MÔ HÌNH HÓA TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

LÊ THỊ HOÀI CHÂU*

TÓM TẮT

Các khái niệm liên quan đến vấn đề mô hình hóa trong dạy học Toán được giới thiệu tóm lược ở phần đầu bài báo. Để tổ chức dạy học một tri thức theo cách tiếp cận mô hình hóa, yếu tố đầu tiên cần tính đến là nghĩa của tri thức này, tức là những vấn đề mà việc giải quyết đòi hỏi phải có sự can thiệp của tri thức đó. Phần thứ hai của bài báo dành cho việc làm rõ các nghĩa khác nhau liên kết trong khái niệm đạo hàm. Trong thực tế, những nghĩa đó có được học sinh huy động khi họ đứng trước một tình huống ngoài toán học hay không? Câu trả lời sẽ tìm thấy trong nghiên cứu thực nghiệm mà chúng tôi trình bày ở phần cuối của bài báo. Kết quả thu được từ bài báo sẽ cho thấy những yếu tố cần tính đến khi dạy học khái niệm đạo hàm theo cách tiếp cận mô hình hóa.

***Từ khóa*:** mô hình hóa, đạo hàm, vận tốc tức thời, tiếp tuyến, xấp xỉ afine.

ABSTRACT

Modeling in teaching the concept of derivative

The concepts related to modeling in mathematics teaching are introduced in the first part of this paper. To organize the teaching activity for a knowledge module following the modeling approach, the first factor to take into account is the significance of this knowledge, that is, the problem to which the solution requyres the intervention of such knowledge. The second part of the article is devoted to clarify the different meanings associated to derivative concept. In fact, are these meanings utilized by students in a situation beyond mathematics or not? The answer will be found in empirical studies presented at the end of the article. The results obtained from the paper will identify the factors to consider when teaching the concept of derivative following the modeling approach.

Keywords: modeling, dérivative, instantaneous velocity, tangent, approximately affine.

Toán học bắt nguồn từ thực tiễn, và mọi lí thuyết toán học dù trừu tượng đến đâu cũng đều tìm thấy ứng dụng của chúng trong thực tiễn (từ "thực tiễn" ở đây được dùng theo nghĩa rộng, bao gồm cả thực tế cuộc sống lẫn các khoa học khác). Thế nhưng, xu hướng đặt mục tiêu dạy học (DH) Toán vào việc cung cấp những kiến thức phổ thông, rèn luyện kĩ năng giải một số dạng toán tiêu biểu gắn liền với chúng đã khiến cho kiến thức toán dạy ở nhà trường trở nên hình thức, khô khan, không mấy hấp dẫn và bổ ích đối với đại đa số học sinh (HS).

Nhận thấy bất cập này, chương trình giảng dạy Toán ở nhiều nước trên thế giới từ mấy thập niên qua đã chú trọng đến mục tiêu phát triển năng lực sử dụng một cách sáng tạo những kiến thức và kĩ năng toán học khác nhau vào việc giải quyết các vấn đề

* PGS TS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP TPHCM

đa dạng do thực tiễn đặt ra. Những chương trình cũng như những kiểu DH thiên về kiến thức hàn lâm, xa rời thực tiễn đang dần dần bị loại bỏ.

1. Mô hình hóa toán học

Để sử dụng kiến thức và kĩ năng toán vào việc giải quyết một vấn đề của thực tiễn, người ta phải trải qua các bước của quá trình mô hình hóa toán học – quá trình chuyển vấn đề thuộc lĩnh vực ngoài toán học thành vấn đề của toán học, rồi sử dụng các công cụ toán để tìm câu trả lời cho vấn đề được đặt ra ban đầu. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày ngắn gọn một vài khái niệm cơ bản liên quan đến quá trình mô hình hóa toán học.

1.1. Hệ thống và mô hình

Nói về quá trình mô hình hóa toán học, Chevallard (1989) xuất phát từ hai khái niệm *hệ thống* và *mô hình* - của hệ thống này. Ông lấy lại định nghĩa nêu trong Encyc1opaedia universalis, theo đó thì mỗi *hệ thống* là một tập hợp các phần tử với những tác động qua lại giữa chúng, mà những tác động này phải tuân theo một số nguyên lí hay quy tắc nào đó đặc trưng cho hệ thống này.

Mô hình là một mẫu, một đại diện, một minh họa được thiết kế để mô tả cấu trúc của hệ thống, cách vận hành của một hoặc các sự vật, hiện tượng thuộc hệ thống này. Người ta thường sử dụng khái niệm mô hình với hai nghĩa khác nhau.

Theo nghĩa thứ nhất, mô hình là một bản sao, một ví dụ, có những tính chất đặc trưng cho sự vật gốc mà mô hình đó biểu diễn. Với nghĩa này thì các khối cầu, chóp, nón (cụ thể, vật chất) được sử dụng trong DH hình học là những mô hình của các khái niệm hình cầu, hình chóp, hình nón. Hay tập hợp R^2 với hai phép toán được định nghĩa như sau:

$$\forall\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathrm{R}^2, \forall \alpha\ \in R:$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha\ (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

là một mô hình của không gian vectơ trừu tượng định nghĩa trong Đại số tuyến tính.

Theo nghĩa thứ hai thì mô hình là một biểu diễn cho các phần quan trọng của một hệ thống (có sẵn hoặc sắp được xây dựng) với mục đích nghiên cứu hệ thống đó. Nói cách khác, mô hình là cái thu được từ việc diễn đạt theo một ngôn ngữ nào đó các đặc trưng chủ yếu của một tình huống, một hệ thống mà người ta cần nghiên cứu. Cách biểu diễn này tuân theo một tập hợp các quy tắc nào đó. Khi các quy tắc ấy là quy tắc toán học thì một mô hình toán học đã được tạo ra.

