NHÓM ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ CỦA CÁC ĐẠI SỐ LIE TOÀN PHƯƠNG CƠ BẢN

DƯƠNG MINH THÀNH*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mô tả nhóm đối đồng điều $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và tính toán số chiều của nó đối với các đại số Lie toàn phương cơ bản đã được phân loại trong [5]. Công việc này được tiến hành theo hai cách: tính toán toán tử đối bờ và mô tả không gian các đạo hàm phản xứng.

Từ khóa: đại số Lie, đại số Lie toàn phương, đối đồng điều, đạo hàm phản xứng.

ABSTRACT

The second cohomology group $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ of the elementary quadratic Lie algebras

In this paper, we describe the second cohomology group $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ and calculate its dimensions for the elementary quadratic Lie algebras which were classified in [5]. Our work is done in two methods: calculating the coboundary operator and describing the space of skew-symmetric derivations.

Keywords: Lie algebras, Quadratic Lie algebras, Cohomology, Skew-symmetric derivations.

1. Giới thiệu

Các không gian vectơ được xét trên trường số phức $\mathbb{C}$ và hữu hạn chiều.

Trong Lí thuyết Lie, sự hiểu biết về đối đồng điều của đại số Lie vẫn còn khá hạn chế. Bản thân bài toán mô tả các nhóm đối đồng điều của một đại số Lie cho trước cũng chỉ giải quyết được trên một số ít các đại số Lie hoặc chỉ dừng lại ở việc mô tả số chiều của các nhóm đối đồng điều. Ngay trong trường hợp đơn giản nhất là các nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và số chiều của chúng (tức là các số Betti) vẫn tồn tại rất nhiều câu hỏi. Một kết quả nổi tiếng trong trường hợp này là Định lí đối ngẫu Poincaré nói rằng nếu $\mathfrak{g}$ là unimodular, tức là $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X))=0$ với mọi *X* thuộc $\mathfrak{g}$ (ví dụ các đại số Lie lũy linh) thì $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})=H_{n-k}(\mathfrak{g},\mathbb{C})$.

Trong trường hợp $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie toàn phương, tức một đại số Lie được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến và không suy biến, thì việc tính toán nhóm $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và số chiều của nó sẽ trở nên dễ dàng hơn nhờ các kết quả được đưa ra trong [4] và [5]. Cụ thể hơn, ta sẽ thu được nhóm $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ và số chiều của nó thông qua hai cách: hoặc là mô tả không gian các đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$ hoặc tính toán

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

trực tiếp nhóm $H^2(\mathfrak{g}, \pounds)$ nhờ toán tử đối bờ δ bây giờ chỉ đơn giản là $\delta = -\{I, .\}$ với I là 3-dạng liên kết với $\mathfrak{g}$ và $\{.,.\}$ là tích super-Poisson được định nghĩa trên không gian $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên $\mathfrak{g}$. Trong bài báo, chúng tôi sẽ trình bày chi tiết hai phương pháp này trên các ví dụ cụ thể là các đại số Lie toàn phương cơ bản được phân loại trong [5].

Bài báo được trình bày thành ba chương. Chương đầu tiên nhắc lại một số khái niệm và ví dụ cơ bản về đối đồng điều của đại số Lie; các đại số Lie làm ví dụ chủ yếu được chúng tôi chọn ở chiều thấp và quen thuộc để người đọc dễ dàng tiếp cận. Chương 2 trình bày lại kết quả trong [4] và [5] dùng để suy ra nhóm $H^2(\mathfrak{g}, \pounds)$ và chiều của nó đối với các đại số Lie toàn phương; chúng tôi cũng mô tả không gian các đạo hàm phản xứng của các đại số Lie toàn phương cơ bản giải được để thu được số chiều của nhóm $H^2(\mathfrak{g}, \pounds)$ tương ứng. Chương cuối trình bày chi tiết các nhóm $H^2(\mathfrak{g}, \pounds)$ bằng cách sử dụng phương pháp thứ hai như đã nói ở trên. Phần kết luận chủ yếu đề xuất một vài bài toán mở.

2. Đối đồng điều của đại số Lie

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie, V là một không gian vectơ và $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V, tức là

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Nói một cách khác, ρ là một đồng cấu đại số Lie từ $\mathfrak{g}$ vào đại số $\mathrm{End}(V)$ chứa các đồng cấu trên V. Trong trường hợp này, V được gọi là một $\mathfrak{g}$-*module*. Với mỗi số nguyên $k \geq 0$, kí hiệu $C^k(\mathfrak{g}, V)$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}$ vào V nếu $k \geq 1$ và $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Định nghĩa toán tử *đối bờ* $\delta_k : C^k(\mathfrak{g}, V) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$ như sau:

$$\delta_k f(X_0, ..., X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(X_i)\left(f(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_k)\right)$$
$$+ \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f\left([X_j, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_k\right)$$

với mọi $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$, $X_0, ..., X_k \in \mathfrak{g}$, ở đây kí hiệu $\hat{X}_i$ để chỉ X_i không có trong công thức.

