BẤT ĐẲNG THỨC KY FAN TRONG KHÔNG GIAN SIÊU LỒI

LÊ THÁI DUY[1]

1 Kiến thức cơ sở

Định nghĩa 1.1. [1] *Không gian* siêu lồi *X là không gian mêtric (X, d) thỏa : Với mọi điểm x_i của X, mọi số thực không âm r_i $(i \in \mu)$ sao cho $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ $(i, j \in \mu)$ ta có $\bigcap_{i\in\mu} B(x_i, r_i) \neq \emptyset$*

$(B(x_i, r_i)$: ký hiệu hình cầu đóng tâm x_i, bán kính $r_i)$.

• Đường thẳng thực $\mathbb{R}$, không gian $l^\infty(I)$ với I bất kì là các ví dụ tiêu biểu về không gian siêu lồi.

Định nghĩa 1.2. *Cho không gian mêtric (X, d), $A \subset X$. Tập A gọi là* chấp nhận được *của X khi A là giao của các hình cầu đóng với bán kính không âm.*

Họ mọi tập chấp nhận được của X ký hiệu là $\mathcal{A}(X)$.

Bao chấp nhận được của tập $A \subset X$ là giao của mọi tập chấp nhận được của X, chứa A ; ký hiệu là $ad(A)$.

Định nghĩa 1.3. *Ánh xạ T từ không gian mêtric (X, d) vào không gian mê tric (Y, ρ) được gọi là* không giãn *khi*

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ \rho(T(x_1), T(x_2)) \leq d(x_1, x_2).$$

Tính chất của không gian siêu lồi [1]

1. Mọi không gian siêu lồi đầy đủ.
2. Mọi tập chấp nhận được của một không gian siêu lồi đều siêu lồi.
3. Không gian X là siêu lồi khi và chỉ khi với mọi không gian Z chứa X một cách đẳng cự, tồn tại ánh xạ không giãn $r : Z \to X$ sao cho $r(x) = x$ với mọi $x \in X$. Nếu Z là không gian định chuẩn thì với mọi bộ hữu hạn $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$ ta có $r(co\{x_1, x_2, ..., x_n\}) \subset ad(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$.

[1] ThS, Đại học An Giang.

Nguyên lý điểm bất động Brouwer [2]

Mọi ánh xạ liên tục từ hình cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{R}^n$ vào chính nó đều có điểm bất động.

Nguyên lý trên vẫn đúng nếu thay hình cầu đơn vị đóng bằng một tập lồi, đóng, bị chặn trong không gian tuyến tính hữu hạn chiều tùy ý.

Định nghĩa 1.4. *Cho X là không gian mêtric, $C \subset X$. Ánh xạ đa trị $F : C \to 2^X$ được gọi là ánh xạ KKM khi*

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in C^n, ad(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Định nghĩa 1.5. *Cho X là không gian siêu lồi. Hàm số $f : C \to \mathbb{R}$ được gọi là* tựa lõm (tựa lồi) *khi $\{x \in C : f(x) \geq (\leq)\lambda\}$ chấp nhận được với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Mệnh đề 1.1. *Cho X là không gian mêtric. Khi đó tồn tại tập chỉ số I và một phép nhúng đẳng cự $i : X \to l^\infty(I)$.*

Chứng minh. Đặt $I = X$ và $i : X \to l^\infty(I)$ với $i(x) = \{d(x, y) - d(x_0, y)\}_{y \in X}$; x_0 là một điểm cố định của X. Khi đó

$$\forall (x, y) \in X^2, \| i(x) - i(y) \| = sup\{| d(x, z) - d(y, z) | : z \in X\} = d(x, y).$$

Vậy i là phép nhúng đẳng cự.

Do đó, có thể đồng nhất X với $i(X)$ và viết $X \subset l^\infty(I)$. Vì $l^\infty(I)$ là không gian mêtric tuyến tính nên có thể đặt

$$X_\infty = ad(X) \in \mathcal{A}(l^\infty(\mathrm{I})).$$

Vậy X_∞ vừa là tập chấp nhận được trong không gian mêtric $l^\infty(\mathrm{I})$, vừa là tập lồi trong không gian tuyến tính $l^\infty(I)$. □

Đây là điều rất quan trọng để xây dựng lý thuyết KKM trong không gian siêu lồi.

Định lí 1.1 (Định lí ánh xạ KKM (Khamsi, 1996 [3])). *Cho X là không gian siêu lồi, C là tập con bất kì của X, $F : C \to 2^X$ là một ánh xạ KKM sao cho $F(x)$ đóng với mỗi $x \in C$. Khi đó họ $\{F(x) : x \in C\}$ có tính chất giao hữu hạn.*

Chứng minh. (bằng phản chứng)

Giả sử tồn tại $x_1, ..., x_2 \in C$ sao cho $\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) = \emptyset$. Đặt $L = ad(\{x_i\}) \subset X$. Khi đó tập $X_\infty = ad(X) \subset l^\infty(I)$ là siêu lồi và cũng là tập lồi trong $l^\infty(I)$.