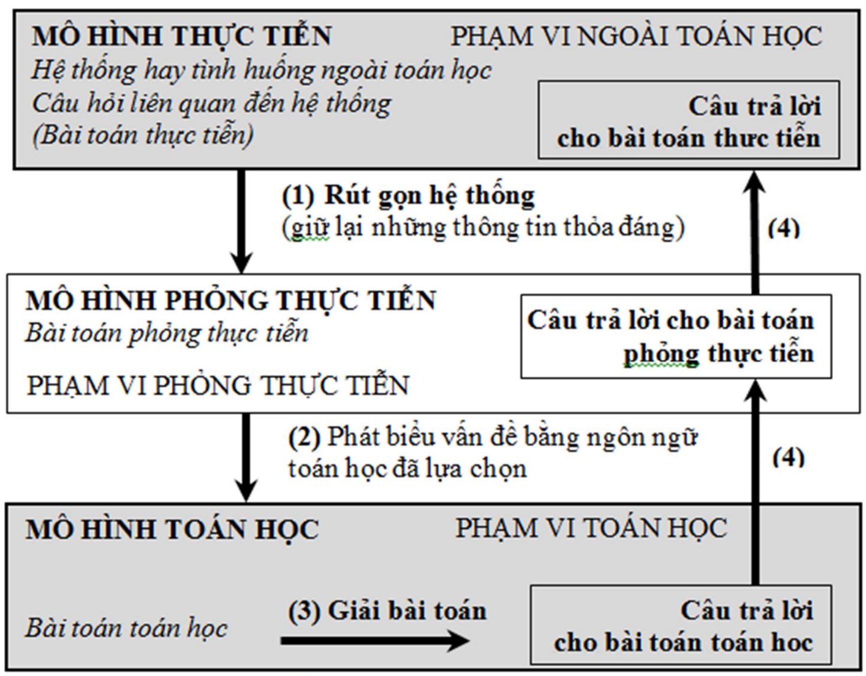
Bài báo này sử dụng thuật ngữ mô hình theo nghĩa thứ hai.

1.2. Mô hình hóa toán học

Mô hình toán học là sự giải thích bằng toán học cho một hệ thống ngoài toán học với những câu hỏi xác định mà người ta đặt ra trên hệ thống này. Quá trình mô hình hóa toán học là quá trình thiết lập một mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề trong mô hình đó, rồi thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Trong phần còn lại của bài viết, để ngắn gọn, chúng tôi sẽ dùng thuật ngữ *mô hình hóa* thay cho *mô hình hóa toán học.*

Nói về quá trình mô hình hóa, L. Coulange (1997) phân biệt ba khái niệm khác nhau: bài toán thực tiễn (problème concret), bài toán phỏng thực tiễn (problème pseudo –concret) và bài toán toán học (problème mathématique) (tham khảo [3], Lê Văn Tiến, 2005, tr. 93). Với ba khái niệm này, L. Coulange (1997) đưa vào các thuật ngữ *mô hình thực tiễn, mô hình phỏng thực tiễn, mô hình toán học,* và chia quá trình mô hình hóa thành 4 bước.

Phỏng theo Coulange (1997), chúng tôi đưa ra dưới đây sơ đồ tóm lược các bước của quá trình mô hình hóa:



Sơ đồ. *Quá trình mô hình hóa*

Chúng tôi cụ thể hóa 4 bước của quá trình mô hình hóa như sau:

Bước 1. Xây dựng mô hình phỏng thực tiễn của vấn đề, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất trong hệ thống và xác lập những quy luật mà chúng ta phải tuân theo.

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình phỏng thực tiễn. Lưu ý là ứng với vấn đề đang xem xét có thể có nhiều mô hình toán học khác nhau, tùy theo chỗ các yếu tố nào của hệ thống và mối liên hệ nào giữa chúng được xem là quan trọng.

Bước 3. Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành ở bước hai.

Bước 4. Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong bước ba. Ở đây, người ta phải xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả tính toán với vấn đề thực tế. Nếu kết quả không thể chấp nhận được thì phải lặp lại quá trình để tìm câu trả lời phù hợp cho bài toán ban đầu.

1.3. Mô hình hóa trong dạy học toán

Vấn đề là phải bồi dưỡng cho HS năng lực giải quyết các vấn đề của thực tiễn bằng những kiến thức toán mà họ thu nhận được. Việc gắn DH Toán với giải quyết các vấn đề của thực tiễn mang lại nhiều lợi ích. Trước hết nó giúp HS hiểu nghĩa của tri thức học được, lí do tồn tại và lợi ích của nó cho cuộc sống cá nhân cũng như xã hội. Sau đó, quan điểm DH gắn với mô hình nó có thể tạo hứng thú học tập, rèn luyện năng lực tư duy cho HS.

Nói về mô hình hóa trong DH Toán, tác giả Lê Văn Tiến (2005) phân biệt hai khái niệm *DH mô hình hóa* và *DH bằng mô hình hóa*.

> DH mô hình hóa là dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học của thực tiễn, nhắm tới trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn.
>
> [...] Quy trình DH có thể là: *DH tri thức toán học lí thuyết → Vận dụng các tri thức này vào việc giải các bài toán thực tiễn và do đó vào việc xây dựng mô hình của thực tiễn*. (Lê Văn Tiến, 2005, tr. 96)

Về mặt sư phạm, quy trình này làm mất đi vai trò động cơ của bài toán thực tiễn. Về mặt khoa học luận, nó làm mất đi nguồn gốc thực tiễn của tri thức toán học. Quy trình DH bằng mô hình hóa cho phép khắc phục khiếm khuyết này.