Ta có thể kiểm tra được rằng $\delta_k \circ \delta_{k-1} = 0$. Thông thường ta kí hiệu $\delta = \delta_k$ nếu không quan tâm đến chỉ số. Khi đó δ thỏa mãn tính chất $\delta^2 = 0$.

Ta nói rằng $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ là một k-*đối chu trình* nếu $\delta f = 0$ và f là một k-*đối bờ* nếu có $g \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)$ sao cho $f = \delta g$.

Kí hiệu $Z^k(\mathfrak{g},V)$ là tập hợp các k-đối chu trình và $B^k(\mathfrak{g},V)$ là tập hợp các k-đối bờ, tức là $Z^k(\mathfrak{g},V)=\mathrm{Ker}\delta_k$ và $B^k(\mathfrak{g},V)=\mathrm{Im}\delta_{k-1}$. Công thức $\delta^2=0$ chứng tỏ $B^k(\mathfrak{g},V)\subset Z^k(\mathfrak{g},V)$ và do đó ta có không gian thương $Z^k(\mathfrak{g},V)/B^k(\mathfrak{g},V)$. Không gian thương này thường được kí hiệu là $H^k(\mathfrak{g},V)$ và được gọi là *nhóm đối đồng điều thứ* k của $\mathfrak{g}$ với hệ số trong V. Mỗi phần tử thuộc $H^k(\mathfrak{g},V)$ cũng được gọi là một k*-đối chu trình*.

Hiện nay, sự hiểu biết về nhóm đối đồng điều của các đại số Lie vẫn khá hạn chế. Bài toán được đặt ra ở đây là tìm cách mô tả tường minh các nhóm đối đồng điều của một đại số Lie $\mathfrak{g}$ cho trước hoặc ít nhất là tính được chiều của $H^k(\mathfrak{g},V)$. Một công thức thường được sử dụng để tính số chiều $\dim H^k(\mathfrak{g},V)$ như sau :

$$\dim H^k(\mathfrak{g},V)=\dim\left(\mathrm{Ker}\delta_{k-1}\right)+\dim\left(\mathrm{Ker}\delta_k\right)-m\begin{pmatrix} n \\ k-1\end{pmatrix}$$

ở đây $n=\dim(\mathfrak{g})$, $m=\dim(V)$ và $\begin{pmatrix} n \\ k-1\end{pmatrix}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+2)}{(k-1)(k-2)...1}$.

Ví dụ 2.1. Trường hợp đơn giản nhất $X\in C^0(\mathfrak{g},V)=V$ thì $\delta X(Y)=\rho(Y)(X)$. Nếu $f\in C^1(\mathfrak{g},V)=\{f:\mathfrak{g}\to V\}$ thì

$$\delta f\left(X_0,X_1\right)=\rho(X_0)\left(f(X_1)\right)-\rho(X_1)\left(f(X_0)\right)-f\left(\left[X_0,X_1\right]\right).$$

Ví dụ 2.2. Giả sử $\theta\in C^2(\mathfrak{g},V)$ là một 2-đối chu trình. Khi đó $\theta:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to V$ là một ánh xạ song tuyến tính phản xứng, đồng thời với $X_0,X_1,X_2\in\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\delta\theta\left(X_0,X_1,X_2\right)&=\rho\left(X_0\right)\left(\theta\left(X_1,X_2\right)\right)+\rho\left(X_1\right)\left(\theta\left(X_2,X_0\right)\right)+\rho\left(X_2\right)\left(\theta\left(X_0,X_1\right)\right)\\&\quad-\theta\left(\left[X_0,X_1\right],X_2\right)-\theta\left(\left[X_1,X_2\right],X_0\right)-\theta\left(\left[X_2,X_0\right],X_1\right)=0.\end{aligned}$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}&\delta\theta\left(X_0,X_1,X_2,X_3\right)=\rho\left(X_0\right)\left(\theta\left(X_1,X_2,X_3\right)\right)-\rho\left(X_1\right)\left(\theta\left(X_0,X_2,X_3\right)\right)\\&+\rho\left(X_2\right)\left(\theta\left(X_0,X_1,X_3\right)\right)-\rho\left(X_3\right)\left(\theta\left(X_0,X_1,X_2\right)\right)-\theta\left(\left[X_0,X_1\right],X_2,X_3\right)+\theta\left(\left[X_0,X_2\right],X_1,X_3\right)\\&-\theta\left(\left[X_0,X_3\right],X_1,X_2\right)-\theta\left(\left[X_1,X_2\right],X_0,X_3\right)+\theta\left(\left[X_1,X_3\right],X_0,X_2\right)-\theta\left(\left[X_2,X_3\right],X_0,X_1\right).\end{aligned}$$

2.1. *Trường hợp* $V=\mathfrak{g}$ *và* $\rho=\mathrm{ad}$.

