CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA LỖ ĐEN

LÊ NAM*

Có sự giống nhau rất đáng chú ý giữa các định luật cơ học của lỗ đen dừng với các định luật của nhiệt động học cổ điển. Bài báo này sẽ trình bày các thông số mô tả lỗ đen mà những thông số này tương tự như các thông số mô tả tính chất của hệ nhiệt động. Từ đây ta thấy sự tương tự của cơ học lỗ đen với bốn định luật cơ bản của nhiệt động học.

1. MỞ ĐẦU

Năm 1915 Einstein đã có cống hiến vĩ đại cho ngành Vật lý hiện đại khi công bố thuyết tương đối rộng. Một năm sau đó Schwarzchild tìm ra nghiệm riêng của phương trình Einstein và nghiệm trên chứa đựng sự mô tả toàn diện vùng không-thời gian bên ngoài lỗ đen không quay [5]. Bốn mươi bảy năm sau, R. Kerr – nhà toán học người New-Zealand – đã tìm ra nghiệm tổng quát mô tả lỗ đen quay. Từ nghiệm Kerr ta thấy có ba thông số cơ bản nhất để mô tả lỗ đen dừng và cô lập là khối lượng, mômen động lượng và điện tích [5]. Năm 1971, Hawking đã chứng minh rằng diện tích chân trời sự kiện không bao giờ giảm theo thời gian (định lý diện tích Hawking) [4]. Ngay sau đó, Bardeen, Carter và Hawking đã chứng minh được bốn định luật của cơ học lỗ đen [1]. Cách chứng minh của các tác giả trên rất độc đáo và chặt chẽ về mặt toán học nhưng cũng vì vậy mà nó rất nặng nề cho những ai mới làm quen với vật lý lỗ đen. Bài báo này sẽ trình bày lại kết quả của các bậc thầy trên một cách đơn giản hơn với hy vọng giúp bạn đọc (sinh viên và học viên cao học) dễ dàng hơn khi muốn làm quen với vật lý lỗ đen cổ điển và từ đó bước sang một lĩnh vực đang sôi động hiện nay là vật lý lỗ đen lượng tử.

2. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN

Như đã biết không-thời gian quanh lỗ đen Kerr có tính đối xứng trục và dừng nên ta có hai trường vectơ Killing là: vectơ tịnh tiến theo thời gian K^a và

* Giảng viên Khoa Vật Lý Trường ĐHSP Tp.HCM.

vectơ Killing quay $\bar{K}^a$. Hai trường vectơ Killing trên thỏa mãn các phương trình sau:

$$K_{a;b} + K_{b;a} = 0 \quad (1)$$

$$K_{[a;b]} = K_{a;b} \quad (2)$$

$$K^{a;b}{}_{b} + R^a_b K^b = 0 \quad (3)$$

Hoàn toàn tương tự cho vectơ $\bar{K}^a$ [7]. Ta tích phân phương trình (3) theo siêu mặt giống không gian (spacelike) S. Ta chọn mặt S là spacelike để bảo đảm mặt này sẽ bao quanh lỗ đen vì ta biết hai điểm lân cận trên mặt này luôn có sự ngăn cách không gian.

$$\int_S K^{a;b}{}_{b}\, d\sigma_a = -\int_S R^a{}_b K^b d\sigma_a \quad (4)$$

Áp dụng định lý Stoke để chuyển tích phân theo mặt ba chiều thành tích phân hai chiều đối với vế trái(4)

$$\int_S K^{a;b}{}_{b} d\sigma_a = \int_{\partial S} K^{a;b} d\sigma_{ab} = -\int_S R^a_b K^b d\sigma_a \quad (5)$$

$d\sigma_a$: yếu tố bề mặt của siêu mặt ba chiều S

$d\sigma_{ab}$:yếu tố bề mặt của ∂S với ∂S là biên của S

Ta chọn mặt spacelike S là tiệm cận phẳng nghĩa là khi r tiến tới ∞ thì không gian cong sẽ trở về không gian phẳng Minkowski. Nó sẽ tiếp tuyến với vectơ Killing quay $\bar{K}^a$ và cắt chân trời sự kiện của lỗ đen Kerr tại mặt hai chiều ∂B. Mặt S sẽ có hai biên là: biên ∂B bọc lấy lỗ đen và biên ∂S_∞ tại vô cùng. Ta chọn hướng của $d\sigma_{ab}$ sao cho: $\partial S = \partial B - \partial S_\infty$ và viết lại (5):

$$\int_{\partial S} K^{a;b} d\sigma_{ab} = \int_{\partial B} K^{a;b} d\sigma_{ab} - \int_{\partial S_\infty} K^{a;b} d\sigma_{ab} = -\int_S R^a_b K^b d\sigma_a \quad (6)$$