Vì $C \subset X \subset X_\infty \subset l^\infty(I)$ nên $x_i \in C \subset X_\infty$ và $\triangle = co(\{x_i\}) \subset X_\infty$. Khi đó, tồn tại ánh xạ không giãn $r : X_\infty \to X$ và $r(x) = x$ với mọi $x \in X$, ngoài ra $r(\triangle) \subset L$. .

Vì L đóng nên tập $G(x_i) = L \cap F(x_i)$ đóng và từ giả thiết phản chứng suy ra $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \emptyset$.

Với mỗi $x \in \triangle$ đặt $\beta_i(x) = d(r(x), G(x_i))$. Vì $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \emptyset$ nên với mỗi $x \in \triangle$ tồn tại i để cho $\beta_i(x) > 0$. Vậy có thể đặt

$$\eta_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j(x)}, x \in \triangle$$

và ánh xạ $f : \triangle \to \triangle$ định bởi : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x) x_i$.

Do β_i là các hàm liên tục nên các η_i cũng liên tục, vậy f liên tục.

Theo nguyên lý điểm bất động Brouwer, tồn tại $x_* = f(x_*)$. Đặt $I_0 = \{i : \beta_i(x_*) > 0\}$, khi đó

$$x_* = \sum_{i \in I_0} \eta_i(x_*) x_i. \tag{1}$$

Vì $\eta_i(x_*) > 0$ suy ra $r(x_*) \notin G(x_i)$ do đó $r(x_*) \notin F(x_i)$, mọi $i \in I_0$.

Vậy

$$r(x_*) \notin \bigcup_{i \in I_0} F(x_i). \tag{2}$$

Vì từ (1) suy ra $x_* \in co(\{x_i : i \in I_0\})$ nên

$$r(x_*) \in r(co(\{x_i : i \in I_0\})) \subset ad(\{x_i : i \in I_0\})$$

và từ (2) suy ra $ad(\{x_i : i \in I_0\}) \not\subset \bigcup_{i \in I_0} F(x_i)$ mâu thuẫn với giả thiết F là ánh xạ KKM. Định lý đã được chứng minh. □

⋆ *Để định lý có kết quả mạnh hơn :* $\bigcap_{x \in C} F(x) \neq \emptyset$, *cần thêm vào giả thiết một trong hai điều kiện sau :*

1) hoặc C là tập hữu hạn.

2) hoặc tồn tại $x_0 \in C$ sao cho $F(x_0)$ compact.

(Chỉ việc thay mỗi $F(x)$ bởi $F(x) \cap F(x_0)$ ta được một họ tập đóng trong một tập compact. Khi đó để $\bigcap_{x \in C} F(x) \neq \emptyset$ chỉ cần đòi hỏi tính giao hữu hạn của $\{F(x) : x \in C\}$).

2 Bất đẳng thức Ky Fan

Định lí 2.1 (Định lí bất đẳng thức Ky Fan). *Cho X là một không gian siêu lồi, C là tập compact thuộc $\mathcal{A}(X)$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn :*

1) Với mỗi $x \in C$, hàm số $f : w = f(x, y)$ là nửa liên tục dưới theo y,

2) Với mỗi $y \in C$, hàm số $f : w = f(x, y)$ là tựa lõm theo x,

3) Với mỗi $x \in C$, $f(x, x) \leq 0$.

Khi đó tồn tại $y^* \in C$ sao cho $f(x, y^*) \leq 0$ với mọi $x \in C$.

Chứng minh. Đặt $F(x) = \{y \in C : f(x, y) \leq 0\}, x \in C$ nên từ 1), $F(x)$ đóng với mọi $x \in C$. Ta chứng minh F là ánh xạ KKM bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại $\{x_1, x_2, ...x_n\} \subset C$ và $x_0 \in ad\{x_i\}$ (3), $x_0 \notin F(x_i)$ với $i = 1, 2, ...n$. Khi đó $f(x_i, x_0) > 0$ với mọi i.

Đặt $\lambda = \min\limits_{1 \leq i \leq n} f(x_i, x_0) > 0$ và $B = \{z \in C : f(z, x_0) \geq \lambda\}$ (4) nên $x_i \in B$ (5).

Do 2) nên B là chấp nhận được và từ (3), (5) ta có $x_0 \in ad\{x_i\} \subset B$, kết hợp với (4) suy ra $f(x_0, x_0) \geq \lambda > 0$ (mâu thuẫn với 3)).

Vậy F là ánh xạ KKM và $F(x)$ đóng, compact (do $F(x) \subset C$ và C compact) với mọi $x \in C$.