Trong thực tế, người ta thường xét cho từng trường hợp cụ thể của V và ρ. Chẳng hạn, nếu $V=\mathfrak{g}$ và $\rho=\mathrm{ad}$ là biểu diễn phụ hợp của $\mathfrak{g}$ trong $\mathfrak{g}$, tức là $\rho(X)(Y)=[X,Y]$. Theo như Ví dụ 2.1, nếu $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ là một ánh xạ tuyến tính thì

$$\delta D\left(X_0,X_1\right)=\left[D(X_0),X_1\right]+\left[X_0,D(X_1)\right]-D\left(\left[X_0,X_1\right]\right).$$

Do đó D là một 1-đối chu trình nếu và chỉ nếu

$$\left[D(X_0), X_1\right] + \left[X_0, D(X_1)\right] - D\left(\left[X_0, X_1\right]\right) = 0,$$

tức D là một đạo hàm của g. Bây giờ ta sẽ xem trong trường hợp nào thì D sẽ là một 1-đối bờ. Giả sử có $X \in C^0(\mathrm{g},\mathrm{g}) = \mathrm{g}$ sao cho $D = \delta(X) = -\mathrm{ad}(X)$. Điều này có nghĩa D là một 1-đối bờ nếu và chỉ nếu D là một đạo hàm trong. Do đó nhóm đối đồng điều $H^1(\mathrm{g},\mathrm{g}) = \mathrm{Der}(\mathrm{g})/\mathrm{ad}(\mathrm{g})$ chính là dùng để mô tả không gian các đạo hàm ngoài của g.

Ví dụ 2.3. Ta sẽ xét một trường hợp cụ thể tính toán các 1-đối chu trình và 1-đối bờ của đại số Lie giải được 2 chiều $\mathrm{g} = \mathrm{span}\{X,Y\}$ với tích Lie $[X,Y] = Y$, ở đây ta vẫn giữ điều kiện $V = \mathrm{g}$ và $\rho = \mathrm{ad}$. Như đã nói ở trên, tính toán các 1-đối chu trình và 1-đối bờ tương đương với tính toán các đạo hàm và đạo hàm trong của g. Gọi D là một đạo hàm của g. Giả sử $D(X) = aX + bY$ và $D(Y) = cX + dY$ với $a,b,c,d \in £$. Nói cách khác, ma trận của D đối với cơ sở $\{X,Y\}$ là $D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dễ dàng thấy được ma trận của các đạo hàm trong là

$$\mathrm{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \mathrm{ad}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $D(Y) = D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$. Do đó ta thu được $a = c = 0$ và $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix} = \mathrm{ad}(dX - bY)$. Điều này chứng tỏ mọi đạo hàm của g đều là đạo hàm trong, một cách tương đương $H^1(\mathrm{g},\mathrm{g}) = \{0\}$.

Ví dụ 2.4. Xét g là đại số $\mathrm{sl}_2(£)$. Ta sẽ chứng minh $H^1(\mathrm{g},\mathrm{g}) = \{0\}$. Thật vậy, gọi $\{e_1,e_2,e_3\}$ là một cơ sở của $\mathrm{sl}_2(£)$ thỏa mãn $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = -2e_1$ và $[e_2,e_3] = 2e_2$. Giả sử D là một đồng cấu từ g vào g có ma trận đối với cơ sở đã cho:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_7 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_8 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_9 \end{pmatrix}.$$

Ta có $D(e_3) = D([e_1,e_2]) = [D(e_1),e_2] + [e_1,D(e_2)]$. Điều này dẫn tới $\alpha_7 + 2\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 + 2\alpha_3 = 0$ và $\alpha_9 - \alpha_5 - \alpha_1 = 0$. Một cách tương tự cho $D([e_1,e_3])$ và $D([e_2,e_3])$ ta thu được $\alpha_9 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$ và do đó

$$D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & -2\alpha_6\\ 0 & -\alpha_1 & -2\alpha_3\\ \alpha_3 & \alpha_6 & 0\end{pmatrix}=\alpha_6\mathrm{ad}(e_1)-\alpha_3\mathrm{ad}(e_2)+\frac{1}{2}\alpha_1\mathrm{ad}(e_3).$$

Suy ra $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\{0\}$.

