CÁC KẾT QUẢ DẠNG FARKAS MỞ RỘNG VÀ ÁP DỤNG VÀO LÍ THUYẾT CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI

NGUYỄN ĐỊNH [1]

1 Mở đầu

Lí thuyết các bài toán tối ưu (hay còn gọi là các bài toán cực trị) là cầu nối giữa lí thuyết toán học trừu tượng với thực tế. Nói rõ hơn, hầu hết các bài toán thực tế trong kinh tế, khoa học kỹ thuật, sinh thái, môi trường, ... đều có mô hình toán học là các bài toán tối ưu. Chẳng hạn, bài toán điều khiển đập thủy điện, bài toán đầu tư (inventory), bài toán điều khiển người máy, nghiên cứu thiết kế các "chip" điện tử, bài toán điều khiển các tàu vũ trụ, ... Một trong những công cụ cơ bản để nghiên cứu các lớp bài toán tối ưu này là một công cụ toán học thường được biết dưới tên gọi là Bổ đề Farkas.

Bổ đề Farkas cổ điển được phát biểu như sau:

Bổ đề 1.1 *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_m, c \in \mathbb{R}^n$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*
(i) $a_i^T x \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m \implies c^T(x) \geq 0,$
(ii) $(\exists \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m)\ c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i.$

Kết quả này cũng có thể được phát biểu dưới dạng một "định lí thay thế" (alternative theorem) như sau: *có một và chỉ một trong hai hệ sau có nghiệm*
(i) $x \in \mathbb{R}^n,\ a_i^T x \geq 0, c^T x < 0,$
(ii) $\lambda_i \geq 0,\ c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i.$

Bổ đề Farkas đóng một vai trò cơ bản trong lí thuyết tối ưu tuyến tính cũng như tối ưu phi tuyến (xem [Ma]). Trong những thập niên vừa qua, Bổ đề Farkas đã được mở rộng và phát triển ra cho các hệ tuyến tính (vô hạn chiều), các hệ phi tuyến (xem [Gw], [J1], [J2], [JG], [La1], [La2], [PP], ...), cũng như các hệ đa trị (xem [PP]), dưới các dạng khác nhau (xem [BW], [GLP]). Cùng với các mở rộng này là áp dụng của nó vào lí thuyết quy hoạch lồi nửa vô hạn, quy hoạch lồi tổng quát, các bài toán quy hoạch lồi nửa các định (convex semi-definite programs (SDP)), các bài toán tối ưu đa mục tiêu, ... (xem [DJL1], [DJL2], [DGLS], [GLP], [JLD2], [JDS], [Luc], [PP], ...).

[1] PGS.TS, Phòng Quan hệ Quốc tế, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

Toàn bộ phần còn lại của bài viết này chúng tôi trình bày tổng quan về quá trình mở rộng và phát triển của bổ đề Farkas cùng với những áp dụng của nó trong lí thuyết tối ưu. Một cách cụ thể, bài viết đề cập đến các nội dung sau:

- Về các mở rộng của Định lí Farkas,
- Các kết quả mở rộng dạng Farkas cho các hệ lồi theo nón,
- Các kết quả mở rộng dạng Farkas cho các hệ lồi vô hạn,
- Một số áp dụng của các kết qủa dạng Farkas cho bài toán tối ưu lồi,
  Điều kiện tối ưu, các định lí điểm yên ngựa, đối ngẫu, ...
  Áp dụng cho bài toán cực đại hàm lồi,
- Một cách tiếp cận mới: các kết quả và ứng dụng.

2 Một số kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ bài viết này X, Y là các không gian Banach và S là một nón lồi đóng trong Y (không nhất thiết có phần trong khác rỗng). Để ý rằng nón S sinh ra một **thứ tự** trong Y (kí hiệu "$\geq$", xác định như sau: với $y, z \in Y$,

$$y \geq z \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad y - z \in S.$$

Đặc biệt $y \in -S$ có nghĩa là $y \leq 0$ theo quan hệ thứ tự này.

Ta kí hiệu X^* là không gian đối ngẫu tôpô của X, được trang bị tôpô yếu*. Nón **đối ngẫu** của nón S trong Y được kí hiệu là S^+ và được định nghĩa là tập

$$S^+ := \{\theta \in Y^* \mid \theta(s) \geq 0, \ \forall s \in S\}.$$

Giả sử $D \subset X$. Hàm **chỉ tiêu** và **hàm tựa** của tập D, kí hiệu lần lượt là δ_D và σ_D, là các hàm được định nghĩa như sau:

$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in D \\ +\infty & \text{nếu } x \notin D, \end{cases}$$

$$\sigma_D(u) = \sup_{x \in D} u(x).$$

Nón lồi sinh bởi tập D, kí hiệu cone$D$, được định nghĩa là giao của họ tất cả các nón lồi chứa D.

Cho $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Miền hữu hiệu** của f là tập

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là **chân chính** nếu dom$f \neq \emptyset$.

Giả sử $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi chân chính và nửa liên tục dưới (l.s.c.). Hàm **đối ngẫu** của f, $f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, được định nghĩa bởi

$$f^*(v) = \sup\{v(x) - f(x) \mid x \in \text{ dom } f\}.$$

Epigraph của f, kí hiệu là epi$f$, là tập

$$\text{epi } f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in \text{ dom } f,\ f(x) \leq r\}.$$

For $\varepsilon \geq 0$, the ε-**dưới vi phân** của f tại $a \in$ dom$f$ được định nghĩa là tập lồi đóng yếu*

$$\partial_\varepsilon f(a) := \{v \in X' \mid f(x) - f(a) \geq v(x - a) - \varepsilon,\ \forall x \in \text{ dom } f\}.$$

Để ý rằng $\partial_\epsilon f(a) \neq \emptyset$ nếu $\epsilon > 0$. Khi $\epsilon = 0$ ta quay trở lại khái niệm **dưới vi phân** của hàm f tại a theo nghĩa thông thường của giải tích lồi. Trong trường hợp này ta sẽ kí hiệu là $\partial f(a)$ (thay vì $\partial_0 f(a)$). Dưới vi phân của một hàm lồi luôn là tập lồi, compact yếu* (có thể là tập rỗng) [Zal].

Ánh xạ $g : X \to Y$ là S-**lồi** nếu với mọi $u,\ v \in X$ và với mọi $t \in [0,\ 1]$,

$$g(tu + (1 - t)v) - tg(u) - (1 - t)g(v) \in -S.$$

Ánh xạ $g : X \to Y$ là S-**dưới tuyến tính** nếu g là S-lồi thuần nhất dương (bậc nhất). Sau này ta cũng thường sử dụng kí hiệu $g^{-1}(-S) := \{x \in X \mid -g(x) \in S\}$.

3 Về các mở rộng của Bổ đề Farkas

Sự thành công của việc vận dụng Bổ đề Farkas trong các bài toán tối ưu tuyến tính cũng như sự hữu ích của nó trong việc nghiên cứu các bài toán tối ưu phi tuyến đã dẫn đến nhu cầu mở rộng bổ đề này cho các hệ tuyến tính vô hạn chiều, các hệ phi tuyến, các hệ liên quan đến các ánh xạ đa trị, ...

3.1 Bổ đề Farkas cho hệ tuyến tính vô hạn chiều

Định lí 3.1 *Cho $A : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục, S là một nón lồi đóng trong Y và $c \in X^*$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $Ax \in -S \implies c(x) \leq 0$,

(ii) $c \in \text{cl}(A^T(S^*))$.

Đây là dạng "tiệm cận" (asymptotic form) của Bổ đề Farkas (xem [Cr], [DJL1]). Nếu nón $A^T(S^*)$ là đóng trong tôpô thích hợp (điều kiện nón đóng) thì bao đóng "cl" trong (ii) hiển nhiên có thể bỏ đi và ta được dạng "không tiệm cận" (non-asymptotic form) của Bổ đề Farkas. Điều kiện nón đóng này sẽ được thỏa mãn, chẳng hạn, trong trường hợp khi S là nón lồi đa diện trong một không gian hữu hạn chiều.

