BỔ ĐỀ FARKAS CHO HỆ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC GỒM CÁC HÀM LỒI VÀ HÀM DC

NGUYỄN ĐỊNH [1] , TRẦN THÁI AN NGHĨA [2]

1 Giới thiệu

Bổ đề Farkas, cho các hệ bất đẳng thức tuyến tính, đóng một vai trò cơ bản trong lý thuyết tối ưu, tuyến tính cũng như phi tuyến. Trong những năm gần đây, Bổ đề Farkas được mở rộng cho hệ chứa các bất đẳng thức lồi và các ràng buộc hình học (xem [3, 4, 5, 12, 14] và tổng quan về các mở rộng của Bổ đề Farkas trong [2]). Các kết quả này đã được sử dụng thành công để nghiên cứu các bài toán tối ưu lồi dạng

$$\begin{array}{lrl} (\mathrm{P}) & \inf & f(x) \\ & \text{với ràng buộc} & x \in C,\ h(x) \in -S. \end{array}$$

Ở đây X, Z là các không gian Banach, S là một nón lồi đóng trong Z, C là một tập lồi đóng trong X, còn $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi chân chính, nửa liên tục dưới và $h : X \to Z$ là một ánh xạ S-lồi liên tục.

Nhiều bài toán thực tế có mô hình toán học là các bài toán tối ưu không lồi có dạng

$$\begin{array}{lrl} (\mathrm{PDC}) & \inf & (f(x) - g(x)) \\ & \text{với ràng buộc} & x \in C,\ h(x) \in -S \end{array}$$

trong đó $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi. Do đó $f - g$ sẽ không còn là hàm lồi nữa, mà ta sẽ gọi là hàm DC (hiệu của hai hàm lồi) và bài toán (PDC) sẽ được gọi là bài toán tối ưu DC. Lớp các bài toán này đã được nghiên cứu rộng rãi trong thập niên vừa qua (xem [9]). Tuy nhiên các nghiên cứu định tính về lớp bài toán này đang còn rất ít. Việc nghiên cứu định tính lớp bài toán này đòi hỏi phải mở rộng Bổ đề Farkas cho hệ có chứa các bất đẳng thức xác định bởi các hàm DC.

[1] PGS.TS, Phòng Quan hệ Quốc tế, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

[2] Sinh viên Khoa Toán - Tin học, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

Trong bài viết này, ngoài phần Giới thiệu, trong Mục 2 chúng ta sẽ nhắc lại các khái niệm và các bổ đề cần thiết sẽ được sử dụng trong các mục sau. Mục 3 là kết quả chính của bài viết, bao gồm các Định lý 3.1 và 3.2, là các Bổ đề Farkas mở rộng cho các hệ có chứa các bất đẳng thức xác định bởi các hàm DC. Trong mục này chúng tôi cũng trình bày các hệ quả của 2 định lý này. Chúng lại là các mở rộng của các kết quả đã biết mới được thiết lập trong những năm gần đây (xem [4, 3, 10]). Các kết quả này đồng thời cũng cho ta các đặc trưng của bao hàm thức của một tập lồi được chứa trong một tập không lồi xác định bởi một hàm DC. Các kết quả này mở rộng các kết quả mới đây về đặc trưng của bao hàm thức với một tập lồi chứa trong một tập lồi đảo (xem [4, 10]).

2 Kiến thức chuẩn bị

Chúng ta nhắc lại một số định nghĩa và kiến thức chuẩn bị sẽ được sử dụng trong phần còn lại của bài này. Cho X, Z là các không gian Banach, X' là đối ngẫu tôpô của X được trang bị bởi tôpô yếu*. Với tập $D \subset X$, **bao đóng** của D kí hiệu là $\mathrm{cl}\, D$. **Hàm tựa** σ_D được định nghĩa bởi $\sigma_D(u) = \sup_{x \in D} u(x)$.

Gọi S^+ là nón đối ngẫu của nón lồi đóng S trong Z, tức là, $S^+ := \{\theta \in Z' \mid \theta(s) \geq 0, \forall s \in S\}$.