Ví dụ 2.5. Xét $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$ là đại số Lie filiform 4 chiều sinh bởi cơ sở $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ sao cho $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$. Ta sẽ mô tả chi tiết đạo hàm của $\mathfrak{g}$ như sau. Giả sử D có ma trận

$$D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_{13}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_4 & \cdots & \alpha_{16}\end{pmatrix}.$$

Bằng tính toán tương tự như ví dụ trên ta được

$$D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_2 & \alpha_5 & 0 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_1+\alpha_5 & 0\\ \alpha_4 & \alpha_7 & \alpha_6 & 2\alpha_1+\alpha_5\end{pmatrix}.$$

Điều đó chứng tỏ không gian các đạo hàm của $\mathfrak{g}$ có 7 chiều và sinh bởi cơ sở $\{D_1,\ldots,D_7\}$ và $D=\sum_{i=1}^{7}\alpha_i D_i$.

Chú ý rằng $D_6=\mathrm{ad}(e_1)$, $D_3=-\mathrm{ad}(e_2)$ và $D_4=-\mathrm{ad}(e_3)$. Do đó

$H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=span\{[D_1],[D_2],[D_5],[D_7]\}$ đồng thời $\dim H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=4$.

Ở đây có một tính chất lí thú của $\mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$ rằng $\mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$ có những đạo hàm khả nghịch, chẳng hạn D_1+D_5 hoặc D_1+2D_6. Jacobson đã chứng minh một kết quả như sau vào năm 1955.

Định lí 2.6. *Giả sử $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie hữu hạn chiều trên một trường có đặc trưng 0. Nếu $\mathfrak{g}$ có đạo hàm khả nghịch thì $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie lũy linh.*

Ngoài ra ta có thêm một số kết quả đáng chú ý khác như dưới đây.

Định lí 2.7. (Dixmier). *Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie lũy linh hữu hạn chiều trên một trường đặc trưng 0. Khi đó $\mathfrak{g}$ sẽ có đạo hàm ngoài. Nói cách khác, $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\neq\{0\}$.*

Định lí 2.8. (Zassenhaus). *Nếu $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie hữu hạn chiều có dạng Killing không suy biến. Khi đó mọi đạo hàm của $\mathfrak{g}$ đều là đạo hàm trong.*

2.2. *Trường hợp* $V=\mathfrak{g}^*$ *và* $\rho=\mathrm{ad}^*$.

Bây giờ ta xét trường hợp khác khi $V = \mathfrak{g}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$ và $\rho = \mathrm{ad}^*$ là biểu diễn đối phụ hợp của $\mathfrak{g}$ trong $\mathfrak{g}^*$, tức là $\rho(X)(f) = -f \circ \mathrm{ad}(X)$. Giả sử $\theta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ là một 2-đối chu trình. Khi đó ta có:

$$\theta(X_0, X_1)\circ\mathrm{ad}(X_2) + \theta(X_1, X_2)\circ\mathrm{ad}(X_0) + \theta(X_2, X_0)\circ\mathrm{ad}(X_1) + \theta([X_0, X_1], X_2) + \theta([X_1, X_2], X_0) + \theta([X_2, X_0], X_1) = 0.$$

Một ứng dụng trực tiếp của trường hợp này chính là phương pháp Mở rộng *T** được M. Bordemann đưa ra trong Lí thuyết các đại số Lie toàn phương vào năm 1997 như sau. Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie và xét ánh xạ song tuyến tính $\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$. Định nghĩa trên không gian vectơ $T_\theta^*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ phép toán:

$$[X + f, Y + g] = [X, Y] + \mathrm{ad}^*(X)(g) - \mathrm{ad}^*(Y)(f) + \theta(X, Y)$$

với mọi $X, Y \in \mathfrak{g}$, $f, g \in \mathfrak{g}^*$. Khi đó ta có mệnh đề sau [1].

Mệnh đề 2.9. *$T_\theta^*(\mathfrak{g})$ là một đại số Lie nếu và chỉ nếu θ là một 2-đối chu trình.*

Chứng minh: Kết quả có thể được suy ra từ việc kiểm tra trực tiếp tính phản xứng và thỏa mãn đồng nhất thức Jacobi của phép toán trên.

Trong trường hợp này $T_\theta^*(\mathfrak{g})$ được gọi là *mở rộng T* của $\mathfrak{g}$ bởi θ*. Hơn nữa nếu θ thỏa mãn tính chất $\theta(X, Y)Z = \theta(Y, Z)X$, với mọi $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (tính chất *cyclic*), thì $T_\theta^*(\mathfrak{g})$ trở thành một đại số Lie toàn phương với dạng song tuyến tính B được xác định như sau:

$$B(X + f, Y + g) = f(Y) + g(X),\ \forall X, Y \in \mathfrak{g},\ f, g \in \mathfrak{g}^*.$$

Ví dụ 2.10. Xét $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{X, Y\}$, đại số Lie giải được 2 chiều với tích Lie $[X, Y] = Y$. Giả sử θ là một 2-đối chu trình cyclic. Vì θ phản xứng nên $\theta(X, X) = \theta(Y, Y) = 0$. Chú ý rằng θ là một ánh xạ đi từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ vào $\mathfrak{g}^*$ nên ta có thể giả sử $\theta(X, Y) = aX^* + bY^*$ với a và b thuộc $\mathbb{C}$. Ta có $\theta(X, Y)X = \theta(X, X)Y = 0$ nên $a = 0$. Tương tự $b = 0$. Do đó $\theta(X, Y) = 0$. Điều này chứng tỏ rằng mọi 2-đối chu trình cyclic của $\mathfrak{g}$ đều tầm thường.