> Vấn đề là dạy học Toán thông qua DH mô hình hóa. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các bài toán thức tiễn. Quy trình DH tương ứng có thể là: *Bài toán thực tiễn → Xây dựng mô hình toán học → Câu trả lời cho bài toán thực tiễn → Tri thức cần giảng dạy → Vận dụng tri thức này vào giải các bài toán thực tiễn*. (Lê Văn Tiến, 2005, tr. 96)

Những cơ sở lí luận trình bày ở trên dẫn ta đến chỗ phải thừa nhận tính cần thiết tất yếu của một nghiên cứu khoa học luận về nghĩa của tri thức cần dạy (nguồn gốc nảy sinh, lí do tồn tại của tri thức, những vấn đề mà nó cho phép giải quyết, v.v...) đối với việc tổ chức DH theo cách tiếp cận mô hình hóa.

2. Nghĩa của khái niệm đạo hàm

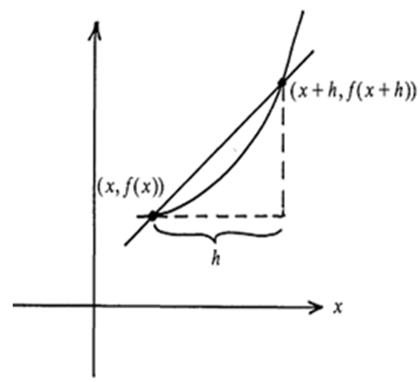
Thuật ngữ *đạo hàm* mà chúng tôi nói đến trong bài báo này dùng để chỉ *đạo hàm bậc nhất của hàm số tại một điểm thuộc tập xác định*.

2.1. Những bài toán cơ bản là nguồn gốc hình thành khái niệm đạo hàm

Có hai bài toán cơ bản là nguồn gốc làm nảy sinh khái niệm đạo hàm, một thuộc lĩnh vực Hình học và một đến từ Vật lí.

Bài toán hình học: *xác định tiếp tuyến của đường cong*

Nếu như trước đây, nhiều bài toán của Đại số chỉ có thể được giải quyết nhờ các công cụ và phương pháp của Hình học, thì kể từ thế kỉ XVI, với hệ thống kí hiệu do Viète đề nghị vào năm 1591, Đại số đã tách khỏi Hình học, phát triển một cách độc lập với những phương pháp có sức mạnh lớn lao. Nhận thấy sức mạnh ấy, Descartes và Fermat đã khai thác nó vào nghiên cứu Hình học bằng việc xây dựng nên *Hình học giải tích*. Sự ra đời của Hình học giải tích khiến cho vấn đề nghiên cứu nhiều đường cong phức tạp trở nên dễ dàng hơn. Bài toán tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kì cũng được đặt ra. Bài toán này chỉ được các nhà toán học thời kì trước giải quyết đối với một số đường đặc biệt (đường tròn, đường conic, đường xoắn ốc Archimedes) bằng công cụ của hình học cổ điển. Tuy nhiên, với hàng loạt những đường cong mới xuất hiện, bài toán xác định tiếp tuyến đòi hỏi một phương pháp tổng quát hơn.



Khái niệm tiếp tuyến lúc này được hiểu theo những quan niệm mới như là vị trí "tới hạn" của cát tuyến hay đường thẳng trùng với một phần vô cùng nhỏ với đường cong tại tiếp điểm. Chính từ quan niệm "vị trí tới hạn" này mà hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong *y = f(x)* được định nghĩa (theo ngôn ngữ ngày nay) bởi biểu thức $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

Bài toán vật lí: *tìm vận tốc tức thời*

Thừa nhận rằng có thể xem vận tốc tức thời v_{tt} của vật thể có phương trình chuyển động *s = S(t)* là giới hạn của vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $(t, t+\Delta t)$ khi $\Delta t \to 0$, Newton cũng đã đi đến biểu thức xác định v_{tt} (có cùng bản chất với biểu thức xác định hệ số góc của tiếp tuyến) mà theo ngôn ngữ ngày nay ta viết là:

$$v_{tt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = S'(t).$$

2.2. Những nghĩa khác nhau của khái niệm đạo hàm

Đạo hàm – hệ số góc của tiếp tuyến

Đây là nghĩa hình học của khái niệm đạo hàm. Nhờ khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm, người ta trả lời được câu hỏi *tồn tại hay không tiếp tuyến của đường cong tại điểm này* và nếu tồn tại thì đó là đường thẳng nào, dựng nó ra sao. Câu trả lời cho câu hỏi ấy trong trường hợp một đường cong bất kì khó mà tìm thấy với các công cụ của hình học thuần túy.

Đạo hàm - tốc độ biến thiên của hàm số

Phương pháp giải bài toán tìm vận tốc tức thời cũng được Newton vận dụng để giải nhiều bài toán khác của vật lí. Năm 1687, trong cuốn sách nổi tiếng nhất của mình *Những nguyên lí toán học của triết học tự nhiên* Newton đã phát biểu ba định luật quan trọng về chuyển động, trong đó định luật thứ hai cho thấy mọi thay đổi về trạng thái chuyển động đều được gây ra bởi lực tác động lên vật, và mối quan hệ giữa lực với chuyển động tuân theo quy tắc: lực tác động tỉ lệ với đạo hàm cấp hai của hàm tọa độ chất điểm. Lúc này, nếu biết trước lực tác động thì người ta có thể tính toán được quỹ đạo cũng như dự đoán trước được tương lai của một sự kiện. Những nghiên cứu của Newton đã khiến đạo hàm mang lại một quyền lực lớn lao cho các nhà vật lí.