Cho $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới (lsc), lồi, chân chính (nghĩa là $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$). Khi đó, hàm **liên hợp** của f, $f^* : X' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, được định nghĩa bởi

$$f^*(v) = \sup\{v(x) - f(x) \mid x \in \mathrm{dom}\, f\}$$

trong đó **miền hữu hiệu** của f là $\mathrm{dom}\, f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$. Đồ thị trên của f là

$$\mathrm{epi}\, f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom}\, f,\ f(x) \leq r\}.$$

Với $\epsilon \geq 0$, **ϵ-dưới vi phân** của f tại $a \in \mathrm{dom} f$ là một tập lồi đóng (có thể rỗng).

$$\partial_\epsilon f(a) = \{v \in X' \mid f(x) - f(a) \geq v(x - a) - \epsilon,\ \forall x \in \mathrm{dom}\, f\}.$$

Nếu $\epsilon > 0$ thì $\partial_\epsilon f(a) \neq \emptyset$. Xem các chứng minh chi tiết và các tính chất của ϵ-dưới vi phân trong [7, 8]. Chú ý rằng $\bigcap_{\epsilon > 0} \partial_\epsilon f(a) = \partial f(a)$, là dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi của f tại a.

Nếu f là **dưới tuyến tính** (nghĩa là lồi và thuần nhất dương bậc một) thì $\partial_\varepsilon f(0) = \partial f(0)$ với mọi $\varepsilon \geq 0$.

Nếu $\tilde{f}(x) = f(x) - k, x \in X, k \in \mathbb{R}$, thì epi $\tilde{f}^* =$ epi $f^* + (0, k)$. Để ý rằng nếu f là dưới tuyến tính thì epi $f^* = \partial f(0) \times \mathbb{R}_+$. Hơn nữa, nếu f là dưới tuyến tính và nếu $\tilde{f}(x) = f(x) - k,\ x \in X,\ k \in \mathbb{R}$, thì

$$\text{epi } \tilde{f}^* = \partial f(0) \times [k, \infty).$$

Để ý rằng nếu f là hàm lsc, lồi, chân chính và nếu $a \in \text{dom } f$ thì

$$\text{epi } f^* = \bigcup_{\epsilon \geq 0} \{(v, v(a) + \epsilon - f(a)) \mid v \in \partial_\epsilon f(a)\} \tag{1}$$

(xem chứng minh chi tiết trong [14]).

Kết quả sau được thiết lập mới đây trong [1].

Bổ đề 2.1 *Giả sử X là một không gian Banach và $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là các hàm lsc, lồi, chân chính sao cho* dom$f \cap$ dom$g \neq \emptyset$. *Các mệnh đề là sau tương đương*

(i) epif^* + *epi* g^* *đóng yếu**,

(ii) epi$(f+g)^*$ = epif^* + *epi* g^*.

Để ý rằng với hai hàm lsc, lồi, chân chính f và g, epif^* + epig^* là đóng yếu* nếu một trong hai hàm liên tục tại một điểm nào đó trong dom$f \cap$ dom$g$ (xem [1]).

Ánh xạ $h : X \to Z$ là S-**lồi** nếu với mọi $u,\ v \in X$ và $t \in [0,\ 1]$,

$$h(tu + (1-t)v) - th(u) - (1-t)h(v) \in -S.$$

Để thuận tiện, với ánh xạ $h : X \to Z$ và mỗi $\lambda \in Z'$ hàm hợp $\lambda \circ h$ sẽ được viết là λh. Chú ý rằng $\cup_{\lambda \in S^+} \text{epi}(\lambda h)^*$ là một nón lồi (xem [15, 16]). Đặt K là nón lồi xác định bởi

$$K := \cup_{\lambda \in S^+} \text{epi}(\lambda h)^* + \text{epi}\delta_C^*.$$

Đặt $A := C \cap h^{-1}(-S)$. Khi đó A là một tập lồi con X và (xem [5])

$$\text{cl}K = \text{epi}\delta_A^*. \tag{2}$$

Dãy $\{w_n\}$ của X' hội tụ yếu* về w kí hiệu là $w_n \to_* w$, hay đơn giản là $\lim_{n\to\infty} w_n = w$.