Ví dụ 2.11. Xét đại số Lie Heisenberg 3 chiều $\mathfrak{g}_{3,1} : [X, Y] = Z$. Nếu θ là một 2-đối chu trình cyclic không tầm thường, ta giả sử:

$$\theta(X, Y) = aX^* + bY^* + zZ^* \text{ với } a, b, z \in \mathbb{C}.$$

Từ $\theta(X, Y)X = \theta(X, X)Y = 0$ nên $a = 0$. Ta cũng có $b = 0$. Do đó ta được $\theta(X, Y) = zZ^*$.

Cách làm tương tự cho ta $\theta(Y, Z) = xX^*$ và $\theta(Z, X) = yY^*$ với $x, y \in \mathbb{C}$. Từ tính chất cyclic của θ:

$$\theta(X,Y)Z = \theta(Y,Z)X = \theta(Z,X)Y,$$

ta thu được $x = y = z := \lambda \neq 0$ và do đó $\theta(X,Y) = \lambda Z^*$, $\theta(Y,Z) = \lambda X^*$ và $\theta(Z,X) = \lambda Y^*$. Dễ dàng kiểm tra được rằng θ được xác định như thế sẽ là một 2-đối chu trình.

2.3. ***Trường hợp*** $V = \mathbb{C}$.

Một trong những trường hợp đáng chú ý nhất của đối đồng điều đại số Lie là khi V một chiều, tức là $V = \mathbb{C}$. Khi đó $C^0(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ và $C^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}$ vào $\mathbb{C}$, tức là $C^k(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$. Ta cũng có $\rho(X) = 0$ với mọi $X \in \mathfrak{g}$ và do đó:

$$\delta_k f(X_0,\ldots,X_k) = \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f\left(\left[X_j, X_j\right], X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k\right)$$

Trong trường hợp này, việc mô tả nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ cũng như tính toán số chiều $\dim H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ là một bài toán hết sức lí thú.

Ví dụ 2.12. $\delta_0 = 0$ và $\delta_1 f(X_0, X_1) = -f([X_0, X_1])$ với mọi $f \in \mathfrak{g}^*$. Do đó

$$H^1(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathfrak{g}^* \mid f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0 \right\} \cong \left(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right)^*.$$

Ví dụ 2.13. $\delta_2\omega(X_0, X_1, X_2) = -\omega([X_0, X_1], X_2) - \omega([X_1, X_2], X_0) - \omega([X_2, X_0], X_1)$, tức là

$$Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \left\{\omega \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \mid \omega([X_0, X_1], X_2) + \omega([X_1, X_2], X_0) + \omega([X_2, X_0], X_1) = 0\right\}$$

và $B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \left\{\omega \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \mid \omega = \delta_1 f\right\} = \left\{\omega \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \mid \omega(X,Y) = -f([X,Y])\right\}$.

Định nghĩa 2.14. Số $b_k(\mathfrak{g}) = \dim H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ được gọi là *số Betti thứ k* của $\mathfrak{g}$.

Ví dụ 2.15. Kí hiệu $\mathfrak{h}_n$ là đại số Lie Heisenberg $2n+1$ chiều, khi đó L.J. Santharoubanne chứng minh được trong [6] rằng

$$b_k(\mathfrak{h}_n) = \binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-2}.$$

Ví dụ 2.16. Trở lại với đại số $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Lấy $\omega \in C^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$. Nếu $\omega \in Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ thì

$$\omega([e_i, e_j], e_k) - \omega([e_i, e_k], e_j) + \omega([e_j, e_k], e_i) = 0,$$

ở đây i, j, k nhận các giá trị 1,2 và 3 giống Ví dụ 2.4. Dễ dàng nhận ra rằng chỉ có trường hợp $(i, j, k) = (1,2,3)$ là đáng để xem xét. Khi đó ta có:

$$\omega([e_1, e_2], e_3) - \omega([e_1, e_3], e_2) + \omega([e_2, e_3], e_1) = 0.$$

Điều này dẫn đến $\omega(e_3,e_3)+2\omega(e_1,e_2)+2\omega(e_2,e_1)=0$. Vì biểu thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có mọi $\omega \in C^2(\mathrm{g},£)$ đều thuộc $Z^2(\mathrm{g},£)$. Vì $[e_1,e_2]$, $[e_1,e_3]$ và $[e_2,e_3]$ tạo thành một cơ sở của g nên với mọi $\omega \in C^2(\mathrm{g},£)$ ta luôn tìm được $f \in \mathrm{g}^*$ để

$$\omega(e_i,e_j) = f([e_i,e_j]).$$

Điều đó chứng tỏ $B^2(\mathrm{g},£) = Z^2(\mathrm{g},£)$ và do đó $H^2(\mathrm{g},£) = \{0\}$.