Từ cái nhìn của vật lí, Newton đi đến ý tưởng xây dựng Giải tích học trên cơ sở của "chuyển động", trong đó đạo hàm được định nghĩa như là tốc độ biến thiên tức thời của một đại lượng nào đó theo "thời gian". "Thời gian" ở đây không chỉ hiểu theo nghĩa đen, mà theo nghĩa tổng quát, là một biến bất kì x nào đó biến thiên đều theo thời gian, nghĩa là sao cho $(x)'=1$. Ý tưởng của Newton đã mang lại cho đạo hàm một đặc trưng rất trực quan và hữu ích: đạo hàm là thước đo tốc độ biến thiên của hàm số so với tốc độ biến thiên của đối số. Quan niệm này đã mở đường cho những ứng dụng ồ ạt, mạnh mẽ và vô cùng hiệu quả của đạo hàm nói riêng, Giải tích nói chung, trong việc giải quyết nhiều vấn đề khác nhau của vật lí cũng như toán học, để rồi từ đó mở rộng ra các lĩnh vực khác của thực tiễn. Chẳng hạn, với đạo hàm, người ta đã giải quyết được vấn đề nghiên cứu sự biến thiên, cực trị của các hàm số, và ứng dụng đó đã được sử dụng cho các hiện tượng của kinh tế học, xã hội học...

Chúng tôi gọi đây là *nghĩa vật lí* của khái niệm đạo hàm. Cần phải nói rõ rằng tính từ *vật lí* trong trường hợp này muốn nói đến lĩnh vực vốn là một nguồn gốc của khái niệm đạo hàm. Nó không có nghĩa là chỉ giới hạn cho vận tốc của các chuyển động cơ học. Theo nghĩa vật lí này, đạo hàm phản ánh *tốc độ biến thiên* của một hàm số so với tốc độ biến thiên của biến số x khi $x \to x_0$.

Đạo hàm – công cụ xấp xỉ hàm số

Thế kỉ XVIII, sau khi khái niệm đạo hàm và hàm số đạo hàm đã được định nghĩa tường minh, các nhà bác học đã dùng nó để giải quyết nhiều vấn đề của vật lí và toán học. Năm 1715, Taylor đưa ra một kết quả mà ngày nay ta gọi là công thức khai triển Taylor: nếu $x = x_0 + h$, nghĩa là $h = x - x_0$ thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + O(h^n)$$

trong đó $O(h^n)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn h^n.

Công thức Taylor cho phép xấp xỉ $f(x)$ với một hàm đa thức. Trong nhiều trường hợp, việc nghiên cứu $f(x)$ trở nên dễ dàng hơn nhiều nếu ta chuyển về một hàm đa thức xấp xỉ với $f(x)$. Trường hợp đơn giản nhất, người ta có thể xấp xỉ $f(x)$ với một hàm tuyến tính (gọi là xấp xỉ affine). Nếu chuyển sang ngôn ngữ hình học thì điều này có nghĩa là phần đường cong $f(x)$ trong một lân cận (khá bé) của x có thể được xấp xỉ với một đoạn thẳng (chính là tiếp tuyến tại x). Chúng tôi gọi đây là nghĩa *công cụ xấp xỉ* của khái niệm đạo hàm.

3. Nghiên cứu thực trạng dạy học khái niệm đạo hàm

Trong một chuỗi nghiên cứu dài hơi được thực hiện từ nhiều năm qua, chúng tôi muốn tìm hiểu thực trạng DH khái niệm đạo hàm ở bậc THPT và sau đó tìm cách tác động vào thực trạng này bằng những tình huống DH có tính đến quá trình mô hình hóa. Ba câu hỏi nghiên cứu được đặt ra là:

- Nghĩa của khái niệm đạo hàm được hình thành ra sao trong các sách giáo khoa (SGK) Toán lớp 11, 12 cũng như trong thực hành DH của giáo viên?
- Sự lựa chọn của SGK và giáo viên ảnh hưởng như thế nào lên kiến thức của HS?
- Từ quan điểm tích hợp và mô hình hóa trong DH toán, nên tổ chức DH như thế nào để HS có thể có những kiến thức đầy đủ hơn về khái niệm đạo hàm?

Với khuôn khổ có hạn của bài báo, trong phần này chúng tôi chỉ trình bày một vài kết quả trả lời cho câu hỏi thứ hai.

Nghiên cứu thực trạng DH khái niệm đạo hàm đã được chúng tôi tiến hành qua nhiều thực nghiệm. Chúng tôi sẽ trích ra để trình bày ở đây một số kết quả thu được qua ba trong số những thực nghiệm đó. Trong ba thực nghiệm thì có một thuộc phạm vi đề tài nghiên cứu *Mô hình hóa trong dạy học Toán* (Lê Thị Hoài Châu, 2014) và hai thuộc khuôn khổ các luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Lí luận và Phương pháp DH Toán bảo vệ ở Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh (Bùi Anh Tuấn (2007), Ngô Minh Đức (2013)). Thực nghiệm được tiến hành dưới hình thức cho HS làm việc (cá nhân hoặc nhóm) trên các vấn đề (toán học hay ngoài toán học) được xây dựng theo những mục đích nghiên cứu khác nhau. Dưới đây chúng tôi chỉ trích ra năm trong số các vấn đề đã sử dụng cho ba thực nghiệm đó. Thuật ngữ *bài toán* được dùng để nói về các vấn đề này. Những phân tích trình bày dưới đây đều thu được qua các pha HS làm việc cá nhân.

