MỘT GHI CHÚ VỀ TÍNH COMPACT, LIÊN THÔNG CỦA TẬP HỢP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TIẾN HÓA

LÊ HOÀN HÓA[1], LÊ THỊ PHƯƠNG NGỌC[2]

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo [3] mới đây, chúng tôi đã đưa ra các điều kiện cho toán tử A và toán tử f để có được tính khác rỗng, compact, liên thông của tập hợp nghiệm của hai bài toán (1), (2). Ở bài báo này, chúng tôi đưa ra một điều kiện mới, tốt hơn cho các toán tử A và f để có được kết quả tương tự.

Bài báo gồm có 4 mục. Trong mục 2, chúng tôi trình bày các giả thiết, các bổ đề và nhắc lại các định lý để sử dụng trong chứng minh các định lý chính ở mục 3. Trong mục 4, chúng tôi đưa ra hai ví dụ để minh họa các kết quả đạt được.

2. Các giả thiết, bổ đề và định lý

Giả sử H là không gian Hilbert, chuẩn được sinh ra bởi tích vô hướng (.,.) trong H được ký hiệu là $|\cdot|$. $X = C([0,1]; H)$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm liên tục u: $[0, 1] \to H$, với chuẩn thông thường $\|u\| = \sup\limits_{0\le t\le 1} |u(t)|$. Chuẩn của các toán tử tuyến tính bị chặn cũng được ký hiệu là $\|\cdot\|$.

Chúng tôi có các giả thiết như sau:

(A_1). $A : H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp, không phụ thuộc t .

(A_2). $f : H \to H$ là hoàn toàn liên tục và thỏa điều kiện:

Có các số không đổi $a > 0, b > 0,\ 0 \le \alpha < 1$ sao cho

$$|f(x)| \le a + b|x|^{\alpha},\ \forall x \in \mathrm{H}.$$

---

[1] PGS-TS Trường ĐHSP Tp.HCM.

[2] Thạc sĩ Trường CĐSP Nha Trang.

Chúng tôi có các bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Giả sử A thỏa mãn giả thiết* (A_1). *Khi đó A là toán tử tuyến tính bị chặn.*

Chứng minh: A thỏa (A_1), vì thế $A : H \to H$ là toán tử tuyến tính có tính chất

$$(Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in H.$$

Đặt $\overline{B}(0, 1) = \{u \in H : |u| \leq 1\}$.

Với mọi $u \in \overline{B}$, giả sử $T_u : H \to R$ được xác định như sau:

$$T_u(v) = (Au, v), \forall v \in H.$$

Rõ ràng T_u là toán tử tuyến tính và $\|T_u\| \leq |Au|$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $Au \neq 0$. Đặt $v = \dfrac{Au}{|Au|}$.

Khi đó $|v| = 1$ và $T_u(v) = (Au, \dfrac{Au}{|Au|}) = |Au|$.

Suy ra $$\|T_u\| = |Au|, \ \forall u \in \overline{B}.$$

Vì A tự liên hợp, nên với mọi $u \in \overline{B}$:

$$|T_u(v)| = |(Au, v)| = |(u, Av)| \leq |Av|, \forall v \in H.$$

Do đó $$\sup_{u \in \overline{B}} |T_u(v)| \leq |Av|, \forall v \in H.$$

Theo nguyên lý bị chặn đều của Banach, tồn tại $M > 0$ sao cho :

$$\|T_u\| \leq M, \forall u \in \overline{B}.$$

Nên $$|Au| = \|T_u\| \leq M, \forall u \in \overline{B}.$$

Vậy A bị chặn. Bổ đề 2.1 được chứng minh.

Bổ đề 2.2. *Giả sử A thỏa giả thiết* (A_1) *và toán tử* $U: X \to X$ *được định nghĩa như sau:*

$$Uu(t) = -\int_0^t Au(s)\, ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Khi đó U là toán tử tuyến tính bị chặn và có tính chất:

$$\|U^n\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}, \ \forall n \in N.$$

Chứng minh: Rõ ràng U là toán tử tuyến tính. Theo bổ đề 2.1, ta có A bị chặn.