Ví dụ 2.17. Xét $\mathrm{g} = \mathrm{n}_4(£)$ là đại số Lie filiform 4 chiều sinh bởi cơ sở $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ sao cho $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$. Ta sẽ chứng minh $\dim H^2(\mathrm{g},£)=2$. Từ đẳng thức

$$\omega([e_1,e_2],e_3)-\omega([e_1,e_3],e_2)+\omega([e_2,e_3],e_1)=0$$

ta suy ra được $\omega(e_2,e_4)=0$. Tương tự lấy $(i,j,k)=(1,2,4)$ ta được $\omega(e_3,e_4)=0$. Do đó

$$Z^2(\mathrm{g},£)=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{23}\},$$

ở đây $\omega_{ij}(e_i,e_j) = -\omega_{ij}(e_j,e_i) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Mặt khác, nếu lấy $f \in \mathrm{g}^* = \mathrm{span}\{e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*\}$ thì ta nhận thấy

$$1=\omega_{12}(e_1,e_2)=e_3^*([e_1,e_2]),\ 1=\omega_{13}(e_1,e_3)=e_4^*([e_1,e_3])$$

và do đó $B^2(\mathrm{g},£)=\{\omega_{12},\omega_{13}\}$. Điều này chứng tỏ $H^2(\mathrm{g},£)=\{[\omega_{14}],[\omega_{23}]\}$.

3. Đối đồng điều của đại số Lie toàn phương.

Trong phần này ta sẽ chỉ ra một số kết quả liên quan đến tính toán đối đồng điều đại số Lie toàn phương bằng một cách tiếp cận khác.

Cho một không gian vectơ phức V hữu hạn chiều được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng B (ta còn gọi (V,B) là một không gian vectơ *toàn phương*). Năm 2007, G. Pinczon và R. Ushirobira đã giới thiệu khái niệm tích super-Poisson trên không gian $\Lambda(V^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên V như sau:

$$\{\Omega,\Omega'\} = (-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\iota_{X_j}(\Omega)\wedge\iota_{X_j}(\Omega'),\ \forall\Omega\in\Lambda^k(V^*) \text{ và } \Omega'\in\Lambda(V^*)$$

ở đây $\{X_j\}_{j=1}^n$ là một cơ sở trực chuẩn của V.

Với một đại số Lie toàn phương (g,B) ta định nghĩa *3-dạng liên kết với* g xác định bởi

$$I(X,Y,Z)=B([X,Y],Z),\ \forall X,Y,Z\in\mathrm{g}.$$

Khi đó ta có đẳng thức $\{I, I\} = 0$, hơn nữa $\delta\Omega = -\{I, \Omega\}$ (xem [5]). Như là một hệ quả, ta nhận được kết quả sau.

Mệnh đề 3.1. Có một đẳng cấu giữa $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \{\Omega \mid \{I, \Omega\} = 0\}$ và $\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g}, B)$ cảm sinh đẳng cấu giữa $\iota_{\mathfrak{g}}(I) = \{\iota_X(I) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ và $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Do đó $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Der}_a(\mathfrak{g}, B) / \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

Nhận xét 3.2. Kết quả $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Der}_a(\mathfrak{g}, B) / \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ trong Mệnh đề 3.1 đã được đề cập trong [4]. Từ kết quả này, cho một đại số Lie toàn phương $\mathfrak{g}$, khi đó chiều của $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ có thể được suy ra từ việc mô tả các đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$.

Ví dụ 3.3. Xét đại số Lie kim cương $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4 = \mathrm{span}\{X, P, Q, Z\}$ với tích Lie được xác định bởi $[X, P] = P$, $[X, Q] = -Q$ và $[P, Q] = Z$. Đây là một đại số Lie toàn phương với dạng song tuyến tính đối xứng bất biến được cho bởi $B(X, Z) = B(P, Q) = 1$, các trường hợp khác bằng 0. Gọi D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$. Ta có thể tính toán trực tiếp được rằng ma trận của D đối với cơ sở đã cho có dạng như sau (xem chi tiết trong [3]):

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 \end{pmatrix} \text{ với } x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Dễ dàng thấy được rằng $D = \mathrm{ad}(xX - yP + zQ)$ và do đó D là một đạo hàm trong của $\mathfrak{g}$. Từ đó ta nhận được kết quả $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \{0\}$ đối với đại số Lie kim cương.