3.1. Thực nghiệm 1

Bài toán 1. *Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x}$ *và* $x_0 = 1$.

a) Tính $f(x_0)$ *và* $f'(x_0)$.

b) Không dùng máy tính bỏ túi, ứng dụng công thức

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

để tính gần đúng (lấy đến ba chữ số thập phân) các giá trị $\sqrt{0{,}85}$ *;* $\sqrt{0{,}9}$ *;* $\sqrt{0{,}95}$ *;* $\sqrt{1{,}05}$*;* $\sqrt{1{,}1}$; $\sqrt{1{,}15}$.

c) Gọi a, b, c, d, e, f lần lượt là các giá trị gần đúng của $\sqrt{0,85}$ *;* $\sqrt{0,9}$ *;* $\sqrt{0,95}$ *;* $\sqrt{1,05}$*;* $\sqrt{1,1}$; $\sqrt{1,15}$*. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các điểm A (0,85; a), B (0,9; b), C (0,95; c), D (1,05; d), E (1,1; e) và F (1,15; f) có thẳng hàng hay không? Giải thích rõ lí do.*

(Trích từ Bùi Anh Tuấn (2007) và Lê Thị Hoài Châu (2014))

Ở đây HS dễ dàng tính được ngay $f(x_0) = 1$; $f'(x_0) = 0,5$; $\sqrt{0,85} \approx 0,925$; $\sqrt{0,9} \approx 0,95$; $\sqrt{0,95} \approx 0,975$; $\sqrt{1,05} \approx 1,025$; $\sqrt{1,1} \approx 1,05$; $\sqrt{1,15} \approx 1,075$. Sau đó, những chiến lược xét sự thẳng hàng có thể được sử dụng là:

- Chiến lược "vectơ": Dùng khái niệm hai vectơ cùng phương trong hình học giải tích để chứng minh ít nhất 4 bộ ba điểm thẳng hàng;
- Chiến lược "điểm": Vẽ 6 điểm trên lên mặt phẳng tọa độ, rồi kết luận;
- Chiến lược "đường thẳng": Viết phương trình đường thẳng qua 2 trong 6 điểm đó, sau đó kiểm chứng các điểm còn lại có nằm trên đường thẳng hay không;
- Chiến lược "tăng đều": 6 điểm đã cho có hoành độ tăng đều 0,05, còn tung độ tăng đều 0,025, nên chúng thẳng hàng;
- Chiến lược "phương trình": Từ công thức tính gần đúng, ta suy ra các điểm A, B, C, D, E và F có tọa độ thỏa mãn phương trình $y = 0,5(x-1) + 1$. Đây là phương trình của tiếp tuyến tại x_0. Vậy chúng thẳng hàng. Đây là chiến lược tối ưu của bài toán. Lưu ý rằng khi dùng chiến lược này cũng có thể HS kết luận sáu điểm đang xét thuộc đường thẳng $y = 0,5(x+1)$ mà không nhắc đến "tiếp tuyến". Vì lẽ đó tác giả Bùi Anh Tuấn gọi đây là chiến lược "phương trình".

Xét sự thẳng hàng của các điểm biết tọa độ của chúng là một kiểu nhiệm vụ quen thuộc mà HS thường gặp trong Hình học giải tích. Nhưng tọa độ các điểm ở đây đã được tác giả chọn sao cho việc giải quyết bài toán bằng các chiến lược hình học gặp nhiều khó khăn. Lí do của sự lựa chọn này là để thúc đẩy HS đến với việc sử dụng đạo hàm, hay nói chính xác hơn là phương trình tiếp tuyến, để chứng tỏ sự thẳng hàng của sáu điểm đã cho. Công thức xấp xỉ được nhắc lại (đã có trong SGK Giải tích 11), trong đó vế phải có liên quan đến phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại x_0 (một nội dung được chú trọng trong SGK cũng như trong các đề thi tốt nghiệp trung học phổ thông (THPT) hay tuyển sinh đại học) cũng là lựa chọn nhằm tạo thuận lợi cho sự xuất hiện của chiến lược "phương trình".

Bài toán 1 sẽ cho phép kiểm tra sự tồn tại hay không trong kiến thức của HS *nghĩa công cụ xấp xỉ* của đạo hàm. Sự xấp xỉ ở đây được đặt trong phạm vi hình học và gắn liền với nghĩa hình học: trong một lân cận khá bé của x_0 người ta có thể xấp xỉ đường cong với tiếp tuyến của nó tại x_0.

Bài toán 1 là một phần của thực nghiệm được thực hiện với 107 HS vừa tốt nghiệp THPT ở Cần Thơ, sau đó đã được chúng tôi nêu ra cho 49 HS lớp 12 thuộc một trường trên địa bàn TP Hồ Chí Minh. Bảng 1 dưới đây thống kê kết quả thu được.