3 Bổ đề Farkas mở rộng cho hệ gồm các hàm lồi và hàm DC

Giả sử Z là một không gian Banach, X là một không gian Banach phản xạ, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là các hàm lsc, lồi, chân chính, và $h : X \longrightarrow Z$ là ánh xạ S-lồi liên tục trong đó S là một nón lồi đóng trong$Z$. Trong suốt bài báo này ta giả sử $C \cap h^{-1}(-S) \subset \text{dom}g$. Hạn chế về tính phản xạ của không gian X chỉ để tránh việc sử dụng lưới (net). Các kết quả trong bài này vẫn còn đúng trong không gian vectơ tôpô tổng quát.

Chúng ta sẽ sử dụng các điều kiện sau đây, liên quan đến hệ $h(x) \in -S$, $x \in C$ và hàm lsc, lồi, chân chính f:

(CC1) $\quad \text{epi} f^* + \text{cl}K$ là đóng yếu*.

(CC2) $\quad \text{epi} f^* + K$ là đóng yếu*.

Để ý rằng điều kiện (CC1) sẽ được thoả mãn nếu f liên tục tại một điểm nào đó trong $C \cap h^{-1}(-S)$ (xem [1, 3, 5]).

Định lí 3.1 (Bổ đề Farkas dạng tiệm cận) *Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu điều kiện (CC1) thoả mãn thì các mệnh đề sau tương đương*

(i) $h(x) \in -S,\ x \in C \implies f(x) - g(x) \geq \alpha$,

(ii) $(0, -\alpha) + \text{epi}\ g^* \subset \text{epi}\ f^* + \text{cl}K$,

(iii) $(\forall x^* \in \text{dom} g^*)(\exists (\lambda_n)_n \subset S^+)(\forall x \in C)$

$$f(x) + \liminf_{n \to \infty} \lambda_n h(x) \geq \langle x^*, x \rangle - g^*(x^*) + \alpha,$$

(iv) $(\forall \epsilon > 0)$ $(\forall x \in C \cap \text{dom} g)$ $(\exists (\lambda_n)_n \subset S^+)$

$$f(x) + \liminf_{n \to \infty} \lambda_n h(x) - g(x) \geq \alpha - \epsilon.$$

Chứng minh. [(i)⇒(ii)] Giả sử (i) đúng. Khi đó với mỗi $x \in A$, $f(x) \geq g(x) + \alpha$. Hiển nhiên là $f + \delta_A \geq g + \alpha$ và do đó $(g + \alpha)^* \geq (f + \delta_A)^*$. Từ đây

$$\text{epi}(f + \delta_A)^* \supset \text{epi}(g + \alpha)^* = \text{epi} g^* + (0, -\alpha).$$

Theo Bổ đề 2.1, (2), và điều kiện (CC1),

$$\text{epi}(f+\delta_A)^* = \text{epi } f^* + \text{cl } (\cup_{\lambda\in S^+}\text{epi } (\lambda h)^* + \text{epi } \delta_C^*) = \text{epi } f^* + \text{cl } K. \tag{3}$$

Vì vậy

$$\text{epi} g^* + (0,-\alpha) \subset \text{epi } f^* + \text{cl } K,$$

chính là (ii).

[(ii)⇒(iii)] Giả sử (ii) đúng. Khi đó với mỗi $x^* \in dom g^*$ tồn tại $(u,\beta)\in \text{epi } f^*$, $(u_n),(v_n)\subset X'$, $(\lambda_n)\subset S^+$, $(\alpha_n),(\beta_n)\subset\mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} &x^* = u + \lim_{n\to\infty}(u_n+v_n),\\ &g^*(x^*)-\alpha = \beta + \lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n),\\ &f^*(u)\le\beta,\quad (\lambda_n h)^*(u_n)\le\alpha_n,\quad \delta_C^*(v_n)\le\beta_n. \end{aligned}\tag{4}$$