Ví dụ 3.4. Các đại số Lie toàn phương cơ bản được liệt kê trong bài báo [5] ngoài đại số $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, đại số Lie kim cương $\mathfrak{g}_4$ còn có đại số $\mathfrak{g}_5$ và $\mathfrak{g}_6$ được xác định như sau:

- $\mathfrak{g}_5 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, T, Z_1, Z_2\}$ với $[X_1, X_2] = T$, $[X_1, T] = -Z_2$ và $[X_2, T] = Z_1$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = B(T, T) = 1$, $1 \le i \le 2$, các trường hợp khác bằng 0.
- $\mathfrak{g}_6 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$ với $[X_1, X_2] = Z_3$, $[X_2, X_3] = Z_1$ và $[X_3, X_1] = Z_2$. Dạng song tuyến tính B được xác định là $B(X_i, Z_i) = 1$, $1 \le i \le 3$, các trường hợp khác bằng 0.

Đối với đại số $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_5$, gọi D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$. Ta có thể tính toán trực tiếp được rằng ma trận của D đối với cơ sở đã cho có dạng như sau :

$$D=\begin{pmatrix} -x & -z & 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & x & y \\ a & 0 & c & z & -x \end{pmatrix} \text{ với } x,y,z,a,b,c\in \pounds\ .$$

So sánh với các đạo hàm trong $\mathrm{ad}\left(X_1\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{ad}\left(X_2\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $\mathrm{ad}\left(T\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta thấy rằng các đạo hàm trong được đại diện bởi các tham số a,b và c trong khi các đạo hàm ngoài được đại diện bởi các tham số x,y và z. Điều đó chứng tỏ $\dim\left(H^2(\mathrm{g}_5,\pounds)\right)=3$.

Một cách tương tự ta cũng tính được $\dim\left(H^2(\mathrm{g}_6,\pounds)\right)=6$. Chi tiết về nhóm $H^2(\mathrm{g},\pounds)$ của hai đại số g_5 và g_6 sẽ được trình bày trong chương tiếp theo.

4. Nhóm đối đồng điều $H^2(\mathrm{g},\pounds)$ của các đại số Lie toàn phương cơ bản

Trong phần này, bằng cách áp dụng các kết quả trong bài báo [5], chúng tôi sẽ trình bày việc mô tả nhóm đối đồng điều $H^2(\mathrm{g},\pounds)$ của các đại số Lie toàn phương cơ bản. Như đã chỉ ra trong các phần trước, nhóm đối đồng điều $H^2(\mathrm{g},\pounds)$ của các đại số $\mathrm{sl}_2\left(\pounds\right)$ và g_4 là tầm thường nên chúng tôi chỉ trình bày chi tiết quá trình tính toán nhóm đối đồng điều $H^2(\mathrm{g},\pounds)$ của các đại số g_5 và g_6.

- Đối với đại số $\mathrm{g}=\mathrm{g}_5$, từ định nghĩa của dạng song tuyến tính B, ta có thể tính được 3-dạng I liên kết là $I=X_1^*\wedge X_2^*\wedge T^*$. Vì :

$$B^2(\mathrm{g},\pounds)=\left\{\omega\in\Lambda^2\left(\mathrm{g}^*\right) \mid \omega(X,Y)=f(X,Y),\ f\in\mathrm{g}^*\right\}=\left\{\iota_X\left(I\right),X\in\mathrm{g}\right\}$$

nên ta tính được $B^2(\mathrm{g},\pounds)=\mathrm{span}\left\{X_1^*\wedge X_2^*, X_1^*\wedge T^*, X_2^*\wedge T^*\right\}$. Trong khi đó,

$$Z^2(\mathrm{g},\pounds)=\left\{\omega\in\Lambda^2\left(\mathrm{g}^*\right) \mid \left\{I,\omega\right\}=0\right\}.$$

Áp dụng Công thức (5) tính tích super-Poisson trong [5] ta được:

$$\left\{I, X_1^* \wedge X_2^*\right\} = \left\{X_1^* \wedge X_2^* \wedge T^*, X_1^* \wedge X_2^*\right\} = B(Z_1, Z_1) X_2^* \wedge T^* \wedge X_2^*$$
$$-B(Z_1, Z_2) X_2^* \wedge T^* \wedge X_1^* - B(Z_2, Z_1) X_1^* \wedge T^* \wedge X_2^*$$
$$+B(Z_2, Z_2) X_1^* \wedge T^* \wedge X_1^* + B(T, Z_1) X_1^* \wedge X_2^* \wedge X_2^* - B(T, Z_2) X_1^* \wedge X_2^* \wedge X_1^* = 0.$$

Do đó $X_1^* \wedge X_2^* \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L})$. Tính toán một cách tương tự ta thu được:

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = \operatorname{span}\left\{X_1^* \wedge X_2^*, X_1^* \wedge T^*, X_2^* \wedge T^*, Z_1^* \wedge X_2^*, Z_2^* \wedge X_1^*, Z_1^* \wedge X_1^* - Z_2^* \wedge X_2^*\right\}.$$

So sánh $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L})$ và $Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L})$ ta suy ra

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = \operatorname{span}\left\{\left[Z_1^* \wedge X_2^*\right], \left[Z_2^* \wedge X_1^*\right], \left[Z_1^* \wedge X_1^* - Z_2^* \wedge X_2^*\right]\right\}$$

và hiển nhiên $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = 3$.