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp, ta có thể kết luận rằng: $\forall u \in X$, $\forall t \in [0,1]$,

$$|U^n(u)(t)| \le \frac{\|A\|^n}{n!}\|u\| t^n, \forall n \in N.$$

Suy ra $$\|U^n(u)\| \le \frac{\|A\|^n}{n!}\|u\|, \forall n \in N.$$

Từ đó $$\|U^n\| \le \frac{\|A\|^n}{n!}, \forall n \in N.$$

Bổ đề 2.2 được chứng minh.

Bổ đề 2.3. *Giả sử f thỏa giả thiết (A_2) và toán tử $F: X \to X$ được định nghĩa như sau:*

$$F(u)(t) = \int_0^t f(u(s))\, ds, \ \forall t \in [0,1],$$

Khi đó F hoàn toàn liên tục và $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \frac{\|F(u)\|}{\|u\|} = 0.$

Chứng minh : Trước hết ta chứng minh F liên tục.

Với mọi $u_0 \in X$, giả sử $(u_n)_n$ là một dãy trong X sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$.

Đặt $B_1 = \{u_n(t) : t \in [0, 1], n \in Z_+\}$. Khi đó B_1 là tập compact trong H.

Với mọi $\varepsilon > 0$, từ tính liên tục đều của f trên tập compact B_1, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall\, y, z \in B_1, \ |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon/2.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, có số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$,

$$|u_n(t) - u_0(t)| < \delta, \forall t \in [0, 1].$$

Suy ra với mọi $n \ge n_0$, ta có:

$$|F(u_n)(t) - F(u_0)(t)| \le \int_0^t |f(u_n(s)) - f(u_0(s))| ds \le \varepsilon/2, \forall t \in [0, 1].$$

$$\Rightarrow \quad \|F(u_n) - F(u_0)\| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Vậy F liên tục.

Tiếp theo, ta giả sử Ω là tập con bị chặn của X.

Đặt $B_2 = \{u(t): u \in \Omega, t \in [0, 1]\}$, thì B_2 bị chặn trong H. Vì f hoàn toàn liên tục, nên $f(B_2)$ là tập compact tương đối. Thành thử $f(B_2)$ bị chặn. Do đó tồn tại $M > 0$, sao cho:

$$|f(y)| \le M, \forall y \in B_2.$$

Khi đó, với mọi $u \in \Omega$ và $t_1, t_2 \in [0, 1]$, ta có:

$$|F(u)(t_1) - F(u)(t_2)| \leq \left|\int_{t_1}^{t_2} f(u(s))ds\right| \leq M\,|t_2 - t_1|.$$

Điều này chứng tỏ F(Ω) đẳng liên tục.

Mặt khác, $\forall\, u \in \Omega$ và $\forall\, t \in [0, 1]$, ta có

$$|F(u)(t)| \leq \int_0^t |f(u(s))|ds \leq M,$$

nên F(Ω) bị chặn đều.

Áp dụng định lý Ascoli - Arzelà, ta có $F(\Omega)$ compact tương đối trong X.
Ta kết luận rằng F hoàn toàn liên tục.
Ngoài ra, $\forall\, u \in X$ và $\forall t \in [0, 1]$, ta có

$$|f(u(t))| \leq a + b\,|u(t)|^{\alpha},$$

nên $$|F(u)(t)| \leq \int_0^t |f(u(s))|ds \leq \int_0^t (a + b|u(s)|^{\alpha})\,ds \leq a + b\|u\|^{\alpha}.$$

Suy ra $\forall\, u \in X$, $\quad \|F(u)\| \leq a + b\|u\|^{\alpha}$,

ở đây $a, b > 0$ và $0 \leq \alpha < 1$.

Vậy $$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|F(u)\|}{\|u\|} = 0.$$

Bổ đề 2.3 được chứng minh.

Chúng tôi nhắc lại các định lý sau để sử dụng cho các chứng minh ở mục tiếp theo.

Định lý 2.4.