Áp dụng công thức: $M = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_\infty} K^{a;b} d\sigma_{ab}$ của Bardeen, Carter, Hawking [1] vào (6) ta có:

$$\text{Vế trái (6)} = \int_{\partial B} K^{a;b} d\sigma_{ab} - 4\pi M = -\int_S R^a_b K^b d\sigma_a \quad (7)$$

Áp dụng phương trình Einstein vào vế phải (7) ta được:

$$-\int_S R^a_b K^b d\sigma_a = -4\pi \int_S \left(2T^a_b - T\delta^a_b\right) K^b d\sigma_a \quad (8)$$

Sau khi ghép hai biểu thức (7) và (8) lại ta được công thức tính M:

$$M = \int_S \left(2T^a_b - T\delta^a_b\right) K^b d\sigma_a + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} K^{a;b} d\sigma_{ab} \quad (9)$$

Số hạng thứ nhất vế phải của (9) biểu thị sự đóng góp củavật chất nằm ngoài chân trời sự kiện còn số hạng thứ hai biểu thị khối lượng của lỗ đen. Vế trái là khối lượng lỗ đen đo bởi quan sát viên tại vô cùng trong vùng tiệm cận phẳng. Do vectơ null $\vec{l}$ tiếp tuyến với chân trời sự kiện có thể viết dưới dạng:

$$l^a = K^a + \Omega_H \bar{K}^a \quad (10)$$

nên ta có: $$K^{a;b} = l^{a;b} - \Omega_H \bar{K}^{a;b} \quad (11)$$

thay (11) vào tích phân thứ hai vế phải (9):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} K^{a;b} d6_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l^{a;b} d\sigma_{ab} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \Omega_H \bar{K}^{a;b} d\sigma_{ab}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l^{a;b} d\sigma_{ab} + 2\Omega_H J_H \quad (12)$$

Ở đây, ta đã sử dụng công thức tính mômen động lượng của lỗ đen của Bardeen, Carter, Hawking [1]. Sau khi thay (12) vào (9) ta được :

$$M = \int_S \left(2T^a_b - T\delta^a_b\right) K^b d\sigma_a + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l^{a;b} d\sigma_{ab} + 2\Omega_H J_H \quad (13)$$

Do vectơ null $\vec{l}$ tiếp tuyến với ∂B nên ta có thể chọn vectơ null khác là n_a vuông góc với ∂B và vectơ này được chuẩn hóa sao cho $n_a l^a = -1$. Điều này đã được Penrose và Newman thực hiện vào năm 1968 [3]. Hai ông đã chọn các vectơ null n_a và $\vec{l}^a$ thỏa các điều kiện sau:

$$n_a n^a = l_a l^a = 0 \; ; \; n_a l^a = -1 \; ; \quad \text{signature}(-+++)$$

Từ hai vectơ trên ta có thể biểu thị yếu tố bề mặt $d\sigma_{ab}$ của ∂S thông qua yếu tố diện tích nguyên tố dA của mặt ∂B:

$$d\sigma_{ab} = \left(l_a n_b - l_b n_a\right)\frac{dA}{2} = l_{[a}n_{b]}dA \quad (14)$$

Thay (14) vào tích phân thứ hai vế phải (13) và xét riêng số hạng này:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} l^{a;b} d\sigma_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} l^{a;b}\left(l_a n_b - l_b n_a\right)\frac{dA}{2} \quad (15)$$

Xét riêng số hạng sau:

$$l^{a;b} l_b n_a = \left(l_c g^{ca}\right)_{;d} g^{db} l_b n_a = l_{c;d} g^{db} g^{ca} l_b n_a$$

$$= l_{c;d} l^d n^c = l_{a;b} l^b n^a$$

Xét tiếp số hạng thứ hai và hoàn toàn tương tự ta được:

$$l^{a;b} l_a n_b = l_{c;d} l^c n^d = -l_{d;c} l^c n^d$$

$$= -l_{a;b} l^b n^a$$

Ta đã sử dụng phương trình (1) cho vectơ Killing $\vec{l}$. Thay các kết quả vừa nhận được vào (15):

$$\text{Vế phải (15)} = \frac{1}{4\pi}\int\left(-l_{a;b} l^b n^a - l_{a;b} l^b n^a\right)\frac{dA}{2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int l_{a;b} l^b n^a dA = \frac{1}{4\pi}\int K dA \quad (16)$$