Một dạng khác của Bổ đề Farkas cho hệ tuyến tính vô hạn, được giới thiệu trong công trình [Chu] và sẽ được trình bày sau đây. Xét hệ các bất đẳng thức tuyến tính

$$\sigma := \{a_t(x) \le b_t,\ t \in T\},$$

trong đó $a_t \in X^*$ và $b_t \in \mathbb{R}$, với mọi $t \in T$ (T là tập chỉ số tùy ý, có thể vô hạn).

Ta nói rằng hệ σ là **tương thích** nếu tồn tại $z \in X$ thỏa mãn hệ bất đẳng thức σ, nghĩa là $a_t(z) \le b_t$ với mọi $t \in T$. Giả sử hệ σ là tương thích. Một bất đẳng thức $a(x) \le b$ ($a \in X^*$ và $b \in \mathbb{R}$) là **hệ quả** của hệ σ nếu $a(z) \le b$ với mọi nghiệm $z \in X$ của σ. Dạng mở rộng của Bổ đề Farkas sau đây được thiết lập bởi Y-C Chu trong [Chu] cùng với nhiều áp dụng quan trọng của nó trong giải tích hàm và các ngành khác của toán học (xem thêm [ST]).

Định lí 3.2 *Giả sử rằng* $\sigma = \{a_t(x) \le b_t,\ t \in T\}$ *tương thích,* $v \in X^*$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $a_t(x) \le b_t,\ \forall t \in T \implies v(x) \le \alpha$,

(ii) $(v, \alpha) \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}\{(a_t, b_t),\ t \in T;\ (0, 1)\}$.

3.2 Bổ đề Farkas cho hệ không trơn

Những mở rộng đầu tiên của Bổ đề Farkas cho các hệ không trơn là các kết quả cho hệ dưới tuyến tính. Nhắc lại rằng một ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ gọi là dưới tuyến tính nếu f là cộng tính (nghĩa là $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in X$) và thuần nhất dương (nghĩa là $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, mọi $x \in X$, mọi $\lambda \in \mathbb{R}_+$).

Định lí 3.3 *Cho* $g : X \to Y$ *là một ánh xạ liên tục,* $S-$*dưới tuyến tính còn* $f : X \to \mathbb{R}$ *là dưới tuyến tính và nửa liên tục dưới. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $g(x) \in -S \implies f(x) \ge 0$,

(ii) $0 \in \partial f(0) + \operatorname{cl}\left[\bigcup_{\lambda \in S^+} \partial(\lambda g)(0)\right]$.

Dạng suy rộng này của Bổ đề Farkas đã được dùng để thiết lập các điều kiện tối ưu cho các lớp bài toán tối ưu lồi cũng như lớp các bài toán tựa khả vi theo nghĩa của B.N. Pshenichnyi (xem [J3], [JG], ...).

Bây giờ chúng ta nêu ra một mở rộng nữa của Bổ đề Farkas cho hệ bao gồm các hiệu của hai hàm dưới tuyến tính (diference of sublinear functions, ngắn gọn, hệ (DSL)) và các bất đẳng thức lồi đảo.

Một ánh xạ $g : X \to Y$ được gọi là (DSL)-**ánh xạ** (tương ứng với nón lồi đóng S) nếu với mọi $v \in S^+$, tồn tại các tập compact yếu* $\underline{\partial}(vg)(0)$ và $\overline{\partial}(vg)(0)$ sao cho với mỗi $x \in X$,

$$vg(x) = \max_{u \in \underline{\partial}(vg)(0)} u(x) - \max_{w \in \overline{\partial}(vg)(0)} w(x).$$

Kết quả sau đây liên quan đến hệ bao gồm các ánh xạ (DSL) với ràng buộc lồi đảo [J3].

Định lí 3.4 *Cho $g : X \to Y$ là một ánh xạ (DSL), liên tục, còn $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm (DSL) liên tục. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $g(x) \in -S \implies f(x) \geq 0$,

(ii) với mỗi nhát cắt (w_v) với $w_v \in \overline{\partial}(vg)(0)$, $v \in S^+$,

$$\overline{\partial}(vg)(0) \subset \underline{\partial}(vg)(0) + B,$$

trong đó $B = \mathrm{cl\ cone}\,[\cup_{v \in S^+}(\underline{\partial}(vg)(0) - w_v)]$.

Bây gờ chúng ta xét một bất đẳng thức lồi dạng $h(x) \leq 0$, trong đó h là một hàm lồi với $h(0) = 0$. Một mở rộng của Bổ đề Farkas cho hệ (DSL) $-g(x) \in S$ và bất đẳng thức lồi dạng $h(x) \leq 0$ phát biểu như sau:

Định lí 3.5 *Cho $g : X \to Y$ là một ánh xạ (DSL), liên tục, còn $h : X \to \mathbb{R}$ là hàm (DSL) liên tục. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $-g(x) \in S \implies h(x) \leq 0$,

(ii) với mỗi nhát cắt (w_v) với $w_v \in \overline{\partial}(vg)(0)$, $v \in S^+$ và với mọi $\epsilon > 0$,

$$\partial_\epsilon h(0) \subset \mathrm{cl\ cone\ co}\,[\cup_{v \in S^+}(\underline{\partial}(vg)(0) - w_v)].$$

Các mở rộng của Bổ đề Farkas cho hệ các bất đẳng thức lồi được thiết lập bởi Ch-W. Ha (1979)[Ha] và V. Jeyakumar, A.M. Rubinov, B.M. Glover, và Y. Ishizuka (1996)[JRGI].

Định lí 3.6 *Giả sử I là một tập chỉ số tùy ý, h, g_i, $i \in I$ là các hàm lồi liên tục (giá trị thực). Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I \implies h(x) \leq 0$,

(ii) $epi\ h^* \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{cone}\,(\cup_{i \in I} \mathrm{epi}\ g_i^*))$.

4 Các kết quả mở rộng dạng Farkas cho các hệ lồi theo nón

Trong mục này chúng ta sẽ điểm qua một số kết quả mở rộng Bổ đề Farkas được công bố trong những năm vừa qua, chủ yếu của các tác giả V. Jeyakumar, G.M. Lee, M.A. Goberna, M.A. Lopez và của tác giả bài viết này.

Cho C là một tập lồi đóng của X, $g : X \to Z$ là một ánh xạ S-lồi, liên tục và $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi lên tục.

Bổ đề sau đây đóng một vai trò cơ bản cho việc mở rộng Bổ đề Farkas đối với các hệ bất đẳng thức lồi theo nón. Phép chứng minh của nó dựa vào định lí tách tập lồi và lí thuyết đối ngẫu của hàm lồi (xem [JDL], [JLD2]).

Bổ đề 4.1 *[JDL], [JLD2] Với các giả thiết về g, f như trên, các khẳng định sau là đúng*

(i) $C \cap g^{-1}(-S) \neq \emptyset$ *nếu và chỉ nếu*

$$(0,-1) \notin \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}\,(\lambda g)^* + \mathrm{epi}\,\delta_C^*\right),$$

(ii) $C \cap g^{-1}(-S) \neq \emptyset$ *kéo theo*

$$\mathrm{epi}\,\sigma_{C\cap g^{-1}(-S)} = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}\,(\lambda g)^* + \mathrm{epi}\,\delta_C^*\right).$$

Dựa vào bổ đề cơ bản trên, chúng ta có thể thiết lập được các mở rộng của Bổ đề Farkas dạng tiệm cận (asymptotic form) và không tiệm cận (non-asymptotic form).