Khi đó với mỗi $n\in\mathbb{N}$, $x\in C$,

$$\alpha_n+\beta_n \ge (u_n,x)-\lambda_n h(x) + (v_n,x).$$

Do đó, với mỗi $x\in C$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n) &\ge \limsup_{n\to\infty}[(u_n,x)-\lambda_n h(x)+(v_n,x)]\\ &\ge \liminf_{n\to\infty}(u_n+v_n,x)+\limsup_{n\to\infty}[-\lambda_n h(x)]\\ &\ge \lim_{n\to\infty}(u_n+v_n,x)-\liminf_{n\to\infty}[\lambda_n h(x)].\end{aligned}\tag{5}$$

Kết hợp (4) and (5) ta được

$$\begin{aligned} g^*(x^*)-\alpha &= \beta + \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)\\ &\ge (u,x)-f(x)+\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n,x)-\liminf_{n\to\infty}[\lambda_n h(x)]\\ &\ge (u,x)-f(x)+(x^*-u,x)-\liminf_{n\to\infty}[\lambda_n h(x)]\\ &\ge -f(x)+(x^*,x)-\liminf_{n\to\infty}[\lambda_n h(x)].\end{aligned}$$

Từ đây,

$$f(x)+\liminf_{n\to\infty}\lambda_n h(x)\ge (x^*x)-g^*(x^*)+\alpha,\qquad \forall x\in C.$$

[(iii)⇒(iv)] Giả sử (iii) đúng. Khi đó với mỗi $x \in C \cap \mathrm{dom} g$ và với mỗi $\epsilon > 0$, $\partial_\epsilon g(x_0) \neq \emptyset$. Lấy $x^* \in \partial_\epsilon g(x)$. Khi đó theo định nghĩa, $g(y) - g(x) \geq (x^*, y - x) - \epsilon$ với mọi $y \in \mathrm{dom} g$, dẫn đến

$$\epsilon + (x^*, x) - g(x) \geq (x^*, y) - g(y), \quad \forall y \in \mathrm{dom} g,$$

hay là,

$$\epsilon + (x^*, x) - g(x) \geq g^*(x^*).$$

Điều này có nghĩa là $x^* \in \mathrm{dom} g^*$ và $(x^*, x) - g^*(x^*) \geq g(x) - \epsilon$. Theo (iii), tồn tại $(\lambda_n)_n \subset S^+$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) + \liminf_{n\to\infty} \lambda_n h(x) &\geq (x^*, x) - g^*(x^*) + \alpha \\ &\geq g(x) + \alpha - \epsilon. \end{aligned}$$

Do đó,

$$f(x) + \liminf_{n\to\infty} \lambda_n h(x) - g(x) \geq \alpha - \epsilon,$$

chính là (iv).

[(iv)⇒(i)] Cho ϵ là số dương tuỳ ý và giả sử x là một điểm tuỳ ý trong $A = h^{-1}(-S) \cap C$. Khi đó $x \in \mathrm{dom} g$ (giả thiết). Từ (iv), tồn tại $(\lambda_n)_n \subset S^+$ sao cho

$$f(x) + \liminf_{n\to\infty} \lambda_n h(x) - g(x) \geq \alpha - \epsilon. \tag{6}$$

Vì $h(x) \in -S$ và $\lambda_n \in S^+$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n h(x) \leq 0$. Từ (6) ta được,

$$f(x) - g(x) \geq \alpha - \epsilon,$$

hay là

$$\inf\{f(x) - g(x) \mid x \in A\} \geq \alpha - \epsilon.$$

Vì bất đẳng thức cuối đúng với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, ta được

$$\inf\{f(x) - g(x) \mid x \in A\} \geq \alpha,$$

chính là (i). □

Định lí 3.2 (Bổ đề Farkas dạng không tiệm cận) *Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu điều kiện (CC2) thoả mãn thì các mệnh đề sau là tương đương*

(i) $h(x) \in -S,\ x \in C \implies f(x) - g(x) \geq \alpha$,

(ii) $(0, -\alpha) + \text{epi}\ g^* \subset \text{epi}\ f^* + K$,

(iii) $(\forall x^* \in \text{dom} g^*)(\exists \lambda \in S^+)(\forall x \in C)$

$$f(x) + \lambda h(x) \geq \langle x^*, x\rangle - g^*(x^*) + \alpha.$$

(iv) $(\forall \epsilon > 0)$ $(\forall x \in C \cap \text{dom} g)$ $(\exists \lambda \in S^+)$

$$f(x) + \lambda h(x) - g(x) \geq \alpha - \epsilon.$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như Định lí 3.1, sử dụng (CC2) thay vì (CC1).
□