Bảng 1. *Thống kê kết quả thực nghiệm với bài toán 2*

Chiến lược		Số lượng	
		107 HS	49 HS
Vectơ	Kết luận thẳng hàng	43	22
	Kết luận không	7	2
Đường thẳng	Kết luận thẳng hàng	10	8
	Kết luận không	0	1
Điểm	Kết luận thẳng hàng	15	3
	Kết luận không	1	1
Phương trình	Kết luận thẳng hàng	2	4
	Kết luận không	0	0
Tăng đều	Kết luận thẳng hàng	15	5
	Kết luận không	0	0
Khác		12	3
Không giải		2	0

Bảng 1 cho thấy chỉ có 2/107 và 4/49 HS sử dụng chiến lược "phương trình", dù tình huống thực nghiệm đã được thiết kế theo hướng gây trở ngại cho việc sử dụng các chiến lược hình học. Cần nói thêm rằng khi quan sát HS ở pha làm việc theo nhóm (tham khảo Lê Thị Hoài Châu, 2014), chúng tôi thấy kiểu lập luận sau đây xuất hiện ở không ít HS: "*A, B, C, D, E, F không thẳng hàng vì chúng nằm trên đường cong* $f(x) = \sqrt{x}$". Như vậy, dù tung độ các điểm đã được tính theo công thức gần đúng, HS vẫn không thiết lập được mối liên hệ giữa tình huống với công thức đã được đề cập trong DH về sự xấp xỉ affine của một hàm số. Dường như nghĩa *công cụ xấp xỉ affine* và sự *xấp xỉ hình học* của đạo hàm chưa thực sự hiện diện trong kiến thức của HS.

3.2. Thực nghiệm 2

Bài toán 2. *Trong bài "Phương trình dao động của con lắc đơn", sách giáo khoa Vật lí lớp 12 có nêu nhận xét sau: "Khi x nhỏ ($x < 1\,rad$) ta có thể coi $\sin x \approx x$". Em hãy đưa ra tất cả các lí do có thể để giải thích cho nhận xét trên.*

Bài toán 3. *Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 (chẳng hạn, nếu xét ở năm 2012 thì t = 2012 – 1970 = 42) được ước tính bởi công thức:*

$f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ *(nghìn người)*

Tính số dân của thị trấn vào năm 1990 và 2008.

Vào hai thời điểm năm 1990 và 2008, năm nào dân số của thị trấn tăng nhanh hơn ?

(Trích từ Ngô Minh Đức, 2013)

Hai bài toán trên đã được đưa ra cho 35 HS lớp 12 ở hai trường THPT địa bàn TP Hồ Chí Minh. Yêu cầu ở bài toán 2 không phải là tính gần đúng giá trị của hàm số tại một điểm, mà là giải thích một xấp xỉ hàm đã được thừa nhận trong SGK Vật lí 12.

Chiến lược tìm câu trả lời có thể là:

- Áp dụng công thức xấp xỉ affine ($f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ khi $|x - x_0|$ khá nhỏ) cho hàm số $f(x) = \sin x$ tại $x_0 = 0$.
- Áp dụng công thức $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: khi x khá nhỏ (khá gần 0) thì $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ hay $\sin x \approx x$.
- Chọn các giá trị x lần lượt ngày càng nhỏ rồi dùng máy tính bỏ túi tính giá trị sin$x$ tương ứng. Đối chiếu và chỉ ra kết luận $\sin x \approx x$ khi x khá nhỏ.
- Vẽ vòng tròn lượng giác rồi lập luận dựa vào độ dài cung AB chắn góc α và độ dài AH = sinα: Độ dài cung AB là $AB = R\alpha = \alpha$ (do R=1). Khi α khá nhỏ thì AB ≈ AH, tức là α ≈ sinα.

Giống như bài 1, bài toán 2 cũng được xây dựng để kiểm tra sự hiện diện hay không trong kiến thức của HS nghĩa *công cụ xấp xỉ* của đạo hàm, tức là tìm hiểu quan niệm của họ về mối quan hệ giữa đạo hàm với xấp xỉ affine. Tuy nhiên, khác với bài toán 1, sự xấp xỉ ở đây là xấp xỉ số thuần tùy. Chúng tôi giả định rằng so với xấp xỉ hình học thì quan niệm xấp xỉ số thuần túy này dễ có khả năng được hình thành hơn ở HS.

Câu trả lời mong đợi là sử dụng công thức xấp xỉ affine của hàm $f(x)$ – công thức hiện diện trong SGK Giải tích 12. Thế nhưng, trong thực tế thì lại không có một học sinh nào sử dụng công thức này.

Bài toán 3 vốn là bài toán có mặt trong SGK Giải tích 12 (chương trình nâng cao). Điểm thay đổi ở đây là tác giả đã bỏ đi thông báo "*Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn*" mà SGK đưa vào đề bài toán. Hơn nữa, thay vì đặt câu hỏi như SGK là "*tính tốc độ tăng dân số*" trong từng năm, tác giả yêu cầu HS so sánh xem trong hai thời điểm trên "năm nào dân số của thị trấn tăng nhanh hơn". Việc đặt ra bài toán này sẽ giúp kiểm tra xem đặc trưng tốc độ biến thiên liệu có xuất hiện hay không trong quan niệm của HS sau khi đã được học khái niệm đạo hàm.

Những chiến lược mà HS có thể sử dụng để tìm câu trả lời là:

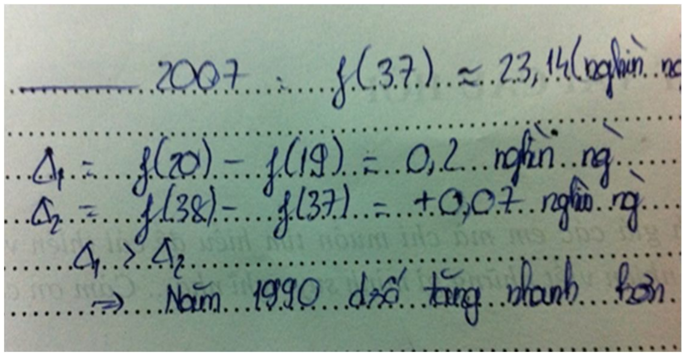
- Tính đạo hàm: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$