Giả sử $(E, |.|)$ là không gian Banach, D là tập con mở và bị chặn của E với biên ∂D và bao đóng $\overline{D}$, $T : \overline{D} \to E$ là toán tử compact. Giả sử T thoả mãn các điều kiện sau:
(i) T không có điểm bất động trên ∂D và $\deg(I\text{-}T,\ D,\ 0) \neq 0$.
(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, có toán tử compact T_ε sao cho $\forall x \in \overline{D}$,

$$|T_\varepsilon(x) - T(x)| < \varepsilon,$$

và sao cho với mỗi h mà $|h| < \varepsilon$, phương trình $x = T_\varepsilon(x) + h$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\overline{D}$.
Khi đó tập hợp các điểm bất động của T khác rỗng, compact và liên thông.
Chứng minh của định lý 2.4 có thể tìm thấy ở [4, p. 312, theorem 48.2].

Định lý 2.5.

Giả sử E, F là các không gian Banach, D là tập con mở của E và $f: D \to F$ liên tục. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, có một ánh xạ Lipschitz địa phương $f_\varepsilon: D \to F$ sao cho

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in D,$$

và $$f_\varepsilon(D) \subset cof(D),$$

ở đây $cof(D)$ là bao lồi của $f(D)$.

Chứng minh của định lý 2.5 có thể tìm thấy trong [1, Ch. 2, p. 53].

Định lý 2.6. (Tietze (1915), Dugundji (1951))

Giả sử M là một tập con đóng khác rỗng của không gian metric X, Y là không gian định chuẩn và $f: M \to Y$ là toán tử liên tục. Khi đó có một ánh xạ liên tục $g: X \to Y$ sao cho:

(i) $g(X) \subset co(f(M))$, ở đây $cof(M)$ là bao lồi của $f(M)$.

(ii) $g(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$.

Chứng minh của định lý 2.6 có thể tìm thấy trong [6, ch. 2, p.49].

3. Các kết quả chính

Định lý 3.1. *Giả sử A và f thỏa mãn các giả thiết* (A_1), (A_2), *tương ứng và χ là vectơ cho trước trong H. Khi đó tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình* (1) *khác rỗng, compact và liên thông.*

Định lý 3.2. *Giả sử A và f thỏa mãn các giả thiết* (A_1), (A_2), *tương ứng và χ là vectơ cho trước trong H. Khi đó tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình* (2) *khác rỗng, compact và liên thông.*

Chứng minh của định lý 3.1.

Phương trình (1) tương đương với phương trình tích phân:

$$u(t) = -\int_0^t Au(s)ds + \int_0^t f(u(s))ds + \chi, \ \forall t \in [0, 1]. \tag{3.1}$$

Giả sử các toán tử $U: X \to X$, $F: X \to X$ được định nghĩa như sau:

$$Uu(t) = -\int_0^t Au(s)\, ds, \ \forall t \in [0,1],$$

$$F(u)(t) = \int_0^t f(u(s))\, ds + \chi, \ \forall t \in [0,1],$$

Theo bổ đề 2.2, U là toán tử tuyến tính và có tính chất:

$$\|U^n\| \le \frac{\|A\|^n}{n!}, \ \forall n \in N.$$

Suy ra toán tử $(I-U)^{-1}$ hoàn toàn được xác định và tuyến tính liên tục trong X, [2, theorem 1].

Theo bổ đề 2.3, F hoàn toàn liên tục và $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\|F(u)\|}{\|u\|} = 0$.

Đặt

(3.2) $T = (I - U)^{-1}F$.

Thì T hoàn toàn liên tục và

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = 0.$$

Suy ra với số ρ được chọn đủ nhỏ, $0 < \rho < 1$, tồn tại $R_1 > 0$ sao cho với mỗi $u \in X$ thỏa mãn điều kiện $\|u\| > R_1$, ta có:

$$\|T(u)\| < \rho\|u\|.$$

Đặt $\overline{B}(0, R_1) = \{u \in X : \|u\| \leq R_1\}$.

Vì T compact, ta có $T(\overline{B})$ bị chặn. Do đó, tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$\|T(u)\| \leq M, \forall\ u \in \overline{B}.$$

Như thế, ta có:

$$\|T(u)\| \leq M + \rho\|u\|, \forall\ u \in X.$$

Chọn $R_2 > 0$ sao cho $R_2 > R_1$ và $R_2 > M/(1-\rho)$.