Ta đã đặt $\quad K = -l_{a;b}\ell^b n^a \quad (17)$

Ở phần phụ lục ta sẽ chứng minh K=const trên khắp chân trời sự kiện nên:

$$\text{Vế phải (15)} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} K dA = \frac{1}{4\pi} KA \quad (18)$$

A là diện tích chân trời sự kiện của lỗ đen Kerr

Thay lại (15) và (18) vào (13) ta được:

$$M = \iint_S \left(2T_b^a - T\delta_b^a\right)K^b d\sigma_a + \frac{K}{4\pi}A + 2\Omega_H J_H \qquad (19)$$

Khi $T_b^a = 0$, nghĩa là không gian bên ngoài lỗ đen là trống rỗng, không có phân bố vật chất thì (19) sẽ có dạng rất đẹp sau:

$$M = \frac{K}{4\pi}A + 2\Omega_H J_H \qquad (20)$$

Bây giờ ta có thể bỏ chỉ số cho tiện:

$$M = \frac{K}{4\pi}A + 2\Omega J \qquad (20b)$$

M: khối lượng của lỗ đen đo bởi người quan sát tại vô cùng

A: diện tích chân trời sự kiện của lỗ đen

Ω : vận tốc góc của lỗ đen

J:mômen động lượng của lỗ đen

K:được gọi là hấp dẫn bề mặt của lỗ đen.

Với lỗ đen tích điện thì (20) sẽ thêm số hạng ΦQ trong đó Q là điện tích của lỗ đen còn Φ là điện thế của chân trời sự kiện.

3. CÔNG THỨC VI PHÂN

Ta viết nghiệm Kerr dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} dS^2 = &-\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi + \\ &+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 dr^2 \end{aligned} \qquad (21)$$

với $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2; \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$

Ta tính được vận tốc góc của lỗ đen:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}\Big|_{\Delta=0} = \frac{2Mar_+}{\left(r_+^2 + a^2\right)^2} \qquad (22)$$

với $$r_+ = M + \left(M^2 - a^2\right)^{1/2} \tag{23}$$

Ta có thể biểu thị Ω thông qua diện tích chân trời sự kiện của lỗ đen Kerr:

$$\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{4\pi a}{A} = \frac{4\pi J}{AM} \tag{24}$$

với $$A = 4\pi\left(r_+^2 + a^2\right) = 8\pi\left[M^2 + M\left(M^2 - a^2\right)^{1/2}\right] \tag{25}$$

$$J = a.M \tag{26}$$

Từ (21) ta nhận thấy các Tenxơ metric của nghiệm Kerr không phụ thuộc trực tiếp vào t và Φ nên ta có hai trường vectơ Killing:

$$K^aK_a = g_{tt} = -\frac{\Delta - a^a \mathrm{Sin}^2\theta}{\rho^2} \tag{27}$$

$$\bar{K}^a\bar{K}_a = g_{\phi\phi} = \left[\left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2\Delta \mathrm{Sin}^2\theta\right]\frac{\mathrm{Sin}^2\theta}{\rho^2} \tag{28}$$

Ta có thể tính trực tiếp hấp dẫn bề mặt từ định nghĩa (17) cho nghiệm Kerr và để tiện việc in ấn ta ký hiệu lại như sau:

$$l^a = K^a + \Omega\bar{K}^a \equiv X^a \tag{29}$$

Nhân hai vế (17) với l^a:

$$l^aK = -l_{a;b}l^bn^al_a = l_{a;b}l^b$$

Hay theo ký hiệu mới:

$$X_aK = X_{a;b}X^b \Leftrightarrow KX^a = X^{a;b}X_b \tag{30}$$

Như đã biết vetơ $l^a = X^a$ là vectơ null tại chân trời sự kiện nên nó vừa là vectơ tiếp tuyến vừa là vectơ vuông góc với chân trời sự kiện. Theo hệ quả của định lý Frobenius trong hình giải tích ta có biểu thức sau [5]

$$X_{[a}\nabla_bX_{c]} = X_{[a}X_{c;b]} = 0$$

Khai triển ra ta được ba số hạng mang dấu cộng và ba số hạng mang dấu trừ. Áp dụng phương trình Killing (1) cho ba số hạng mang dấu trừ ta được:

$$X_a X_{c;b} + X_b X_{a;c} + X_c X_{b;a} = 0$$
$$X_c X_{b;a} = -2X_{[a}\nabla_{b]}X_c$$