- Đối với đại số $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_6$, 3-dạng I liên kết với $\mathfrak{g}_6$ có dạng $I = X_1^* \wedge X_2^* \wedge X_3^*$. Từ đó ta tính được:

$$B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = \left\{\iota_X(I), X \in \mathfrak{g}\right\} = \operatorname{span}\left\{X_1^* \wedge X_2^*, X_2^* \wedge X_3^*, X_3^* \wedge X_1^*\right\}.$$

Áp dụng Công thức (5) tính tích super-Poisson trong [5], ta cũng thu được

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = \operatorname{span}\left\{\iota_{X_i}(I), X_i^* \wedge Z_{j \neq i}^*, Z_1^* \wedge X_1^* - Z_2^* \wedge X_2^*, Z_1^* \wedge X_1^* - Z_3^* \wedge X_3^*\right\}$$

ở đây $1 \leq i, j \leq 3$.

Điều đó chứng tỏ

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = \operatorname{span}\left\{\left[X_i^* \wedge Z_{j \neq i}^*\right], \left[Z_1^* \wedge X_1^* - Z_2^* \wedge X_2^*\right], \left[Z_1^* \wedge X_1^* - Z_3^* \wedge X_3^*\right]\right\},$$

$1 \leq i, j \leq 3$, và $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L}) = 6$.

Nhận xét: Hai phương pháp đề cập ở Chương 2 và Chương 3 hoàn toàn có thể áp dụng cho các đại số Lie toàn phương giải được đến 6 chiều (đã được phân loại trong bài báo [3]). Trong bài báo [4], số chiều $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{L})$ cho một lớp đại số Lie toàn phương giải được $2n+2$ chiều cũng được tính toán tường minh.

5. Kết luận

Nghiên cứu và mô tả đối đồng điều của các đại số Lie toàn phương là một hướng nghiên cứu đang rất mới mẻ và khá lí thú. Bản thân các đại số Lie toàn phương cũng chỉ mới được quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây. Các kết quả trong bài báo này chỉ mới là những tính toán cụ thể đầu tiên giúp tác giả và đồng nghiệp có nhiều ví dụ nhằm giải quyết những vấn đề sâu hơn, tổng quát hơn trong nghiên cứu đối đồng điều của các đại số Lie toàn phương. Dựa trên những kết quả đạt được, chúng tôi mạnh dạn đề xuất một số hướng nghiên cứu mở như sau:

(i) Đưa ra một số lớp các đại số Lie toàn phương tổng quát nào đó có thể mô tả được các nhóm đối đồng điều hoặc tính toán các số Betti giống như A. Medina đã làm trong [4].

(ii) Nghiên cứu thêm tính chất của đối đồng điều và vai trò của chúng đối với các đại số Lie toàn phương. Chẳng hạn như đối đồng điều cyclic đối với các mở rộng T* hoặc nhóm đối đồng điều $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ đối với sự đẳng cấu đẳng cự của các mở rộng kép một chiều.

(iii) Nghiên cứu một số đối tượng đặc biệt trong lớp các đại số Lie toàn phương và vai trò của nhóm đối đồng điều $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ trên những đối tượng đó, ví dụ như đại số Lie toàn phương symplectic hay đại số Lie toàn phương kì dị.

Chúng tôi hi vọng sẽ đạt được những kết quả khả quan hơn trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. Bordemann (1997), "Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras", *Acta. Math. Uni. Comenianac*, **LXVI**(2), pp. 151-201.
2. C. Chevalley and S. Eilenberg (1948), "Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras", *Trans. Amer. Math. Soc*. **63**, pp. 85-124.
3. P.T. Dat, D.M. Thanh and L.A. Vu (2012), "Solvable quadratic Lie algebras in low dimensions", *East-West J. of Math.* **14**(2), pp. 208-218.
4. A. Medina and P. Revoy (1985), "Algèbres de Lie et produit scalaire invariant'', *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup*., 4ème sér. t.18, pp. 553-561.
5. G. Pinczon and R. Ushirobira (2007), "New Applications of Graded Lie Algebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras, and Cohomology", *J. Lie Theory* **17**, pp. 633-667.
6. L. J. Santharoubane (1983), "Cohomology of Heisenberg Lie algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.* **87**(1), pp. 23–28.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 01-3-2013; ngày phản biện đánh giá: 15-3-2013; ngày chấp nhận đăng: 21-6-2013)