4.1 Bổ đề Farkas dạng tiệm cận

Định lí 4.1 *Giả sử hệ $x \in C$, $g(x) \in -S$ là tương thích. Khi đó với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\inf\{f(x) : g(x) \in -S, x \in C\} \geq \alpha$,

(ii) $(0,-\alpha) \in \mathrm{epi} f^* + \mathrm{cl}\left(\cup_{\lambda\in S^+}\mathrm{epi}(\lambda g)^* + \mathrm{epi}(\delta_C^*)\right)$,

(iii) $(\exists(\lambda_n)_n \subset S^+)\ (\forall x \in C)$

$$f(x) + \liminf_n \lambda_n g(x) \geq \alpha.$$

Dạng tiệm cận này của Bổ đề Farkas đã được sử dụng để thiết lập các định lí về điểm yên ngựa, các định lí đối ngẫu mạnh cho bài toán tối ưu lồi tổng quát với ràng buộc nón cũng như cho bài toán nửa xác định (SDP) (xem [DJL1], [JD], [JSDL] và Mục 5 dưới đây).

4.2 Bổ đề Farkas dạng không tiệm cận

Bổ đề Farkas dạng không tiệm cận thường được thiết lập dưới một điều kiện chính quy. Chúng ta sẽ đưa ra một điều kiện chính quy, gọi là điều kiện chính quy dạng nón đóng (CCCQ), được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.1 *Hệ $x \in C$, $g(x) \in -S$ được gọi là thỏa mãn điều kiện* **chính quy dạng nón đóng** *(CCCQ) nếu tập hợp*

$$\bigcup_{\lambda \in S^+} \operatorname{epi}(\lambda g)^* + \operatorname{epi} \delta_C^* \quad \text{là đóng yếu}^*.$$

Người ta chứng minh được rằng (xem [JDL]) điều kiện (CCCQ) yếu hơn các điều kiện dạng mở rộng của các điều kiện dạng Slater mở rộng (cũng thường gọi là các điều kiện điểm trong, thường được sử dụng trong các bài toán tối ưu lồi) sau đây:

- $0 \in \operatorname{icr}\left(g(C) + S\right)$ và $\operatorname{aff}\left(g(C) + S\right)$ là một không gian con đóng;
- $0 \in \operatorname{sqri}\left(g(C) + S\right)$;
- $0 \in \operatorname{core}\left(g(C) + S\right)$;
- $\operatorname{int} S \neq \emptyset$, $\exists x' \in C$ sao cho $g(x') \in -\operatorname{int} S$.

Ở đây $\operatorname{aff} D$, $\operatorname{icr} D$, $\operatorname{sqri} D$ và $\operatorname{core} D$ chỉ **bao affine**, **intrinsic core**, **strongly quasi-relative interior** và **phần trong đại số** tương ứng của tập D.

Dưới đây là Bổ đề Farkas suy rộng cho hệ lồi nón dạng không tiệm cận, được thiết lập dưới điều kiện chính quy (CCCQ).

Định lí 4.2 *Giả sử tập $C \cap g^{-1}(-S)$ là không rỗng và $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu điều kiện (CCCQ) thỏa mãn thì các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $g(x) \in -S,\ x \in C \implies f(x) \geq \alpha$,

(ii) $(0, -\alpha) \in \operatorname{epi} f^* + \cup_{\lambda \in S^+} \operatorname{epi} (\lambda g)^* + \operatorname{epi} \delta_C^*$,

(iii) $(\exists \lambda \in S^+)(\forall x \in C)\ f(x) + \lambda g(x) \geq \alpha$.

Chứng minh. (Vắn tắt) $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Giả sử rằng (i) thỏa mãn. Đặt $H = \{x \in X : h(x) \geq 0\}$ trong đó $h(x) = f(x) - \alpha$.

- (i) có nghĩa là $A := C \cap g^{-1}(-S) \subset H$.

$A \subseteq H$ khi và chỉ khi $h + \delta_A \geq 0$ và do đó,

$$0 \in \text{epi } (h + \delta_A)^*.$$

• Chúng ta chứng minh được

$$\text{epi } (h + \delta_A)^* = \text{ epi } h^* + \text{epi } \delta_A^*.$$

• vì $\delta_A^* = \sigma_A$, từ Bổ đề 4.1 và điều kiện (CCCQ) ta được

$$\text{epi } \delta_A^* = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{epi } (\lambda g)^* + \text{epi } \delta_C^*.$$

• Do vậy $A \subset H$ kéo theo

$$0 \in \text{epi } h^* + \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{epi } (\lambda g)^* + \text{epi } \delta_C^*.$$

$[(ii) \Rightarrow (iii)]$. Giả sử rằng (ii) thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\lambda \in S^+$, $v_1, v_2, v_3 \in X'$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha$, $f^*(v_1) \leq \alpha_1$, $(\lambda g)^*(v_2) \leq \alpha_2$, và $\langle v_3, x\rangle \leq \alpha_3$ với mọi $x \in C$. Do vậy theo định nghĩa của $f^*(v_1)$ và $(\lambda g)^*(v_2)$, ta nhận được

$$f(x) + \lambda g(x) \geq \alpha \ \ \forall x \in C,$$

chính là (iii).

$[(iii) \Rightarrow (i)]$. Giả sử rằng (iii) thỏa mãn. Khi đó với mỗi $x \in C \cap g^{-1}(-S)$,

$$f(x) \geq f(x) + \lambda g(x) \geq \alpha.$$

và vì thế (i) thỏa mãn. □

Hệ quả 4.1 *Giả sử $u \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ và tập $C \cap g^{-1}(-S)$ là không rỗng. Nếu điều kiện (CCCQ) thỏa mãn thì các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $g(x) \in -S$ và $x \in C \Longrightarrow u(x) \geq \alpha$,

(ii) $-(u, \alpha) \in \text{cone}(\bigcup_{v \in S^+} \text{epi}(v \circ g)^* + \text{epi}\delta_C^*)$,

(iii) Tồn tại $v \in S^+$ sao cho

$$u(x) + (v \circ g)(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in C.$$

Nhận xét

• Sự tương đương giữa (i) và (iii) đã được thiết lập bởi J. Gwinner (1987) [W1], [W2] dưới một điều kiện chính quy mạnh hơn hẳn điều kiện (CCCQ) (xem [DJL1], [JSDL]).

• Kết luận của Định lí 4.2 được thiết lập trong [DJL1] cho trường hợp $C = X$. Trường hợp $C \neq X$ được thiết lập mới đây trong [DGLo] (xem Mục 6 dưới đây). Tuy nhiên phép chứng minh đề nghị ở đây là mới, dựa trên Bổ đề 4.1.

• Định lí 4.2 bao quát được nhiều dạng mở rộng của Bổ đề Farkas cho các hệ tuyến tính, dưới tuyến tính cũng như cho hệ lồi đã biết trước đây.

• Với cách tiếp cận như trên, chúng ta có thể thiết lập một số dạng mở rộng khác cũng như các áp dụng khác của Bổ đề Farkas, chẳng hạn, Bổ đề Farkas dưới dạng đối ngẫu (tương tự như các kết quả trong [BW]), Bổ đề Farkas cho hệ các hàm DC (hiệu hai hàm lồi), nghiên cứu nghiệm xấp xỉ của bài toán tối ưu lồi, ... Các kết quả theo các hướng này sẽ được công bố trong một công trình khác (chẳng hạn, [DN], [DGN]).

5 Một số áp dụng vào bài toán tối ưu lồi

Trong phần này chúng ta sẽ nêu ra các áp dụng cơ bản của các kết quả trong các mục trước vào bài toán tối ưu lồi. Trước hết, các điều kiện cần và đủ tối ưu (Kuhn-Tucker) dạng dưới vi phân, các điều kiện tối ưu dạng điểm yên ngựa cũng như các định lí đối ngẫu mạnh được thiết lập dưới điều kiện chính quy (CCCQ).