Nhân hai vế với $X^{b;a}$ rồi áp dụng (30) vào vế phải ta được:

$$X_c X^{b;a} X_{b;a} = -2K^2 X_c$$

$$K^2 = -\frac{1}{2}X^{b;a}X_{b;a} \tag{31}$$

Thay giá trị X^a từ biểu thức (29) vào (31) ta tính được K cho nghiệm Kerr. Tuy chỉ là phép tính đơn giản nhưng phải mất khá nhiều thời gian ta mới nhận được kết quả:

$$K = \frac{\left(M^2 - a^2\right)^{1/2}}{2Mr_+} = \frac{4\pi}{A}\left(r_+ - M\right) = \frac{8\pi}{2M}\left(\frac{1}{16\pi} - \frac{4\pi J^2}{A^2}\right) \tag{32}$$

Để tìm công thức vi phân ta bình phương (25):

$$M^2 = \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A} \tag{33}$$

Lấy vi phân (33) ta được:

$$dM = \frac{1}{2M}\left(\frac{1}{16\pi} - \frac{4\pi J^2}{A^2}\right)dA + \frac{4\pi J}{MA}dJ \tag{34}$$

Sau khi thay (32) vào số hạng đầu tiên và (24) vào số hạng thứ hai của vế phải (34) ta được công thức cần tìm:

$$dM = \frac{K}{8\pi}dA + \Omega dJ \tag{35}$$

Trong hệ đơn vị SI công thức (35) sẽ có dạng:

$$d\left(Mc^2\right) = \frac{c^2}{8\pi G}KdA + \Omega dJ \tag{36}$$

4. ĐỊNH LÝ DIỆN TÍCH HAWKING

Một khi đã hình thành thì lỗ đen rất bền vững và không thể bị phá hỏng. Vật chất bao gồm khối lượng hoặc bức xạ khi bay vào lỗ đen chỉ có thể làm thay đổi khối lượng M, mômen động lượng J và điện tích Q. Tuy vậy trong mọi quá trình vật lý liên quan đến chân trời sự kiện thì diện tích chân trời sự kiện sẽ không bao giờ giảm theo thời gian (định lý diện tích Hawking) [4]

$$dA \geq 0 \tag{37}$$

Từ đây ta thấy hai lỗ đen có thể va chạm nhau và kết hợp lại thành lỗ đen mới trong khi một lỗ đen sẽ không bao giờ bị chia làm hai lỗ đen nhỏ hơn. Diện tích chân trời của lỗ đen mới sẽ lớn hơn diện tích chân trời của hai lỗ đen ban đầu.

$$A_3 \geq A_1 + A_2 \tag{38}$$

A_1, A_2: diện tích chân trời sự kiện của hai lỗ đen trước khi va chạm.

A_3: diện tích chân trời sự kiện của lỗ đen mới được hình thành sau va chạm.

Việc chứng minh định lý trên rất phức tạp nên ta không xét ở đây [Hawking-Ellis-trang 318, 333]

5. HẤP DẪN BỀ MẶT

Viết lại công thức (32)

$$K = \frac{4\pi}{A}(r_+ - M) = \frac{4\pi}{A}\left(M^2 - a^2\right)^{1/2} \tag{39}$$

Với lỗ đen không quay ta có J =0 hay a=0. Khi đó K có dạng:

$$K = \frac{4\pi M}{A} \text{ (viết trong hệ G=c=1)}$$

Chuyển sang hệ đơn vị SI ta có:

$$K = \frac{4\pi GM}{A} \tag{40}$$

A: diện tích của lỗ đen không quay và bằng $4\pi R_S^2$

R_s: bán kính Schwarzschild và bằng $2GM/c^2$

Thay lại vào (40) ta được K tại bề mặt lỗ đen không quay tính trong hệ đơn vị SI.

$$K = \frac{c^4}{4GM} \tag{41}$$

Đây chính là gia tốc trọng trường tại bề mặt lỗ đen không quay tính theo lý thuyết hấp dẫn Newton. Đó là lý do tại sao K có tên gọi là hấp dẫn bề mặt. Từ (39) ta nhận thấy K bằng Zero khi M=a. Mặt khác, khi M=a ta nhận thấy lỗ đen sẽ không phải là vật thể có lực hút đối với quan sát viên ở xa lỗ đen. Do đó, ta có thể đi tới kết luận hấp dẫn bề mặt luôn lớn hơn zero.