  Tại năm 1990, $t_1 = 1990 - 1970 = 20 \Rightarrow f'(20) = 0{,}192$

  Với năm 2008, $t_2 = 2008 - 1970 = 38 \Rightarrow f'(38) = 0{,}065$

  Do $f'(t_1) > f'(t_2)$ nên năm 1990 dân số thị trấn tăng nhanh hơn năm 2008.
- Tính lượng dân số tăng từ năm 1970 đến 1990 rồi chia đều cho số năm là 20 năm để tính trung bình. Tiến hành tương tự cho năm 2008 rồi so sánh 2 tốc độ trung bình này để kết luận (hoặc tính số dân tăng từ năm 1989 đến 1990 và số dân tăng từ 2007 đến 2008, có nghĩa là tìm số dân tăng trong một năm tính đến năm đang xét rồi so sánh để kết luận).
- Vẽ đồ thị hàm $f(t)$ rồi xem xét trên đồ thị tại hai thời điểm cần xét xem tại đâu hàm số dốc hơn (nghĩa là sẽ tăng nhanh hơn).

Kết quả thu được từ thực nghiệm cho thấy chiến lược đầu tiên (sử dụng đạo hàm) trong thực tế cũng không hề xuất hiện. Lời giải chiếm ưu thế (19/35 HS) là sử dụng chiến lược thứ hai: tính tốc độ tăng dân số trung bình rồi dựa vào tốc độ trung bình này để so sánh tốc độ tăng dân số tức thời tại hai thời điểm trên. Dưới đây là một bài giải có được từ chiến lược đó:

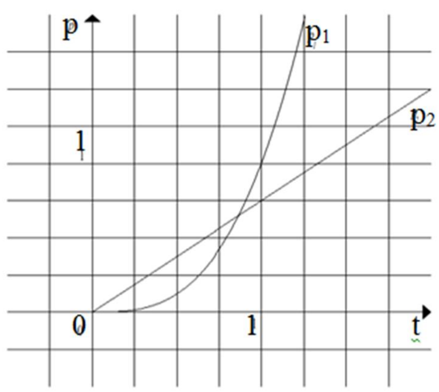


Việc đa số HS lựa chọn chiến lược này cho thấy các em biết rằng để tìm thời điểm dân số tăng nhanh hơn thì phải tính toán tốc độ tăng dân số. Khái niệm tốc độ biến thiên trung bình vẫn hiện diện trong quan niệm của học sinh. Nhưng khi cần phải xác định tốc độ biến thiên tức thời thì chiến lược đạo hàm lại không xuất hiện.

3.3. *Thực nghiệm 3*

Ở dưới là hai bài toán trích ra từ thực nghiệm gần đây nhất, được chúng tôi thực hiện với 47 HS lớp cuối lớp 11 của Trường Trung học Thực hành – Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.

Bài 4. *Hai chất điểm chuyển động thẳng trên một trục định hướng. Vị trí tương ứng p_1, p_2 của chúng trên trục phụ thuộc vào thời gian t và sự phụ thuộc đó được cho bởi hai đồ thị (p_1), (p_2) trong hình dưới.*



a) Dựa vào đồ thị, em hãy ước tính thời điểm mà hai chất điểm có cùng vận tốc.

b) Xác định thời điểm ấy bằng tính toán, biết rằng các hàm số tương ứng với hai đồ thị đó là: $p_1(t) = t^3$, $p_2(t) = \frac{3}{4}t$.

***Bài 5.** Phương trình của một chuyển động của một vật là $p = \sqrt{t}$, với p là vị trí của vật tại thời điểm t. Khi $t = 9 = 3^2$ thì ta tính được ngay vị trí của vật là $p = 3$. Nhưng tại những thời điểm mà giá trị của t không phải là số chính phương thì, nếu không có máy tính bỏ túi, ta không dễ tìm được số p biểu thị vị trí tương ứng của vật. Chẳng hạn, tại t = 8,96 ta chỉ có thể nói rằng $p \approx 3$ (vị trí của vật ở gần 3).*

a) Người ta muốn tìm một giá trị xấp xỉ (của p) biểu thị chính xác hơn vị trí thực của vật tại t = 8,96. Em hãy đề nghị một (hay nhiều) cách thức để đưa ra một giá trị như vậy. Nhớ rằng ở đây em không được sử dụng máy tính bỏ túi.

b) Cho một vật chuyển động theo theo phương trình $p = t^{17} + 3t - 1$ (p là vị trí của vật tại thời điểm t). Một người nói rằng tại t = 1,127 thì $p \approx 1$. Em hãy tìm một giá trị biểu thị chính xác hơn vị trí thực của vật tại thời điểm đó.

(Trích từ Lê Thị Hoài Châu, 2014)

Thực nghiệm 3 mà chúng tôi xây dựng được gợi lên từ nghiên cứu của J-Y Gantois và M. Schneider (2009). Hai bài toán đều đặt trong tình huống cơ học, loại tình huống được SGK Giải tích 11 ưu tiên để đưa vào khái niệm đạo hàm theo cách tiếp cận DH bằng mô hình hóa.

Để giải bài toán thứ nhất, trước hết HS phải nhận ra p_2 là một chuyển động thẳng đều và đồ thị cho thấy vận tốc của nó là $\frac{3}{4}$. Kiến thức về đạo hàm mà HS phải sử dụng ở đây là: hai chuyển động sẽ đạt cùng vận tốc tại thời điểm mà tiếp tuyến của p_1 có hệ số góc là $\frac{3}{4}$. Như vậy trong trường hợp này, HS phải có một sự liên kết hai nghĩa khác nhau của đạo hàm – nghĩa vật lí và nghĩa hình học.