Đặt $D = \{u \in X : \|u\| < R_2\}$. Thì D là hình cầu mở trong X.

Rõ ràng, $\forall\ u \in D$, ta có

$$\|T(u)\| \leq M + \rho\|u\| \leq M + \rho R_2 < R_2.$$

Mặt khác, $\forall\ u \in \partial D$, tức là $\|u\| = R_2 > R_1$, ta có

$$\|T(u)\| < \rho\|u\| < R_2.$$

Vậy thì $T(\overline{D}) \subset D$, ở đây $\overline{D} = \{u \in X : \|u\| \leq R_2\}$ là bao đóng của D trong X.

Suy ra T không có điểm bất động trên ∂D và:

(3.3) $deg\,(I - T, D, 0) = 1$.

Ta lại có

$$u^* = T(u^*) = (I - U)^{-1}F(u^*) \Leftrightarrow (I - U)\,u^* = F(u^*) \Leftrightarrow u^* = U(u^*) + F(u^*).$$

Nên tập hợp các điểm bất động của T trong $\overline{D}$ cũng là tập hợp các điểm bất động của $U + F$, đó cũng chính là tập hợp các nghiệm của phương trình (1) (xét trên $\overline{D}$). Như thế định lý 3.1 sẽ được chứng minh hoàn toàn nếu ta chứng minh được tập hợp các điểm bất động của T trong $\overline{D}$ khác rỗng, compact và liên thông.

Đặt $K = \{u(t) / t \in [0,1], u \in D\}$. Thì K bị chặn trong H. Nên bao đóng của K là $\overline{K}$ cũng bị chặn. Ta chú ý rằng, $\forall u \in \overline{D}$ và $\forall t \in [0, 1]$, $u(t) \in \overline{K}$.

Theo định lý 2.6, có ánh xạ liên tục f* là mở rộng của ánh xạ $f/\overline{K}$ ra H, ở đây $f/\overline{K}$ là ký hiệu ánh xạ thu hẹp của f trên $\overline{K}$, sao cho:

$$f^*(H) \subset co\, f(\overline{K}).$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, theo định lý 2.5, có ánh xạ lipschitz địa phương $f_\varepsilon : H \to H$, sao cho

(3.4) $$|f_\varepsilon(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2\left\|(I-U)^{-1}\right\|}, \forall x \in H,$$

và $$f_\varepsilon(H) \subset co f^*(H) \subset co\, f(\overline{K}).$$

Vì f hoàn toàn liên tục, nên $f(\overline{K})$ compact tương đối. Suy ra $f_\varepsilon(H)$ compact tương đối. Do đó f_ε hoàn toàn liên tục.

Định nghĩa toán tử $F_\varepsilon : X \to X$ như sau:

$$F_\varepsilon(u)(t) = \int_0^t f_\varepsilon(u(s))ds + \chi, \forall t \in [0, 1].$$

Khi đó theo bổ đề 2.3, F_ε hoàn toàn liên tục.

Từ (3.4) ta có, $\forall u \in \overline{D}$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\left\|F_\varepsilon(u)(t) - F(u)(t)\right\| \le \int_0^t \left|f_\varepsilon(u(s)) - f(u(s))\right| ds$$
$$\le \int_0^t \left|f_\varepsilon(u(s)) - f^*(u(s))\right| ds \le \frac{\varepsilon}{2\left\|(I-U)^{-1}\right\|}.$$

nên $$\left\|F_\varepsilon(u) - F(u)\right\| \le \frac{\varepsilon}{2\left\|(I-U)^{-1}\right\|}.$$

Đặt

(3.5) $$T_\varepsilon = (I - U)^{-1} F_\varepsilon.$$

Thì T_ε hoàn toàn liên tục.