Áp dụng Định lý ánh xạ KKM, ta có $\bigcap_{x \in C} F(x) \neq \emptyset$ nên tồn tại

$$y^* \in \left(\bigcap_{x \in C} F(x) \right) \subset C.$$

Suy ra tồn tại $y^* \in C$ sao cho $f(x, y^*) \leq 0$ với mọi $x \in C$. □

Ứng dụng

Mệnh đề 2.1 (Về điểm bất động của hàm đa trị liên tục). *Cho X là một không gian siêu lồi, C là một tập compact thuộc $\mathcal{A}(X)$, ánh xạ đa trị liên tục $\mathcal{F} : C \to \mathcal{A}(X)$ sao cho $C \cap \mathcal{F}(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in C$. Khi đó $\mathcal{F}$ có điểm bất động.*

Chứng minh. Đặt $f(x, y) = d(y, \mathcal{F}(y)) - d(x, \mathcal{F}(y))$ với mọi $(x, y) \in C^2$.

Ta có $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ và f liên tục theo y với x cố định (do $\mathcal{F}$ liên tục) nên f nửa liên tục dưới theo y với x cố định.

Ta cần chứng minh f tựa lõm theo x với y cố định nghĩa là cần chứng minh:

$$B_0 = \{x \in C : d(x, A) \leq \lambda\} \in \mathcal{A}(X) \text{ với } \mathcal{F}(y) = A \in \mathcal{A}(X),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, do $A \in \mathcal{A}(X)$ nên $A = \bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha)$ với $B(x_\alpha, r_\alpha)$ là hình cầu đóng.

Trước hết ta chứng minh $B_0 = \left(\bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha + \lambda)\right) \bigcap C \quad (6)$

- Hiển nhiên ta có $B_0 \subset \left(\bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha + \lambda)\right) \bigcap C$.
- $\forall x \in \left(\bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha + \lambda)\right) \bigcap C$, $x \in C$ và $d(x, x_\alpha) \leq \lambda + r_\alpha$, mọi α nên $B(x, \lambda) \bigcap B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset$, mọi α (vì X siêu lồi) suy ra
$$B(x, \lambda) \bigcap \left(\bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha)\right) \neq \emptyset.$$

Vậy $B(x, \lambda) \bigcap A \neq \emptyset$ suy ra $d(x, A) \leq \lambda$ và vì $x \in C$ nên $x \in B_0$.

Từ (3) và $\left(\bigcap_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha + \lambda)\right) \bigcap C \in \mathcal{A}(X)$ nên $B_0 \in \mathcal{A}(X)$ do đó f tựa lõm theo x với y cố định.

Áp dụng bất đẳng thức Ky Fan : tồn tại $y^* \in C$ sao cho $f(x, y^*) \leq 0$ với mọi $x \in C$ nghĩa là

$$d(y^*, \mathcal{F}(y^*)) \leq d(x, \mathcal{F}(y^*)) \text{ với mọi } x \in C \quad (7)$$

nên với $x_0 \in C \cap \mathcal{F}(y^*)$ (do $C \cap \mathcal{F}(x) \neq \emptyset$, mọi $x \in C$) và từ (7) ta có

$$d(y^*, \mathcal{F}(y^*)) \leq d(x_0, \mathcal{F}(y^*)) = 0.$$

Suy ra $y^* \in \mathcal{F}(y^*)$ (do $\mathcal{F}(y^*)$ đóng).

Vậy $\mathcal{F}$ có điểm bất động $y^* \in C$. □

Tài liệu

[1] A.Aronszajn and P.Panitchpakdi (1956),*Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J.Math., 6, 405 - 439.

[2] L.E.J.Brouwer (1921),*Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math.Ann., 71, 97-115.

[3] M.A.Khamsi (1996),*KKM and Ky Fan theorems in hyperconvex spaces*, J.Math.Anal.Appl., 204, 298-306.

[4] W.A.Kirk,B.Sims and G.Xian-Zhi Yuan (2000),*The Knaster-Kuratowski and Mazurkiewicz theory in hyperconvex metric spaces and its applications*, Nonlinear Analysis, 39, 611-627.

[5]D.H.Tân (2003),*Các định lý điểm bất động*, NXB ĐHSP, 66-125.

Tóm tắt :

Bất đẳng thức Ky Fan trong không gian siêu lồi

Trong giải tích phi tuyến, vai trò của bất đẳng thức Ky Fan được đánh giá cao qua sự gắn bó mật thiết giữa nó với hàng loạt những kết quả quan trọng về điểm bất động. Chúng ảnh hưởng rất lớn đến việc nghiên cứu sự tồn tại, tính ổn định và xấp xỉ nghiệm phương trình, nghiệm bao hàm thức phi tuyến. Gần đây, nhờ công trình có tính mở đường của Khamsi, không gian siêu lồi được sử dụng nhiều trong việc nghiên cứu điểm bất động cho ánh xạ liên tục.

Ý tưở ng chính của bài báo là giới thiệu một nghiên cứu mới về bất đẳng thức Ky Fan trong không gian siêu lồi và ứng dụng điển hình của nó.

Abstract :

Ky Fan inequality in hyperconvex metric space

Ky Fan inequality is one of the specially good inequalities of nonlinear analysis due to its own importance on the theory as well as application. In this paper, our main concern is Ky Fan inequality in hyperconvex metric space. Recently, it has been used as an effective tool to discover some new results on fixed points of a continuous multifunction.