Bài toán thứ hai được đưa ra để tìm hiểu xem khái niệm đạo hàm có được HS huy động khả để tìm những giá trị xấp xỉ địa phương của một hàm số hay không.

Chúng tôi chỉ trình bày tóm lược ở đây những kết quả quan sát được qua thực nghiệm. 12/47 HS không đưa ra lời giải cho bài toán 1. Trong 35 HS còn lại chỉ 13 em sử dụng đạo hàm để giải bài toán 1b, trong đó 9 em đưa ra đáp số đúng. Trong số 22 HS không sử dụng đạo hàm thì có đến 10 em tìm đáp số bằng cách giải phương trình $t^3 = \frac{3}{4}t$. Có thể giải thích là 10 HS này đã cho rằng tại thời điểm hai chuyển động có cùng vận tốc thì quãng đường đi được cũng bằng nhau. 12 HS khác khi giải câu 1a) có vẽ thêm đường thẳng song song với p_2 và "tiếp xúc" với p_1, sử dụng các tính chất hình học (định lí Pythagore) và cố gắng tìm quãng đường đi được của chất điểm chuyển động theo phương trình p_1, nhưng không đi đến kết quả.

Ta thấy ở đây HS có những khó khăn trong việc sử dụng đạo hàm để tìm vận tốc tức thời của một chuyển động trong trường hợp gián tiếp đã biết hệ số góc của tiếp tuyến, dù ý nghĩa hình học của đạo hàm là một nội dung DH được trình bày tường minh trong SGK Giải tích 11. Hai nghĩa hình học và vật lí cũng không được HS huy động ở đây trong sự gắn kết với nhau.

Đối với bài toán 5, chỉ có 11/48 HS sử dụng công thức tính gần đúng (bằng vi phân của hàm số) mà SGK Giải tích 11 đã đưa vào. Những HS còn lại hoặc là thử thực hiện phép khai căn (nhưng không thành công, vì xưa nay việc tìm căn bậc hai của một số luôn được các em thực hiện với máy tính bỏ túi), hoặc mò mẫm lấy những số "gần với 3" rồi thử (bằng cách tính bình phương các số đó). Những cách làm này đương nhiên không khả thi cho trường hợp câu hỏi 5b).

4. Kết luận

Nghiên cứu thực nghiệm của chúng tôi cho thấy dù khái niệm đạo hàm đã được SGK Giải tích 11 trình bày đầy đủ cả ba nghĩa (nghĩa vật lí – tốc độ biến thiên, nghĩa hình học – hệ số góc của tiếp tuyến, nghĩa giải tích – công cụ xấp xỉ affine), HS vẫn có khó khăn trong việc huy động chúng vào giải quyết một số vấn đề của thực tiễn. Giải thích nguyên nhân của những khó khăn này, chúng tôi đã tiến hành các phân tích SGK và thực hành DH của giáo viên trên nhiều phương diện. Một trong những nguồn gốc của khó khăn tìm thấy ở sự lựa chọn của SGK. SGK đã tính đến quan điểm gắn DH toán với vấn đề mô hình hóa. Cả hai cách tiếp cận *DH bằng mô hình hóa* và *DH mô hình hóa* đều hiện diện trong SGK. Cụ thể là khái niệm đạo hàm đã được trình bày theo cách tiếp cận DH bằng mô hình hóa (để hình thành nghĩa vật lí của khái niệm). Sau đó SGK nêu ra các ứng dụng khác của đạo hàm, qua đó nghĩa hình học và nghĩa xấp xỉ được đề cập đến. Tuy nhiên, những tình huống cho phép thiết lập mối liên kết giữa ba nghĩa này (vào một khái niệm, đạo hàm) không tồn tại trong SGK. Nguồn gốc thứ hai của những lúng túng của HS nằm ở chỗ, với sự lựa chọn hệ thống bài tập của SGK và thực hành DH của giáo viên, khả năng vận dụng toán học nói chung, đạo hàm nói riêng vào giải quyết những vấn đề ngoài toán học chưa được phát triển ở HS đúng mức như nó cần phải có. Quan điểm gắn DH toán với quá trình mô hình hóa vẫn chưa được tính đến một cách đầy đủ bởi SGK cũng như bởi thực tế DH của GV.

Một đồ án dạy học khái niệm đạo hàm gắn với quan điểm tích hợp và mô hình hóa đã được chúng tôi thiết kế và thực nghiệm, nhưng không thể trình bày trong khuôn khổ của bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Thị Hoài Châu (2014), *Mô hình hóa trong dạy học Toán*, Báo cáo tổng kết đề tài nghiên cứu cấp cơ sở, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
2. Ngô Minh Đức (2013), *Khái niệm đạo hàm trong dạy học Toán và Vật lí ở trường phổ thông*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
3. Lê Văn Tiến (2005), *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, Nxb Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.
4. Bùi Anh Tuấn (2007), *Biểu diễn đồ thị hàm số và nghiên cứu đường cong qua phương trình của nó: trường hợp đường thẳng*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
5. Chevallard Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x*, N° 19, pp. 45-75, La Pensé Sauvage.
6. Coulange L. (1997), Les problèmes concrets à "mettre en équations" dans l'enseignement, *Petit x*, N° 47, pp. 33-58, La Pensé Sauvage.
7. Gantois J-Y, Schneider M. (2009), Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui? Pourquoi? Comment?, *Petit x*, N°79, pp. 5-21, La Pensé Sauvage.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 05-10-2014; ngày phản biện đánh giá: 28-10-2014; ngày chấp nhận đăng: 22-12-2014)