Mặt khác $\forall u \in \overline{D}$, ta có:

(3.6) $$\left\|T_\varepsilon(u) - T(u)\right\| \le \left\|(I-U)^{-1}\right\| \left\|F_\varepsilon(u) - F(u)\right\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Với mỗi h mà $\|h\| < \varepsilon$, ta sẽ chứng minh phương trình sau có nhiều nhất một nghiệm trên $\overline{D}$:

(3.7) $$u = T_\varepsilon(u) + h.$$

Giả sử u, v là hai nghiệm của phương trình (3.7). Khi đó u, v là hai nghiệm của phương trình:

$$u = (I - U)^{-1}F_\varepsilon(u) + h \Leftrightarrow (I - U)\,u = F_\varepsilon(u) + (I - U)\,h$$
$$\Leftrightarrow u = U(u) + F_\varepsilon(u) + h - U(h).$$

Cần chứng minh

(3.8) $u(t) = v(t), \forall\, t \in [0, 1]$.

Rõ ràng

(3.9) $u(0) = v(0) = h(0)$.

Đặt :

(3.10) $b = max\,\{\alpha \in [0, 1] \,/\, u(t) = v(t),\ t \in [0, \alpha]\}$.

Hiển nhiên $b \geq 0$.

Giả sử b <1. Vì f_ε là lipschitz địa phương, nên có $r > 0$ sao cho f_ε là lipschitz với hằng số lipschitz là m trên B_r, ở đây

$$B_r = \{z \in H \,/\, |z - u(b)| < r\}.$$

Hai hàm u, v liên tục, do đó có $\sigma > 0$ sao cho $b+\sigma \leq 1$ và $u(s), v(s) \in B_r \ \forall s \in [b, b+\sigma]$. Ta chú ý rằng $[b, b+\sigma] \subset [0, 1]$. Với mọi $t \in [b, b+\sigma]$, ta có:

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_b^t \|Au(s) - Av(s)\| ds + \int_b^t \|f_\varepsilon(u(s)) - f_\varepsilon(v(s))\| ds \leq (\|A\| + m) \int_b^t \|u(s) - v(s)\| ds.$$

Áp dụng bổ đề Gronwall, ta nhận được $u(t) = v(t)$, $\forall\, t \in [b, b+\sigma]$.

Suy ra

(3.11) $u(t) = v(t), \forall\, t \in [0, b+\sigma]$.

Rõ ràng (3.11) hoàn toàn mâu thuẫn với (3.10). Như thế (3.8) đúng.

Kết hợp (3.2), (3.3), (3.5)-(3.7) và áp dụng định lý 2.4, ta có tập hợp các điểm bất động của T trong $\overline{D}$ khác rỗng, compact và liên thông.

Định lý 3.1 được chứng minh.

Chứng minh định lý 3.2.

Với mỗi $u \in X$, đặt $v : [0, 1] \to H$ như sau:

$$v(t) = u(1 - t), \forall t \in [0, 1].$$

Khi đó phương trình (2) tương đương với phương trình:

$$\begin{cases} -v'(1-t) + Av(1-t) = f(v(1-t)), & 0 \leq t \leq 1 \\ v(0) = \chi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_s - Av(s) = -f(v(s)), & 0 \leq s \leq 1 \\ v(0) = \chi \end{cases},$$

ở đây $s = 1 - t$.

Áp dụng định lý 3.1, ta có tập hợp các nghiệm của phương trình trên khác rỗng, compact và liên thông. *Định lý 3.2 được chứng minh.*

4. Các ví dụ

Xét các phương trình sau trong không gian một chiều **R**.

Ví dụ 1.

(4.1) $x'(t) + a\,x(t) = [x(t)]^{1/3},\ 0 \le t \le 1,$

(4.2) $x(0) = 0\,,$

(4.3) $x(1) = 0,$

ở đây $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ cho trước.

Rõ ràng các phương trình (4.1)–(4.2) và (4.1)–(4.3) thỏa các điều kiện của các định lý 3.1, 3.2 tương ứng. Nên tập hợp các nghiệm của các phương trình này khác rỗng, compact, liên thông.