Chú ý. Để ý rằng (i) có thể viết lại dưới dạng $A \subset D$. Trong đó $A = C \cap h^{-1}(-S)$ là một tập lồi và $D := \{x \in X \mid f(x) - g(x) \geq \alpha\}$ là một tập không lồi. Do vậy, (ii), (iii), (iv) cho ta các đặc trưng của bao hàm thức của một tập lồi chứa trong một tập không lồi D xác định bởi một hàm DC (gọi là tập DC). Theo sự hiểu biết của các tác giả cho đến nay trong các tài liệu tham khảo chỉ mới xuất hiện những cách đặc trưng cho một tập lồi chứa trong một tập lồi đảo, là trường hợp đặc biệt của Định lý 3.2 khi $g \equiv 0$.

Bây giờ chúng ta đưa ra một số hệ quả của các định lý trên. Bản thân các hệ quả này cũng có giá trị với tư cách là các kết quả độc lập, mở rộng một số kết quả mới được thiết lập trong những năm gần đây (xem [10, 12]).

Hệ quả 3.1 *Giả sử $C \cap h^{-1}(-S)$ khác rỗng và $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu f liên tục tại một điểm nào đó trong $C \cap h^{-1}(-S)$ thì các mệnh đề sau tương đương*

(i') $h(x) \in -S,\ x \in C \implies f(x) \geq \alpha$,

(ii') $(0, -\alpha) \in \text{epi}\ f^* + \text{cl}\left(\cup_{\lambda \in S^+} \text{epi}\ (\lambda h)^* + \text{epi}\ \delta_C^*\right)$,

(iii') $(\exists (\lambda_n)_n \subset S^+)(\forall x \in C)$ $f(x) + \liminf\limits_{n \to \infty} \lambda h(x) \geq \alpha$.

Chứng minh. Nếu f liên tục tại một điểm nào đó trong $C \cap h^{-1}(-S)$ thì điều kiện (CC1) được nghiệm đúng. Các chứng minh chiều suy ra [(i')⇒(ii')] và [(ii')⇒(iii')] tương tự như [(i)⇒(ii)] và [(ii)⇒(iii)] của Định lí 3.1 khi ta đặt $g \equiv 0$. Thật vậy, nếu $g \equiv 0$ thì dom$g^* = \{0\}$, $g^*(0) = 0$, epi $g^* = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ và $(0, -\alpha) +$ epi $g^* = \{0\} \times [-\alpha, +\infty)$. Dễ thấy (ii) và (iii) của Định lí 3.1 tương ứng trở thành (ii') và (iii').

Chứng minh [(iii')⇒(i')]. Để ý rằng nếu $h(x) \in -S$ thì $\lambda_n h(x) \leq 0$ với $\lambda_n \in S^+$ ($n \in \mathbb{N}$). Do vậy, từ (iii'), nếu $x \in C$, $h(x) \in -S$ thì

$$f(x) \geq f(x) + \liminf_{n \to \infty} \lambda h(x) \geq \alpha.$$

□

Điều kiện sau được sử dụng để thiết lập dạng không tiệm cận của Bổ đề Farkas

(A) K là đóng yếu*.

Hệ quả 3.2 *Giả sử $C \cap h^{-1}(-S)$ khác rỗng và $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu f liên tục tại một điểm nào đó trong $C \cap h^{-1}(-S)$ và điều kiện (A) thoả mãn thì các mệnh đề sau tương đương*

(i") $h(x) \in -S,\ x \in C \implies f(x) \geq \alpha$,

(ii") $(0, -\alpha) \in \text{epi } f^* + \cup_{\lambda \in S^+} \text{epi } (\lambda h)^* + \text{epi } \delta_C^*$,

(iii") $(\exists \lambda \in S^+)(\forall x \in C)\ f(x) + \lambda h(x) \geq \alpha$.