Tuy nhiên, với sự phát triển của khoa học và kỹ thuật hiện nay, nhiều bài toán thực tế có mô hình toán học là các bài toán tối ưu lồi mà các điều kiện chính quy đã biết không được thỏa mãn (và do đó không thể áp dụng các lí thuyết đã có để nghiên cứu). Cách tiếp cận của chúng ta nêu trong các mục trên cho phép chúng ta thiết lập được tất cả các kết quả trên (điều kiện cần và đủ tối ưu, đối ngẫu, ...) cho các bài toán không cần thỏa mãn điều kiện chính quy nào. Các kết quả này sẽ được trình bày trong phần 2 của mục này. Phần còn lại của mục này dành cho việc trình bày các áp dụng của Bổ đề Farkas trong việc nghiên cứ các bài toán tối ưu đa mục tiêu và bài toán tối ưu toàn cục, cụ thể là bài toán tìm cực đại một hàm lồi.

5.1 Các điều kiện tối ưu, đối ngẫu mạnh

Xét bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$(P) \qquad \text{Minimize} \quad f(x)$$
$$\text{với ràng buộc} \quad x \in C, \quad -g(x) \in S,$$

trong đó X, Y là các không gian định chuẩn thực, $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi, $g : X \to$ là một ánh xạ S-lồi, liên tục với S là một nón lồi đóng trong Y (không nhất thiết có phần trong khác rỗng) và C là một tập lồi đóng trong X.

Sử dụng Bổ đề Farkas dạng không tiệm cận (Định lí 4.2) chúng ta có thể thiết lập được điều kiện cần và đủ tối ưu Kuhn-Tucker cho bài toán (P) dưới giả thiết chính quy (CCCQ).

Định lí 5.1 *(Điều kiện tối ưu) [JDL] Xét bài toán (P) và cho $a \in C \cap g^{-1}(-S)$. Giả sử rằng điều kiện (CCCQ) thỏa mãn. Khi đó a là một nghiệm của (P) nếu và chỉ nếu tồn tại $\lambda \in S^+$ sao cho*

$$0 \in \partial f(a) + \partial(\lambda g)(a) + N_C(a) \text{ và } \lambda g(a) = 0,$$

trong đó $N_C(a)$ là nón pháp tuyến với tập C tại a.

Chứng minh. (Vắn tắt) *Điều kiện cần:* Vì a là nghiệm của (P), ta có $f(a) = \inf\{f(x) : x \in C,\ g(x) \in -S\}$. Theo Định lí 4.2, tồn tại $\lambda \in S^+$ sao cho với mọi $x \in C$,

$$f(x) + (\lambda g)(x) \geq f(a).$$

Điều này có nghĩa là có $\lambda \in S^+$ sao cho với mỗi $x \in C,\ f(x) + (\lambda g)(x) \geq f(a) + (\lambda g)(a)$, và $(\lambda g)(a) = 0$. Bằng một lập luận tiêu chuẩn của giải tích lồi, điều này tương với điều kiện dưới vi phân $0 \in \partial f(a) + \partial(\lambda g)(a) + N_C(a)$ và $\lambda g(a) = 0$. Điều kiện đủ có thể được chứng minh dễ dàng bằng các lập luận quen thuộc của giải tích lồi. □

Đối với bài toán (P), hàm Lagrange được định nghĩa bởi

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu g(x),\ x \in X,\ \mu \in S^+$$

và bài toán đối ngẫu Lagragian tiêu chuẩn là

$$(D) \qquad \max_{\lambda \in S^+} \inf_{x \in C} L(x, \lambda).$$

Định lí 5.2 *(Đối ngẫu mạnh) [JDL] Đối với Bài toán (P), giả sử rằng tập các điểm chấp nhận được là không rỗng. Nếu điều kiện (CCCQ) thỏa mãn thì tồn tại $\lambda_0 \in S^+$ sao cho*

$$\inf_{x \in C} \sup_{\lambda \in S^+} L(x, \lambda) = \sup_{\lambda \in S^+} \inf_{x \in C} L(x, \lambda) = \inf_{x \in C} L(x, \lambda_0) = \inf(P).$$

5.2 Các điều kiện tối ưu và đối ngẫu "hoàn hảo" không có điều kiện chính quy

Trong mục này chúng ta cũng sẽ khảo sát Bài toán (P). Tuy nhiên ở đây (P) không được giả thiết phải thỏa mãn bất cứ điều kiện chính quy nào. Trả giá cho việc thiếu vắng các điều kiện chính quy, các điều kiện tối ưu cũng như các kết quả về đối ngẫu đều ở dạng tiệm cận (giới hạn). Nhiều tác giả trước đây cũng đã cố gắng thiết lập các kết quả tương tự cho trường hợp không có điều kiện chính quy. Tuy nhiên ưu điểm của các kết quả trình bày dưới đây là sáng sủa, mở rộng trực tiếp của các kết quả dạng tiêu chuẩn. Đặc biệt là ở dạng này chúng ta có thể thiết lập được cả các định lí đối ngẫu mạnh và "đối ngẫu hoàn hảo", một điều mà theo tác giả, chưa từng được thiết lập trước đây.

Để việc trình bày được đơn giản, ta giả thiết rằng X là một không gian Banach phản xạ (các kết quả ở đây vẫn còn đúng khi X là một không gian định chuẩn thực tuỳ ý. Tuy nhiên, thay cho các dãy, ta sẽ phải sử dụng các lưới (nets)).

Để ý rằng nếu điều kiện chính quy (CCCQ) được thỏa mãn, $a \in C$ là một nghiệm tối ưu của bài toán lồi (P) khi và chỉ khi (xem Định lí 5.1) tồn tại $\lambda \in S^+$, tồn tại $u \in \partial f(a)$, $v \in \partial(\lambda g)(a)$ và $w \in N_C(a)$ sao cho $u + v + w = 0$ và $\lambda g(a) = 0$. Trong trường hợp (P) không thỏa mãn điều kiện chính quy nào, ta có thể thiết lập điều kiện tương tự như trên dưới dạng tiệm cận như trong các định lí sau đây (xem [JLD1], [JLD2], [JLD3]).

Định lí 5.3 *(Điều kiện tối ưu theo dãy I) Xét bài toán (P). Giả sử rằng $a \in C \cap g^{-1}(-S)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $f(a) = \inf\{f(x) :\ x \in C,\ -g(x) \in S\}$ *(a là nghiệm của (P)),*

(ii) $(\exists\, u \in \partial f(a)\,)(\exists\{\lambda_n\} \subset S^+)(\exists\{\epsilon_n\},\{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+)\ (\exists\{v_n\},\{w_n\} \subset X')$ *sao cho* $v_n \in \partial_{\epsilon_n}(\lambda_n g)(a)$, $w_n \in \partial_{\gamma_n}\delta_C(a)$, $u + v_n + w_n \to_* 0, \epsilon_n \to 0, \gamma_n \to 0$ *và* $\lambda_n g(a) \to 0$ *khi* $n \to \infty$.

Định lí sau đây cho ta điều kiện tối ưu theo dãy cho (P) (không có mặt giả thiết chính quy), được mô tả bởi dưới vi phân (thay vì ϵ-dưới vi phân và do đó có thể áp dụng cho các bài toán trơn) tại các điểm gần kề với điểm tối ưu a.