$$K \geq 0 \tag{42}$$

6. TỔNG KẾT

Định luật	Nhiệt động học	Lỗ đen
Thứ Zero	Tại trạng thái cân bằng nhiệt, nhiệt độ là hằng số trên khắp vật $T = const$	Hấp dẫn bề mặt là hằng số trên khắp chân trời sự kiện của lỗ đen dừng: $K=const$
Thứ nhất	$dE = TdS - PdV$	$dM = \frac{K}{8\pi}dA + \Omega dJ$
Thứ hai	Trong mọi quá trình vật lý Entropy của hệ luôn tăng $dS \geq 0$	Trong mọi quá trình vật lý diện tích chân trời luôn tăng theo thời gian $dA \geq 0$
Thứ ba	Trong mọi quá trình vật lý không thể đạt được $T = 0$	Trong mọi quá trình vật lý không thể đạt được: $K = 0$

Nhìn vào bảng so sánh ta thấy có sự giống nhau kỳ lạ về mặt toán học giữa các định luật cơ học lỗ đen với các định luật cơ bản của nhiệt động học. Bắt đầu từ định lý diện tích Hawking ta thấy có sự giống nhau giữa diện tích chân trời A và entropy S. Tiếp theo ta thấy có sự giống nhau giữa số hạng ΩdJ với số hạng công cơ học PdV và thực tế đúng như vậy [6].

Do A đóng vai trò S nên K đóng vai trò nhiệt độ của lỗ đen. Theo thuyết tương đối rộng cổ điển thì nhiệt độ của lỗ đen là không tuyệt đối nên sự tương ứng trên hoàn toàn là hình thức toán học. Tuy vậy, vẫn có một số nhà vật lý lý thuyết hoài nghi và trong số đó có J. Bekenstein và S. Hawking. Năm 1974, Hawking đã phát hiện ra sự bức xạ của lỗ đen và ông tìm ra công thức nhiệt độ lỗ đen.

$$T = \frac{K}{2\pi} \text{ (tích trong hệ đơn vị } G = c = \hbar = k_b = 1)$$

Từ đây ta thấy ngay entropy của lỗ đen sẽ được tính theo công thức Bekenstein-Hawking:

$$S = \frac{A}{4}$$

Như vậy, các định luật của cơ học lỗ đen đúng là các định luật nhiệt động học và cũng từ đây ta bước sang một lĩnh vực mới:nhiệt động học lỗ đen lượng tử (quantum black hole thermodynamics). Về lĩnh vực mới này khi có điều kiện chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc.

Tác giả xin cám ơn sự ủng hộ của các đồng nghiệp khoa Vật lý, sự giúp đỡ của phòng KHCN-SĐH, Trường ĐHSP TP.HCM.

Tác giả bày tỏ sự biết ơn tới giáo sư R. Wald – trường tổng hợp Chicago, giáo sư J. Bekenstein – trường tổng hợp Jerusalem, giáo sư K. Tod – trường tổng hợp Oxford đã giúp đỡ tác giả trong việc hoàn thành bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. J. M. Barden, B. Carter, S. W. Hawking (1973), *The four laws of black hole mechanics*, Commun. math. Phys. 31, 161 – 170.

[2]. J. D. Bekenstein (1973), *Black holes and Entropy*, Phys. Rev D7, 8, 2333 – 2346.

[3]. B. Carter (1979), *General Relativity*, eds. S. W. Hawking & W. Israel – Cambridge U – press – 352 – 385.

[4]. S. W. Hawking, G. Ellis (1973), *the large scale Structure of space – times*, Cambridge U – Press, 91, 318 – 333.

[5]. L. P. Hughston, K. P. Tod (2000), *Introduction to General Relativity* – Cambridge U – Press – 107 – 143

[6]. L. D. Landau, E. Lifshitz (1969), *Statistical Physics*, Addison – Wesley, NewYork.

[7]. Lê Nam (2003), *Trường vécto Killing và tính tương đối xứng của không – thời gian*, Tạp chí KHTN, ĐHSP TP.HCM – số 34 trang 78 – 85.

[8]. R.M. Wald (1999), *Gravitation, Thermodynamics and quantum theory*, Class. Quantum Grav. 16, A177 – A190.

[9]. R.M. Wald (2002), *The thermodynamics of black holes* – Kluwer Academic Publishers – Netherlands.

Abstract:

The Laws of Black Hole Mechanics

There exists a set of striking similarities between the laws governing the equilibrium mechanics of stationary black holes and the classical laws of thermodynamics. This paper presents the set of parameters describing black holes which are the analogues of the properties describing thermodynamic systems. It then develops the black hole mechanical analogue of the zeroth, first, second and third laws of classical thermodynamics in general relativity.