Chứng minh. [(i")⇒(ii")] Giả sử (i") đúng. Lập luận tương tự như trong chứng minh [(i)⇒(ii)] của Định lí 3.1, chú ý rằng $g \equiv 0$ và f liên tục tại một điểm nào đó trong $C \cap h^{-1}(-S)$ (do đó (CC1) thỏa mãn), ta được

$$\begin{aligned}(0, -\alpha) \in \text{epi } (f + \delta_A)^* &= \text{epi } f^* + \text{cl } (\cup_{\lambda \in S^+} \text{epi } (\lambda h)^* + \text{epi } \delta_C^*)\\ &= \text{epi } f^* + \text{cl } K\\ &= \text{epi } f^* + K\end{aligned}$$

vì K là đóng (xem (3)). Do đó (ii") được chứng minh.

[(ii")⇒(iii")] Giả sử (ii") đúng. Khi đó tồn tại $(u, \beta) \in$ epi f^*, $v, w \in X'$, $\lambda \in S^+$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned}&0 = u + v + w,\\ &-\alpha = \beta + \gamma + \delta,\\ &f^*(u) \leq \beta, \quad (\lambda h)^*(v) \leq \gamma, \quad \delta_C^*(w) \leq \delta.\end{aligned}$$

Do đó, với mọi $x \in C \cap \operatorname{dom} f$,

$$\begin{aligned} -\alpha &\geq \langle u, x\rangle - f(x) + \langle v, x\rangle - \lambda h(x) + \langle w, x\rangle \\ &\geq -f(x) - \lambda h(x) \end{aligned}$$

vì $u + v + w = 0$. Bất đẳng thức này tương tương với

$$f(x) + \lambda h(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in C.$$

[(iii")⇒(i")] Giả sử (iii') đúng. Nếu $x \in C$, $h(x) \in -S$ thì $\lambda h(x) \leq 0$ nếu $\lambda \in S^+$ và vì thế,

$$f(x) \geq f(x) + \lambda h(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in C \cap h^{-1}(-S).$$

Điều phải chứng minh. □

Nhận xét. (i) Các kết luận của các Hệ quả 3.1, 3.2 đã được chứng minh trong [12] (Định lí 2.1, 2.2, trang 88-92) cho trường hợp $C = X$ và f là hàm lồi liên tục. Những hệ quả trên đã mở rộng các định lí này đến trường hợp tổng quát (hàm f có thể nhận giá trị vô cùng, lsc) với sự hiện diện của một ràng buộc hình học $x \in C$. Điều kiện chính qui (A) được sử dụng lần đầu tiên trong [11] (xem thêm [13]) và được gọi là *điều kiện chính qui nón đóng*. Trong [11], các tác giả đã chứng minh được rằng điều kiện chính qui nón đóng này yếu hơn hẳn các điều kiện chính quy dạng Slater mở rộng cũng như các điều kiện chính quy dạng Robinsson (xem thêm [6]).

(ii) Một điều cũng đáng chú ý là tập $D := \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ là một tập *lồi đảo*. Do đó sự tương đương giữa (i'), (ii') và (iii') (cũng như giữa (i"), (ii"), (iii")) cho ta đặc trưng về bao hàm thức của tập lồi A trong tập lồi đảo D. Các kết quả này mở rộng một số kết quả đã biết trước đây theo hướng đặc trưng các bao hàm thức lồi và lồi đảo (xem [10]).

Tài liệu

[1] Burachit and V. Jeyakumar (2005), Dual condition for the convex subdifferential sum formula with applications, *Journal of Global Analysis*, 15, 540-554.

[2] Nguyễn Định (2005), Các kết quả dạng Farkas mở rộng và áp dụng vào lý thuyết các bài toán tối ưu lồi, *Tạp chí khoa học Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh* (đăng trên tạp chí này).

[3] N. Dinh, M.A. Goberna and M.A. López, From linear to convex systems: consistency, Farkas' lemma and applications, *Journal of Convex Analysis* (đang in).

[4] N. Dinh, V. Jeyakumar, and G.M. Lee (2005), Sequential Lagrangian conditions for convex programs with applications to semidefinite programming, *Journal of Optimization Theory and Application*, 125, 85 - 112.

[5] N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. López, and T.Q. Son, New Farkas-type results with applications to convex infinite programming (bản thảo, 2005).