Định lí 5.4 *(Điều kiện tối ưu theo dãy II) Xét bài toán (P). Giả sử rằng $a \in C \cap g^{-1}(-S)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $f(a) = \inf\{f(x) :\ x \in C,\ -g(x) \in S\}$ *(a là nghiệm của (P)),*

(ii) $(\exists\, u \in \partial f(a))$, $(\exists\{\lambda_n\} \subset S^+)$, $(\exists\{x_n\} \subset C)$, $(\exists\{v_n\} \subset X')$, $(\exists\{w_n\} \subset X')$ *sao cho* $v_n \in \partial(\lambda_n g)(x_n)$, $w_n \in \partial\delta_C(x_n)$, *và* $u + v_n + w_n \to_* 0$, $\|x_n - a\| \to 0$, $\lambda_n g(x_n) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Định lí 5.5 *(Minimax Lagrange theo dãy) Đối với Bài toán (P), giả sử rằng tập các điểm chấp nhận được là không rỗng. Khi đó tồn tại một dãy $(\bar{\lambda}_n) \subset S^+$ sao cho*

$$\inf_{x\in C} \sup_{(\lambda_n)\subset S^+} \liminf_{n\to\infty} L(x,\lambda_n) = \sup_{(\lambda_n)\subset S^+} \inf_{x\in C} \liminf_{n\to\infty} L(x,\lambda_n)$$

$$= \inf_{x\in C} \liminf_{n\to\infty} L(x,\bar{\lambda}_n) = \inf(P).$$

Bây giờ chúng ta định nghĩa bài toán **đối ngẫu Lagrange theo dãy** của bài toán (P) như sau:

$$(\widetilde{D}) \qquad \max_{(\lambda_n)\subset S^+} \inf_{x\in C} \liminf_{n\to\infty} L(x,\lambda_n).$$

Từ định nghĩa trên và Định lí 5.5 ta thấy rằng điều kiện đối ngẫu mạnh thỏa mãn đối với (P) và $(\widetilde{D})$. Tuy nhiên, ta còn được nhiều hơn thế nữa.

Ta nói rằng hai bài toán tối ưu là **"đối ngẫu hoàn hảo"** (perfect duality) nếu:

(a) Bài toán này có giá trị hữu hạn thì bài toán kia cũng có cùng giá trị,

(b) Khi cả hai bài toán đều tương thích (tập chấp nhận được đều khác rỗng) thì chúng có cùng giá trị.

Định lí 5.6 *("đối ngẫu hoàn hảo") Các bài toán (P) và $(\widetilde{D})$ là một cặp bài toán đối ngẫu "hoàn hảo".*

Nhận xét. Các kết luận của các Định lí 5.5 và 5.6 đều được chứng minh trong [DJL1] cho trường hợp $C = X$. Tuy nhiên với trường hợp $C \neq X$, phép chứng minh cũng có thể thực hiện tương tự.

5.3 Bài toán tối ưu đa mục tiêu

Trong mục này chúng ta sẽ nêu ra một số đặc trưng của các nghiệm yếu và nghiệm "chân chính" của bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi tổng quát có dạng:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{VP}) & V-\text{Minimize} & f(x) \\ & \text{với ràng buộc} & g(x) \in -S, \\ & & x \in C, \end{array}$$

trong đó X, Y, Z là các không gian Banach. S là một nón lồi đóng trong Y còn K là một nón lồi đóng, nhọn trong Z, C là một tập lồi đóng trong X. Ngoài ra, $f : X \to Z$ là một ánh xạ K-lồi và $g : X \to Y$ là một ánh xạ S-lồi.

Gọi $A := \{x \in X \mid x \in C, g(x) \in -S\}$,

$$K^+ := \{\theta \in Y' \mid \theta(k) \geq 0, \forall k \in K\},$$

$$K^{+i} := \{\theta \in Y' \mid \theta(k) > 0, \forall k \in K \setminus \{0\}\}.$$

• Một điểm $a \in A$ được gọi là một **nghiệm yếu** (weak solution) của Bài toán (VP) nếu $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ và $(f(A) - f(a)) \cap -\operatorname{int} K = \emptyset$.

• Một điểm $a \in A$ được gọi là một **nghiệm "chân chính"** (proper solution) của Bài toán (VP) nếu tồn tại một nón lồi K' sao cho $K \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} K'$ và $(f(A) - f(a)) \cap -K' = \{0\}$.

Định lí 5.7 *[JDS] Giả sử a là một điểm chấp nhận được của (VP). Khi đó a là một nghiệm "chân chính" (nghiệm yếu) của (VP) nếu và chỉ nếu tồn tại $\theta \in K^{+i}$ ($\theta \in K^+ \setminus \{0\}$), $u \in \partial(\theta f)(a)$ sao cho*

$$(-u, -u(a)) \in \operatorname{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \operatorname{epi}(\lambda g)^* + \operatorname{epi} \delta_C^*\right).$$

Chứng minh (ý tưởng)

• a là một nghiệm "chân chính" (nghiệm yếu) của (VP) nếu và chỉ nếu tồn tại $\theta \in K^{+i}$ ($\theta \in K^+ \setminus \{0\}$, tương ứng) và $u \in \partial(\theta f)(a)$ sao cho $(-u, -u(a)) \in \operatorname{epi} \sigma_A$.

• Theo Bổ đề 4.1,

$$\operatorname{epi} \sigma_A = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \operatorname{epi}(\lambda g)^* + \operatorname{epi} \delta_C^*\right).$$

□

Định lí 5.8 *[JDS] Giả sử rằng đối với bài toán (VP), điều kiện chính quy (CCCQ) được thỏa mãn và a là một điểm chấp nhận được. Khi đó a là một nghiệm "chân chính" (nghiệm yếu) của (VP) nếu và chỉ nếu tồn tại $\theta \in K^{+i}$ ($\theta \in K^+ \setminus \{0\}$), $\lambda \in S^+$ sao cho*

$$0 \in \partial(\theta f)(a) + \partial(\lambda g)(a) + N_C(a), \quad \lambda g(a) = 0.$$

Bây giờ chúng ta xét bài toán tối ưu vectơ cơ bản:

$$\text{(VP1)} \quad \text{V} - \text{Minimize} \quad f(x)$$
$$\text{với ràng buộc} \quad x \in A,$$

trong đó A là một tập con của X. Chúng ta sẽ đưa ra các đặc trưng của nghiệm Pareto và nghiệm mạnh của (VP1).

• Một điểm $a \in A$ được gọi là một **nghiệm mạnh** (nghiệm lí tưởng) của Bài toán (VP1) nếu $(f(A) - f(a)) \subset K$ (xem chi tiết trong [Luc]).

• Một điểm $a \in A$ được gọi là một **nghiệm Pareto** của Bài toán (VP1) nếu $(f(A) - f(a)) \cap (-K) = \{0\}$.

Định lí 5.9 *[JLD2] Giả sử rằng $\theta \in K^{+i}$ và $a \in A$. Khi đó a là một nghiệm Pareto của (VP1) nếu và chỉ nếu a là một nghiệm của bài toán vô hướng hóa:*

$$\begin{array}{lll} (VP_\theta) & \textit{Minimize} & (\theta f)(x) \\ & \textit{với ràng buộc} & f(x) - f(a) \in -K, \\ & & x \in A. \end{array}$$

Định lí 5.10 *[JDS] Giả sử $\theta \in K^{+i}$ và $a \in A$ là một điểm chấp nhận được (VP1). Khi đó a là một nghiệm Pareto của (VP1) nếu và chỉ nếu tồn tại $u \in \partial(\theta f)(a)$ sao cho*

$$-(u, u(a)) \in cl\left(\bigcup_{\mu \in K^+} [\, epi\ (\mu f)^* + (0, (\mu f)(a))] + \ epi\ \delta_A^*\right).$$

Điều đáng chú ý là nếu a là một nghiệm Pareto của (VP1) thì *điều kiện chính quy dạng Slater không thỏa mãn* đối với bài toán vô hướng hóa (VP_θ). Tuy nhiên, một đặc trưng không tiệm cận đơn giản của nghiệm Pareto của (VP1) có thể nhận được dưới một giả thiết về điều kiện đóng như sẽ đưc nêu ra trong Hệ quả sau.

Hệ quả 5.1 *[JDS] Cho $\theta \in K^{+i}$ và $a \in A$ là một điểm chấp nhận được (VP1). Giả sử rằng tập $\bigcup_{\mu \in K^+} [\mathrm{epi}\ (\mu f)^* + (0, (\mu f)(a))] +\ epi\ \delta_A^*$ là đóng yếu*. Khi đó a là một nghiệm Pareto của (VP1) nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu \in K^+$ sao cho*

$$0 \in \partial[(\theta + \mu) f](a) + N_A(a).$$

5.4 Bài toán tối ưu toàn cục: Maximum một hàm lồi

Bây giờ chúng ta xét bài toán cực đại một hàm lồi với ràng buộc lồi theo nón:

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{Maximize} & f(x) \\ & \text{với ràng buộc} & -g(x) \in S, \end{array}$$

trong đó hàm f và ánh xạ g như ở trên.