Giải phương trình (4.1), ta có tập hợp các nghiệm của (4.1) thỏa mãn (4.2) là tập hợp các hàm số x_C được xác định như sau

$$(4.4)\qquad x_C(t) = \begin{cases} \left(Ce^{-\frac{2at}{3}} + \dfrac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{nếu } \dfrac{3}{2a}\ln(-aC) < t \le 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 \le t \le \dfrac{3}{2a}\ln(-aC) \end{cases},$$

với mỗi số C thỏa mãn điều kiện : $-(1/a)e^{2a/3} \le C \le -1/a$.

Nhưng chỉ có duy nhất nghiệm $x = 0$ của (4.1) thỏa mãn (4.3), $x(t) = 0,\ \forall\, t \in [0, 1]$.

Ví dụ 2. (4.5) $x'(t) = -[x(t)]^{1/3},\ 0 \le t \le 1,$

(4.6) $x(0) = 0\,,$

(4.7) $x(1) = 0,$

Tương tự ví dụ 1, ta có tập hợp các nghiệm của các phương trình (4.5)–(4.6) và (4.5)–(4.7) khác rỗng, compact, liên thông.

Giải (4.5), ta có tập hợp các nghiệm của (4.5) thỏa mãn (4.7) là tập hợp các hàm số x_C được xác định như sau

$$(4.8)\qquad x_C(t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2}{3}(C-t)\right]^{\frac{3}{2}}, & \text{nếu } 0 \le t < C \\ 0\,, & \text{nếu } C \le t \le 1 \end{cases},$$

với mỗi số C sao cho $0 \le C \le 1$.

Và chỉ có duy nhất nghiệm $x = 0$ của (4.5) thỏa mãn (4.6).

Từ đó ta thấy rằng nếu các phương trình được xét ở trên có hai nghiệm khác nhau thì sẽ có một lực lượng continuum các nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. Deimling (1985), *Nonlinear functional analysis*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[2] L.H. Hoa - K. Schmitt (1994), *Fixed point Theorem of Krassnosel'skii type in locally convex spaces and applications to integral equations*, Results in Math **28**, 290 - 314.

[3] L. H. Hóa - L. T. P. Ngọc (4/2004), *Tính compact, liên thông của tập hợp nghiệm của bài toán tiến hóa*, Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP Tp. HCM, Số **2** (36).

[4] M.A. Krasnosel'skii P.P. Zabreiko (1984), *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.

[5] Nguyen Thanh Long - Alain Pham Ngoc Dinh (1996), *Note on a regularization of a parabolic nonlinear evolution equation backwards in time*, Inverse Problems, **12**, No.4, 455-462.

[6] Eberhard Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, Part I.

Tóm tắt:

Một ghi chú về tính compact, liên thông của tập hợp nghiệm của bài toán tiến hóa

Bài báo chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của các phương trình sau là khác rỗng, compact và liên thông :

$$(1)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases},$$

$$(2)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases},$$

ở đây:

(A_1). A là toán tử tuyến tính tự liên hợp trong không gian Hinbe H, không phụ thuộc t.

(A_2). $f : H \longrightarrow H$ hoàn toàn liên tục, thỏa điều kiện:

Có các số dương không đổi a, b và α $(0 \le \alpha < 1)$ sao cho $|f(x)| \le a + b|x|^{\alpha}$, $\forall x \in H$.

Công cụ chính là lý thuyết bậc tôpô của trường vectơ compact và các tính chất của toán tử tự liên hợp trong không gian Hinbe.

Abstract:

Note on the connectivity and compactness of solution set of the evolution problem

The paper proves that for the following equations the sets of solutions are nonempty, compact and connected :

$$(1)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le f \le 1 \\ u(0) = \chi \end{cases};$$

$$(2)\begin{cases} u_t + Au = f(u) & 0 \le t \le 1 \\ u(1) = \chi \end{cases}$$

where:

(A_1). A is any self-adjoint operator which does not depend on t and χ is a given vector in a Hilbert space H.

(A_2). f: $H \longrightarrow H$ is completely continuous and satisfies the following condition:

There are positive constants a, b, α $(0 \le \alpha < 1)$ such that $|f(x)| \le a + b|x|^{\alpha}$, $\forall x \in H$.

The main tools are the topological degree theory of compact vector field and properties of the self-adjoint operator.