hệ số chuẩn hóa $C_{\lambda LJ}$. Cuối cùng ta có được thành phần hàm sóng theo góc θ như sau:

$$Z_{\lambda LJ}(\theta)=\sqrt{\frac{2\lambda+7}{2^{2J'+2L'+7}}\frac{(\lambda-J'-L')!\Gamma(\lambda+J'+L'+7)}{\Gamma(\lambda+J'-L'+4)\Gamma(\lambda-J'+L'+4)}} \times\left(1-\cos\theta\right)^{L'}\left(1+\cos\theta\right)^{J'}P^{(2J'+3,2L'+3)}_{\lambda-J'-L'}(\cos\theta) \tag{27}$$

6. Thành phần hàm sóng theo bán kính r và năng lượng của bài toán

Để giải phương trình (23) tìm thành phần hàm sóng theo bán kính r và năng lượng của bài toán MICZ-Kepler, ta đặt biến số mới $z=2\sqrt{-2E}r$ và viết lại hàm theo bán kính như sau:

$$R(r)=r^{\lambda}e^{-\sqrt{-2E}r}f(r) \tag{28}$$

Lúc này, phương trình (22) trở thành phương trình siêu bội theo *f(z)* như sau:

$$z\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}+(8+2\lambda-z)\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\left(\lambda+4-\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{-2E}}\right)f(z) \tag{29}$$

Nghiệm của phương trình trên của là hàm siêu bội:

$$f(z)={}_1F_1(\lambda+4-\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{-2E}},8+2\lambda,z) \tag{30}$$

khi $z\to\infty$, để hàm *f* hội tụ thì $\lambda+4-\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{-2E}}=-n_r,\qquad n_r=0,1,2,...$

Ta suy ra được năng lượng của bài toán MICZ-Kepler chín chiều hoàn toàn phù hợp với với công trình [15]:

$$E=\frac{-\mathbf{Z}^2}{2\left(N/2+4\right)^2}\quad \text{với}\quad \frac{N}{2}=n_r+n_\theta+J'+L'=n_r+\lambda\text{ , }N=0,1,2,.. \tag{31}$$

Thành phần hàm sóng theo bán kính $R(r)$ được viết tường minh:

$$R_{N\lambda}(r)=C_{N\lambda}r^{\lambda}e^{-\sqrt{-2E}r}\,{}_1F_1(-N/2+\lambda,8+2\lambda,2\sqrt{-2E}r)$$

Với điều kiện chuẩn hóa hàm sóng

$$\int_0^\infty R_{N\lambda}(r)R_{N'\lambda}(r)r^8dr=\delta_{NN'}$$

Áp dụng tính chất của hàm siêu bội trong [10]:

$$\int_0^\infty e^{-kz}z^{\nu-1}\left[F(-n,\gamma,kz)\right]^2dz=\frac{\Gamma(\nu)n!}{k^\nu\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\times\left\{1+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n(n-1)...(n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s)...(\gamma-\nu+s)}{\left[(s+1)!\right]^2k^\nu\gamma(\gamma+1)...(\gamma+s)}\right\}$$

Ta tính được hệ số chuẩn hóa của hàm bán kính:

$$C_{N\lambda} = \frac{16\mathbf{Z}^{9/2}}{(N/2+4)^5(2\lambda+7)!}\sqrt{\frac{(N/2+\lambda+7)!}{(N/2-\lambda)!}}. \tag{32}$$

7. Kết luận và hướng phát triển

Bài toán MICZ-Kepler chín chiều đã được chúng tôi tìm lời giải chính xác cho hàm sóng và năng lượng bằng việc tách hàm sóng thành các hàm thành phần chỉ theo bán kính r, theo góc phương vị θ và theo tổ hợp của hai bộ hàm cầu suy rộng bảy chiều. Bài toán còn nhiều vấn đề để khảo sát như: giải bài toán trong các hệ trục tọa độ khác, xác định hàm sóng và năng lượng của bài toán bằng lí thuyết nhóm thông qua các toán tử Casimir, tính chất siêu khả tích của bài toán. Đây chính là nội dung chúng tôi sẽ nghiên cứu trong các công trình tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. Hurwitz (1898), "Uber die Zahlentheorie der Quaternionen" *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl.* (71), pp.309-316.
2. A. Higuchi (1987), "Symmetric tensor spherical harmonics on the Nsphere and their application to the de Sitter group SO(N,1)", *J. Math. Phys.* (28), pp.1553-1566.
3. B. A. Bernevig, J. Hu, N. Toumbas, S. C. Zhang (2003), "Eight-Dimensional Quantum Hall Effect and "Octonions"", *Phys. Rev. Lett.* (91), pp.236803-4.
4. E. G. Kalnins, W. Miller, G. S. Pogosyan (2000), "Coulomb-oscillator duality in spaces of constant curvature", *J. Math. Phys.* (41), pp.2629-2657.
5. G. Meng (2007), "MICZ-Kepler problems in all dimensions", *J. Math. Phys.* (48), pp.032105-14.
6. G. Meng. R. Zhang (2011), "Generalized MICZ-Kepler Problems and Unitary Highest Weight Modules", *J. Math. Phys.* (52), pp.042106-23.
7. H. V. McIntosh and A. Cisneros (1970), "Degeneracy in the Presence of a Magnetic Monopole", *J. Math. Phys.* (11), pp.896-916.
8. H. Hopf (1935), "Uber die Abbildungen von Spharen auf Spharen niedrigerer Dimension, *Fund. Math.* (25), pp.427-440.
9. I. Marquette (2012), "Generalized five-dimensional Kepler system,Yang-Coulomb monopole, and Hurwitz transformation" *J. Math. Phys.* (53), pp.022103-12.
10. L. D. Landau and Lifshitz E. M. (1989), *Quantum mechanics: Non-relativistic theory*, Pergamon Press, Oxford.
11. S. Aliˇsauskas (2002), "Coupling coefficients of SO(n) and integrals involving Jacobi and Gegenbauer polinomials", *J. Phys. A* (35), pp.7323-23.
12. Ngoc-Hung Phan, Van-Hoang Le (2012), "Generalized Runge-Lenz vector and ninedimensional MICZ-Kepler problem", *J. Math. Phys.* (53), pp.082103-7.

13. Van-Hoang Le, Thanh-Son Nguyen, Ngoc-Hung Phan (2009), "A Hidden Non-Abelian Monopole in a 16-Dimensional Isotropic Harmonic Oscillator", *J. Phys. A* (42), pp.175204-8.
14. Van-Hoang Le, Thanh-Son Nguyen (2011), "A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac and Yang monopoles for a nine-dimensional space", *J. Math. Phys.* (52), pp.032105-11.
15. Van-Hoang Le, Thanh-Tu Phan, Cat-Tuong Truong (2011), "On the SO(10,2) dynamical sysmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine – dimensional space", *J. Math. Phys.* (52), pp.072101-5.
16. Zwanziger (1968), "Exactli Soluble Nonrelativistic Model of Particles with Both Electric and Magnetic Charges" *Phys. Rev.* (176), pp.1480-1488.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 30-10-2013; ngày phản biện đánh giá: 04-3-2014; ngày chấp nhận đăng: 16-5-2014)