Các ý tưởng chính:

• *Bổ đề Farkas cho hệ có chứa ràng buộc lồi đảo*

Để ý rằng a là một nghiệm toàn cục của bài toán (P2) nếu và chỉ nếu

$$-g(x) \in S \implies h(x) := f(x) - f(a) \leq 0.$$

Điều này tương đương với

$$-g(x) \in S \implies u(x) \leq \alpha$$

với mọi $(u, \alpha) \in \text{epi}h^*$. Đến lượt nó, mệnh đề này tương đương với (Hệ quả 4.1)

$$(u, \alpha) \in \text{cl}\left(\cup_{\lambda \in S^+} \text{epi}\,(\lambda g)^*\right), \quad \forall (u, \alpha) \in \text{epi}h^*.$$

Do đó a là nghiệm toàn cục của (P2) nếu và chỉ nếu

$$\text{epi}f^* + (0, f(a)) \subset \text{cl}\left(\cup_{\lambda \in S^+} \text{epi}\,(\lambda g)^*\right).$$

• *Điều kiện tối ưu dạng ϵ-dưới vi phân*

Sử dụng biểu diễn sau (xem [Jeyakumar]) của epigraph của hàm lồi f qua ϵ-dưới vi phân

$$\text{epi}f^* = \bigcup_{\epsilon \geq 0} \{(v, v(a) + \epsilon - f(a)) \mid v \in \partial_\epsilon f(a)\}$$

chúng ta sẽ nhận được điều kiện tối ưu cho (P2) được mô tả dưới ngôn ngữ ϵ-dưới vi phân.

6 Một cách tiếp cận mới - các mở rộng xa hơn và áp dụng

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày một cách tiếp cận mới đơn giản hơn (xuất phát từ các kết quả đã biết cho các hệ tuyến tính) nhưng lại cho ta các mở rộng tổng quát hơn các kết quả dạng Farkas. Một cách cụ thể, chúng ta xét các hệ thống bất đẳng thức lồi mà trong đó các hàm lồi có thể nhận giá trị vô cùng, không nhất thiết liên tục (như ở các mục trước). Ý tưởng cơ bản của cách tiếp cận này là sử dụng định lí Fenchel-Morreau để thay thế các hệ lồi đã cho bằng các hệ tuyến tính hoá (tương đương) của chúng. Sau đó vận dụng các kết quả đã biết đối với các hệ tuyến tính cho các hệ tuyết tính này.

Công đoạn cuối cùng là diễn dịch các kết quả vừa có được sang ngôn ngữ thông thường của giải tích lồi. Bằng cách này chúng ta có thể hiểu rõ một cách bản chất hơn các kết quả trước đây mà thoạt nhìn hết sức phức tạp và đầy "bí hiểm". Nhờ đó, chúng ta có thể đề xuất một điều kiện chính quy yếu hơn điều kiện (CCCQ) nêu ra ở mục trước. Trên cơ sở đó, các kết quả đạt được trong mục này tổng quát hơn, cải tiến một cách bản chất các kết quả tương ứng trong các mục trước. Nhiều kết quả trình bày ở đây có thể mở rộng và áp dụng vào các lĩnh vực khác của toán học (chẳng hạn, xem [GJD], [BW]).

6.1 Các mở rộng của Bổ đề Farkas cho hệ lồi vô hạn

Trong mục này chúng ta chủ yếu nghiên cứu hệ (gồm một số vô hạn các bất đẳng thức lồi và một ràng buộc tập) sau

$$\sigma := \{f_t(x) \leq 0, t \in T;\ x \in C\},$$

trong đó T là một tập chỉ số tùy ý (có thể vô hạn), $C \subset X$ là một tập con lồi đóng, X là một không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff và $f_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ với mọi $t \in T$. Giả sử rằng f_t là các hàm lồi chân chính, nửa liên tục dưới (l.s.c.), mọi $t \in T$.

Để ý rằng khi các hàm f_t, $t \in T$ là các hàm lồi hữu hạn và liên tục, σ có thể viết lại dưới dạng (đã nghiên cứu trong các phần trước) $\{g(x) \in -S;\ x \in C\}$, trong đó $S := \mathbb{R}^T_+$ là nón dương trong không gian tích $\mathbb{R}^T$ và $g : X \to \mathbb{R}^T$ được định nghĩa bởi $(g(x))(t) := f_t(x)$ với mọi $x \in X$ và mọi $t \in T$. Dễ dàng thấy rằng g là một ánh xạ S-lồi và liên tục.

Tính tương thích (có nghiệm) là vấn đề được quan tâm đầu tiên trong việc nghiên cứu hệ σ. Định lí sau nêu lên các đặc trưng cơ bản của tính tương thích của σ và cũng là công cụ cơ bản cho các nghiên cứu sâu hơn trình bày trong mục này.

Định lí 6.1 *Giả sử hệ lồi $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T; x \in C\}$ thỏa mãn các điều kiện như trên. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) σ là tương thích,

(ii) $(0, -1) \notin \mathrm{cl\,cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{gph} f_t^* \cup \mathrm{gph}\delta_C^*\right\}$,

(iii) $(0, -1) \notin \mathrm{cl\,cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* \cup \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$,

Ở đây $\mathrm{gph} f$ *chỉ đồ thị của hàm* f.

Trong việc thiết lập các mở rộng của Bổ đề Farkas cho hệ σ, nhận xét sau đây đóng một vai trò quan trọng, cho phép ta tuyến tính hóa hệ này.

Vì f_t là các hàm lồi chân chính, l.s.c., từ định lí đối ngẫu cơ bản của giải tích lồi, ta được $f_t^{**} = f_t$ với mọi $t \in T$. Do đó, với mỗi $t \in T$,

$$\begin{aligned} f_t(x) \le 0 &\iff f_t^{**}(x) \le 0 \\ &\iff u_t(x) - f_t^*(u_t) \le 0,\ \forall u_t \in \mathrm{dom} f_t^* \\ &\iff u_t(x) \le f_t^*(u_t),\ \forall u_t \in \mathrm{dom} f_t^* \\ &\iff u_t(x) \le f_t^*(u_t) + \alpha,\ \forall u_t \in \mathrm{dom} f_t^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Mặt khác, $x \in C$ có thể biểu diễn dưới dạng $\delta_C(x) \le 0$, với δ_C (hàm chỉ tiêu của C) là lồi chân chính và l.s.c. (vì C là lồi và đóng). Vì thế

$$\begin{aligned} \delta_C(x) \le 0 &\iff u(x) \le \delta_C^*(u),\ \forall u \in \mathrm{dom}\delta_C^* \\ &\iff u(x) \le \delta_C^*(u) + \beta,\ \forall u \in \mathrm{dom}\delta_C^*,\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Như thế các hệ tuyến tính sau đây có cùng tập nghiệm trong X như σ (và vì vậy chúng được gọi là các hệ **tuyến tính hóa** của σ):

$$\sigma_1 := \left\{ \begin{array}{l} u_t(x) \le f_t^*(u_t),\ u_t \in \mathrm{dom} f_t^*,\ t \in T \\ u(x) \le \delta_C^*(u),\ u \in \mathrm{dom}\delta_C^* \end{array} \right\},$$

$$\sigma_2 := \left\{ \begin{array}{l} u_t(x) \le f_t^*(u_t) + \alpha,\ u_t \in \mathrm{dom} f_t^*,\ t \in T,\ \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ u(x) \le \delta_C^*(u) + \beta,\ u \in \mathrm{dom}\delta_C^*,\ \beta \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}.$$

Giả sử rằng K là một nón lồi nào đó trong $X^* \times \mathbb{R}$ sao cho $\{v(x) \le \alpha, (v, \alpha) \in K\}$ là một tuyến tính hóa của σ. Chúng ta sẽ sử dụng giả thiết sau nhiều lần khi thiết lập các kết quả dạng không tiệm cận liên quan đến hệ σ.