[6] M. A. Goberna and M. A. Lopez (1985), "Conditions for the closedness of the characteristic cone associated to an infinite linear system", in Infinite Programming, Eds. E.J. Anderson and A. Philpott, Springer-Verlag, Berlin, 16-28.

[7] J. B. Hiriart-Urruty (1982), "ϵ-Subdifferential", in *Convex Analysis and Optimization*, Edited by J. P. Aubin and R. Vinter, Pitman, London, England, 43-92.

[8] J. B. Hiriart-Urruty (2001), "From convex optimization to nonconvex optimization necessary and sufficient conditions for global optimality", in *from convexity to nonconvexity*, Edited by R.P. Gilbert, P.D. Panagiotopoulos, and P.M. Pardalos, Kluwer Academic Publisher, London, pp. 219 - 239.

[9] R. Horst and H. Tuy (1993), *Global optimization: deterministic approaches*, Springer-Verglag, Berlin.

[10] V. Jeyakumar (2003), "Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex constraints, *SIAM J. Optim.*, 13, 947-959.

[11] V. Jeyakumar, N. Dinh, and G.M. Lee (2004), A new closed cone constraint qualification for convex Optimization, Applied Mathematics Research Report AMR04/8, School of Mathematics, University of New South Wales. See http://www.maths.unsw.edu.au/applied/reports/amr08.html

[12] V. Jeyakumar, G. M. Lee and N. Dinh (2003), "New sequential Lagrange multiplier conditions characterizing optimality without constraint qualifications for convex programs", *SIAM J. Optim.*, 14(2) , 534 - 547.

[13] V. Jeyakumar, W. Song, N. Dinh, and G. M. Lee (2005), Stable strong duality in convex optimization, Applied Mathematics Research Report AMR05/22, UNSW. See http://www.maths.unsw.edu.au/applied/reports/amr22.html

[14] V. Jeyakumar (1997), "Asymptotic dual conditions characterizing optimality for convex programs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 93, 153-165.

[15] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover and Y. Ishizuka (1996), "Inequality systems and global optimization", *J. Math. Anal. and Appl.*, 202, 900-919.

[16] V. Jeyakumar and A. Zaffaroni (1996), "Asymptotic conditions for weak and proper optimality in infinite dimensional convex vector optimization", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 17, 323-343.

[17] D. T. Luc (1989), *Theory of Vector Optimization*, LNMES 319, Springer Verlag, Berlin and New York.

[18] C. Zalinescu (2002), *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, New Jersey.

Tóm tắt :

Bổ đề Farkas cho hệ các bất đẳng thức gồm các hàm lồi và hàm DC

Bổ đề Farkas cho các hệ bất đẳng thức lồi đóng một vai trò cơ bản trong lý thuyết tối ưu, tuyến tính cũng như phi tuyến, đặc biệt là trong các bài toán tối ưu lồi. Bài này trình bày một số các mở rộng của bất đẳng thức này cho các hệ có chứa các bất đẳng thức lồi tổng quát và cả các bất đẳng thức xác định bởi các hàm DC (hiệu của hai hàm lồi). Chúng là cơ sở để nghiên cứu các bài toán tối ưu DC mà cho đến nay các nghiên cứu định tính về lớp toán này còn rất hạn chế. Các kết quả này đồng thời cũng cho ta các đặc trưng của bao hàm thức của một tập lồi được chứa trong một tập không lồi xác định bởi một hàm DC. Các kết quả này mở rộng các kết quả mới đây về đặc trưng của bao hàm thức với một tập lồi chứa trong một tập lồi đảo.

Abstract :

Generalized Farkas' lamma for systems involving cone convex and DC-functions

Farkas lemma plays an important role in (both linear and nonlinear) optimization, especially in convex optimization. This paper establishes some generalized versions of this lemma for systems involving both cone convex and DC-functions (difference of two convex functions). These results can be used as fundamental tools to study DC-programs for which deterministic studies are rather limited in the literature. The results also supply characterizations of set containments of a convex set determined by cone convex constraint in a non-convex set defined by a DC-function. In turn, these results extend those established recently for containments of a convex set in a reverse convex set.