(A) *K là tập đóng yếu*.*

Để ý rằng điều kiện chính quy (CCCQ) nêu ra ở các mục trước có nghĩa là (A) thoả mãn với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* + \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$. Ngoài ra, trong [DGLo] các tác giả đã chứng minh được rằng nếu (A) thoả mãn với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* + \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$ hay với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{gph} f_t^* \cup \mathrm{gph}\delta_C^*\right\}$ thì (A) thỏa mãn với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* \cup \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$. Điều ngược lại không đúng. Điều này có nghĩa là điều kiện (A) với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* \cup \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$ là *yếu hơn hẳn* điều kiện chính quy (CCCQ).

Định lí 6.2 *(Bổ đề Farkas 1) Giả sử σ là tương thích $v \in X^* \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu (A) thỏa mãn với $K = \mathrm{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \mathrm{epi} f_t^* \cup \mathrm{epi}\delta_C^*\right\}$ thì các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $f_t(x) \le 0, \forall t \in T$ và $x \in C \Longrightarrow v(x) \ge \alpha$;

(ii) $-(v, \alpha) \in K$.

(iii) Tồn tại $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ *sao cho*

$$v(x) + \sum_{t \in T} \overline{\lambda}_t f_t(x) \geq \alpha, \ \forall x \in C.$$

Chứng minh (vắn tắt) Sử dụng Định lí 3.2 cho hệ tuyến tính hóa σ_2. Kết luận của định lí được suy ra từ giả thiết (A) và các lập luận cơ bản của giải tích lồi. □

Trong [DGLo], ngoài việc thiết lập một dạng mở rộng của Bổ đề Farkas, các mở rộng khác nhau của Định lí Fan cũng như các áp dụng của chúng cũng được giới thiệu. Tiếp tục theo hướng này, dạng mở rộng sau của Bổ đề Farkas được thiết lập trong [DGLS].

Định lí 6.3 *[DGLS] (Bổ đề Farkas 2) Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Giả sử rằng* $A \neq \emptyset$. *Nếu (A) thỏa mãn với* $K = \operatorname{cone}\left\{\bigcup_{t\in T} \operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\right\}$ *và điều kiện (B) sau đây được nghiệm đúng*

(B) $\operatorname{epi} f^* + \operatorname{cone}\{\bigcup_{t\in T} \operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\}$ *là đóng yếu**

thì các mệnh đề sau là tương đương:

(i) $f_t(x) \leq 0, \forall t \in T, x \in C \Longrightarrow f(x) \geq \alpha$,

(ii) $(0, -\alpha) \in \operatorname{epi} f^* + \operatorname{cone}\{\bigcup_{t\in T} \operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\}$,

(iii) $(\exists(\lambda_t) \in \mathbb{R}_+^{(T)})\ f(x) + \sum_{t\in T} \lambda_t f_t(x) \geq \alpha, \forall x \in C$.

Để ý rằng điều kiện (B) sẽ được thỏa mãn nếu f liên tục tại một điểm nào đó thuộc A. Định lí 6.3 bao quát các kết quả ở các mục trước như là các trường hợp riêng. Áp dụng dạng mở rộng này vào việc nghiên cứu các bài toán lồi vô hạn (bao hàm các bài toán lồi theo nón ở các mục trước như là trường hợp riêng) chúng ta nhận được những kết quả sâu sắc, cải thiện một cách bản chất các kết quả theo hướng này công bố trong thời gian gần đây.

6.2 Áp dụng vào bài toán tối ưu lồi vô hạn

Xét bài toán lồi vô hạn

$$\begin{array}{lrl} \text{(PI)} & \text{Minimize} & f(x) \\ & \text{với ràng buộc} & f_t(x) \leq 0, \forall t \in T, \\ & & x \in C, \end{array}$$

trong đó X là một không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff, $C \subset X$ là một tập lồi đóng và $f, f_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là các hàm lồi chân chính, l.s.c., mọi $t \in T$. Sử dụng Định lí 6.3 ta nhận được kết quả sau. Để ý rằng định lí này tổng quát hơn các định lí ở các mục trước và (nếu thu về các bài toán đặc biệt ở các mục trước) điều kiện chính quy (A) ở đây là yếu hơn (CCCQ).

Gọi $A := \{x \in X \mid f_t(x) \leq 0,\ \forall t \in T,\ x \in C\}$, $Z = \mathbb{R}^{(T)}$ (i.e., $\Pi_{t\in T}\mathbb{R}$) được trang bị tôpô tích. Khi đó, đối ngẫu tôpô của nó, Z^*, là không gian tôpô tuyến tính bao gồm tất cả các dãy hữu hạn suy rộng, nghĩa là, Z^* chứa những phiếm hàm $\lambda : T \to \mathbb{R}$ với giá hữu hạn. Gọi $\Lambda = \Pi_{t\in T}\mathbb{R}_+$ là nón dương trong Z. Khi đó, đối ngẫu của nó Λ^+ trong Z^* là

$$\Lambda^+ := \{\lambda = (\lambda_t) \in Z^* \mid \lambda_t \geq 0 \text{ mọi } t \in T \text{ và } \lambda_t = 0 \text{ với mọi } t \in T \text{ trừ một số hữu hạn }\}$$

Định lí 6.4 *[DGLS] (Điều kiện tối ưu) Đối với bài toán (PI), giả sử rằng (B) thỏa mãn và $a \in A$. Nếu thêm (A) thỏa mãn với $K = \operatorname{cone}\left\{\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\right\}$ thì a là một nghiệm của (PI) nếu và chỉ nếu tồn tại $(\lambda_t)_t \in \Lambda^+$ sao cho*

$$0 \in \partial f(a) + \sum_{t\in T}\lambda_t\partial f_t(a) + N_C(a),\ \lambda_t f_t(a) = 0,\ t \in T. \tag{1}$$

Hàm Lagrange của Bài toán (PI) được định nghĩa như sau:

$$L(x,\lambda) = \begin{cases} f(x) + \sum\limits_{t\in T}\lambda_t f_t(x), & \text{nếu } x \in C \text{ và } \lambda = (\lambda_t) \in \Lambda^+ \\ +\infty, & \text{các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Do đó bài toán đối ngẫu Lagrange của (PI) là

$$\text{(DI)} \qquad \max_{\lambda\in\Lambda^+}\ \inf_{x\in C}\{f(x) + \sum_{t\in T}\lambda_t f_t(x)\}.$$

Sử dụng Định lí 6.3 chúng ta cũng có thể dễ dàng chứng minh được các định lí đối ngẫu mạnh và điều kiện điểm yên ngựa cho Bài toán (PI).

Định lí 6.5 *[DGLS] (Đối ngẫu mạnh) Đối với bài toán (PI), giả sử rằng $A \neq \emptyset$, các điều kiện (B) và (A) thỏa mãn với $K = \operatorname{cone}\left\{\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\right\}$. Nếu Inf (P) là hữu hạn thì*

$$Max\ (DI) = Inf\ (PI)$$

(Bài toán (DI) có nghiệm).

Định lí 6.6 *[DGLS] (Điều kiện điểm yên ngựa) Đối với bài toán (PI), giả sử rằng $A \neq \emptyset$, các điều kiện (B) và (A) thỏa mãn với $K = \operatorname{cone}\left\{\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi}\delta_C^*\right\}$. Khi đó một điểm $a \in A$ là nghiệm của (PI) nếu và chỉ nếu tồn tại $\bar\lambda \in \Lambda^+$ sao cho $(a, \bar\lambda)$ là một điểm yên ngựa của hàm $L(.,.)$, nghĩa là,*

$$L(a,\lambda) \leq L(a,\bar\lambda) \leq L(x,\bar\lambda),\ \ \forall\lambda \in \Lambda^+,\ \ \forall x \in C.$$

Các kết quả này có thể được áp dụng để nghiên cứu nhiều lớp bài toán khác nhau, chẳng hạn, lớp các bài toán lồi nửa vô hạn, các bài toán (SDP), ... Ngoài ra, Định lí 6.3 còn có thể sử dụng để nghiên cứu tính ổn định của các bài toán tối ưu lồi tổng quát (một vài kết quả đầu tiên theo hướng này đã được thực hiện trong [DGLS]).

Tài liệu

[BW] R.I. Bot and G. Wanka (2005), Farkas type results with conjugate functions, *SIAM J. of Optimization*, 15, 540-554.

[chu] Yung-Chin Chu (1966), Generalization of some fundamental theorems on linear inequalities, *Acta Mathematica Sinica*, 16, 25-40.

[Cr] B.D. Craven (1978), *Mathematical Programming and Control Theory*, Chapman and Hall, London.

[DGLo] N. Dinh, M.A. Goberna, and M.A. Lopez (2005), From linear to convex systems: Consistency, Farkas' lemma and applications (đã được nhận đăng trên tạp chí *Journal of Convex Analysis*).

[DGLS] N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. Lopez, and T.Q. Son, New Farkas-type results with applications to convex infinite programming (bản thảo, 2005).

[DGN] N. Dinh, Guy Vallet, and T.T.A. Nghia, Lagrange approach to DC-programs with cone convex constraints (bản thảo, 2005).

[DJL1] N. Dinh, V. Jeyakumar, and G.M. Lee (2005), Sequential Lagrangian conditions for convex programs with applications to semidefinite programs, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 123, No. 1, 85-112.

[DJL2] N. Dinh, V. Jeyakumar, and G.M. Lee (2005), Lagrange Multiplier Characterizations of Solution Sets of Constrained Pseudolinear Optimization Problems (đã được nhận đăng trên tạp chí *Optimization*).

[DN] Nguyễn Định, Trần Thái An Nghĩa (2005), Bổ đề Farkas cho các hệ bất đẳng thức gồm các hàm lồi và hàm DC (đăng trên tạp chí này).

[GJO] B.M Glover, V. Jeyakumar, W. Oettli (1994), A Farkas lemma for difference sublinear systems and quasidifferentiable programming, *Math. Programming*, 63, 109-125.

[GJD] M.A. Goberna, V. Jeyakumar, and N. Dinh (2005), Dual Characterizations of set containments with strict inequalities (đã được nhận đăng trên tạp chí *Journal of Global Optimization*).

[GLP] M.A. Goberna, M.A. Lopez, and J. Pastor (1981), Farkas-Minkowski systems in semi-infinite programming, *Appl. Math. Optim.*, 7, 295-308.

[Gw] J. Gwinner (1987), Results of Farkas type, *Numer. Funct. Anal. Optimization* , 9, 471-520.

[Ha] Ch.-W Ha (1979), On systems of convex inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 68, 25-34.

[J1] V. Jeyakumar (2001), Farkas lemma and extensions, Encyclopedia of Optimization, Kluwer academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, II, 87- 91

[J2] V. Jeyakumar (2003), Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex constraints, *SIAM Journal on Optimization*, 13, 947-959.

[J3] V. Jeyakumar (2001), Farkas lemma and extensions, in *Encyclopedia of optimization*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands **II**, 87-91.

[JD] V. Jeyakumar and N. Dinh (2004), Avoiding duality gaps in convex semidefinite programming without Slater's condition, Applied Mathematics Report, AMR04/6, School of Mathematics, The University of New South Wales, Sydney, Australia.

[JDS] V. Jeyakumar, N. Dinh, and T.Q. Son, Characterizing Pareto minimum of multi-objective convex programs without Slater's condition (bản thảo, 2005).

[JG] V. Jeyakumar and B. M. Glover (1995), Nonlinear extensions of Farkas' Lemma with applications to global optimization and least squares, *Mathematics of Operations Research*, 20, 818-837.

[JLD1] V. Jeyakumar, G. M. Lee and N. Dinh (2003), New sequential Lagrange multiplier conditions characterizing optimality without constraint qualification for convex programs, *SIAM Journal on Optimization*, 14(2), 534 - 547.

[JLD2] V. Jeyakumar, G.M. Lee, and N. Dinh (2005), Characterizations of optimal solution sets of convex vector minimization problems (đã được nhận đăng trên *European Journal of Operation Research*).

[JLD3] V. Jeyakumar, G.M. Lee, and N. Dinh (2004), Liberating the subgradient optimality conditions from constraint qualifications, Applied Mathematics Report, AMR04/7, School of Mathematics, The University of New South Wales, Sydney, Australia.

[JRGI] V. Jeyakumar, V. Rubinov, A.M. Glover, and Ishizuka (1996), Inequalities systems and global optimization, *J. Math. Anal. Appl.*, 202, 900-919.

[JSDL] V. Jeyakumar, W. Song, N. Dinh, and G.M. Lee (2005), Stable strong duality in convex optimization, Applied Mathematics Report, AMR05/22, School of Mathematics, The University of New South Wales, Sydney, Australia.

[La1] J. B. Lasserre (1995), A New Farkas Lemma for Positive Semidefinite Matrices, IEEE Transactions on Automatic Control, 40, 1131-1133.

[La2] J. B. Lasserre (1997), A Farkas lemma without a standard closure condition, SIAM J. Control and Optimization, 35, 265-272.

[Luc] Dinh The Luc (1989), *Theory of vector optimization*, LNMES 319, Springer-Verlag, Berlin.

[Ma] O.L. Mangasrian (1968), *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York.

[PP] V. N. Phat and Jung Yeoul Park (1997), Further generalizations of Farkas' Theorem and their applications in optimal control, *Jounal of Mathematical Analysis and Applications*, 216, 23 - 39.

[ST] N. Shioji and W. Takahashi (1988), Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135, 383-398.

[zal] C. Zalinescu (2002), *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, New Jersey.

Tóm tắt :

Các kết quả dạng Farkas mở rộng và áp dụng vào lí thuyết các bài toán tối ưu lồi

Bài viết này trình bày một cách ngắn gọn những sự phát triển, mở rộng của Bổ đề Farkas, một Bổ đề đóng một vai trò chủ đạo trong việc nghiên cứu lí thuyết tối ưu. Chúng tôi cũng trình bày cách áp dụng những kết quả này vào các bài toán tối ưu lồi (cả bài toán một mục tiêu và bài toán đa mục tiêu) để đưa ra các điều kiện cần và đủ tối ưu, điều kiện điểm yên ngựa cũng như thiết lập các định lí đối ngẫu mạnh. Các kết quả này được thể hiện dưới hai dạng : tiệm cận và không tiệm cận (không có điều kiện chính quy). Phần cuối của bài viết dành cho việc trình bày một cách tiếp cận khác để mở rộng các kết quả dạng Farkas. Những dạng mở rộng này khi áp dụng vào bài toán tối ưu, không những mở rộng các kết quả đã biết cho các lớp bài toán tổng quát hơn, mà còn làm yếu đi một cách đáng kể các điều kiện chính quy mà các lớp toán này phải thoả mãn.

Abstract :

Farkas type results and their applications to convex optimization problems

The paper is a survey on the generalizations of farkas lemma which plays a crucial role in the study of optimization problems. We show also the ways how to apply these generalized versions to convex optimization problems (both single and multi-criteria problems) to derive necessary and sufficient conditions for optimality, saddle point conditions, and also strong duality results. These results are given in both asymptotic and non-asymptotic forms (without any regularity conditions). The last section of the paper is left for a new approach to generalized farkas lemma. These results when applied to theory of optimization, not only extend known results to classes of more general problems but also weaken substantially constraint qualification conditions.