CÔNG THỨC BIẾN THIÊN HẰNG SỐ ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA

LÊ HOÀN HOÁ[1], TRẦN TRÍ DŨNG[2]

1 Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chỉ ra nghiệm của phương trình vi phân không thuần nhất sau :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + L(t)x_t + f(t), t \geqslant s \geqslant 0 \\ x_s &= \varphi \in C_r := C([-r, 0], E) \end{aligned} \tag{1}$$

thỏa mãn một công thức biến thiên hằng số và sử dụng công thức ấy chúng tôi có thể nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm. Các giả thiết trong (1) như sau :

* $(A(t), D(A(t)))_{t\geqslant 0}$ là họ các toán tử sinh ổn định, sinh ra một họ tiến hoá liên tục mạnh $(V(t,s))_{t\geqslant s\geqslant 0}$ trên một không gian Banach E và họ tiến hoá này thỏa mãn : $\|V(t,s)\| \leqslant Me^{\omega(t-s)}$, $\forall(t,s) : t \geqslant s \geqslant 0$ (ω, M là các hằng số và $M \geqslant 1$).

* $L(.) \in BC(\mathbb{R}_+, L_s(C_r, E))$ và $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, E)$.

Phương trình (1) ở trên được rất nhiều các nhà Toán học quan tâm, nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau, chẳng hạn các tác giả trong [1], [2] và [3]. Trong các bài báo này, các tác giả đã chỉ ra sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu cho bài toán (1) ở trên theo nghĩa đó là một hàm liên tục x thỏa mãn : $x : [s-r, \infty) \to E$

$$x(t) = \begin{cases} V(t,s)\varphi(0) + \int\limits_s^t V(t,\sigma).[L(\sigma)x_\sigma + f(\sigma)]\, d\sigma & , t \geqslant s \\ \varphi(t-s) & , s-r \leqslant t \leqslant s \end{cases}$$

và họ nghiệm (x_t) là họ tiến hoá trên C_r.

Trong [1], các tác giả đã chứng minh được rằng nghiệm của (1) có thể được xác định bởi "*Công thức biến thiên hằng số*" và với công thức này ta có thể nghiên cứu dáng điệu tiệm cận các nghiệm.

Mục đích của chúng tôi trong bài báo này là mở rộng một số kết quả trong [1].

[1]PGS.TS, Khoa Toán - Tin học, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

[2]ThS, Khoa Toán - Tin học, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

2 Các kết quả chính

Định lí 2.1. *Giả sử điều kiện (2) bên dưới xảy ra và* $t \mapsto V(t+s,s)x$ *(với* $s \geqslant 0, x \in E$*) nằm trong một không gian con đóng thuần nhất* ε *nào đó của* $BUC(\mathbb{R}_+, E)$.

Khi đó, nghiệm $t \mapsto x(t+s,s,\varphi)$ *của phương trình (1) ứng với trường hợp thuần nhất* ($f \equiv 0$) *cũng nằm trong* ε *với mọi* $\varphi \in C_r$ *và với mọi* $s \geqslant 0$.

$$\begin{cases} 0 < q < 1 \text{ và } s_0 \geqslant 0 \\ \int\limits_0^\infty \|L(\tau+s)U(\tau+s,s)\varphi\|\,d\tau \leqslant q\,\|\varphi\|, \ \forall\varphi \in C_r, \forall s \geqslant s_0. \end{cases} \tag{2}$$

Để chứng minh định lí này chúng tôi cần các kết quả sau (xem [1]).

Bổ đề 2.1. *Cho* $(U(t,s))_{t\geqslant s\geqslant 0}$ *là một họ tiến hoá bị chặn trên* X, ε *là không gian con đóng thuần nhất của* $BUC(\mathbb{R}_+, X)$ *và* $h \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$ *(theo nghĩa tích phân Bochner). Giả sử ánh xạ* $t \mapsto U(t+s,s)x$ *thuộc về* ε *với mọi* $x \in X$ *và* $s \geqslant 0$. *Khi đó ta có ánh xạ* $t \mapsto \int\limits_0^t U(t+s, s+\sigma)h(\sigma)d\sigma$ *cũng thuộc* ε *với mọi* $s \geqslant 0$.

Bổ đề 2.2. *Cho* $g \in C(\mathbb{R}_+, E)$. *Khi đó giới hạn* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int\limits_s^t U(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0))g(\sigma)d\sigma$ *tồn tại đều trên* C_r *theo các tập compact của* $(t,s): t \geqslant s \geqslant 0$, *trong đó* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *và kí hiệu* $e^{\lambda\bullet}x = e^{\lambda} \otimes x$ *được xác định như sau :* $e^{\lambda\bullet}x(\tau) = (e^{\lambda} \otimes x)(\tau) = e^{\lambda\tau}x, x \in E, \tau \in \mathbb{R}$, *còn* $(U(t,s))_{t\geqslant s\geqslant 0}$ *là họ nghiệm tiến hoá của phương trình không dừng* ($L(t) \equiv 0$) *được cho bởi :*

$$U(t,s)\varphi(\tau) = \begin{cases} V(t+\tau,s)\varphi(0), t+\tau \geqslant s \\ \varphi(t+\tau-s), s-r \leqslant t+\tau \leqslant s \end{cases} \quad (*) \text{ với } \varphi \in C_r.$$

Bổ đề 2.3.

(i) Chuỗi $U_L(t,s) := \sum\limits_{n\geqslant 0} U_n(t,s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, *hội tụ đều trong* $L(C_r)$ *trên* $\{(t,s): 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ *(T cho trước) và* $(U_L(t,s))_{t\geqslant s\geqslant 0}$ *là một họ tiến hoá trên* C_r, *trong đó họ các toán tử* $(U_n(t,s))_{n\geq 0}$ *xác định như sau :*

$$\begin{aligned} U_0(t,s)\varphi &= U(t,s)\varphi \\ U_n(t,s)\varphi &= \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_s^t U(t,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda, A(0))L(\sigma)U_{n-1}(\sigma,s)\varphi\,d\sigma \end{aligned}$$

với $\varphi \in C_r$, $n \geqslant 1$ *và* $0 \leqslant s \leqslant t$. *Hơn nữa, ta còn có công thức biến thiên hằng số sau đây*

$$U_L(t,s)\varphi = U(t,s)\varphi + \lim_{\lambda\to\infty} \int_s^t U(t,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda, A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\,d\sigma \tag{3}$$

thỏa mãn với mọi $\varphi \in C_r$ *và* $t \geqslant s \geqslant 0$.

(ii) Với mỗi $\varphi \in C_r$ *và* $s \geqslant 0$, *hàm xác định bởi :*

$$x(t,s,\varphi) := \begin{cases} U_L(t,s)\varphi(0) & , s \leqslant t \\ \varphi(t-s) & , s-r \leqslant t \leqslant s \end{cases}$$

là nghiệm yếu duy nhất của phương trình (1) ở dạng thuần nhất ($f \equiv 0$) *và* $x_t = U_L(t,s)\varphi$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Chứng minh. (Chứng minh Định lí 2.1)

Lấy $t \geqslant 0, s \geqslant s_0$ và $\varphi \in C_r$, theo các kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} x(t+s,s,\varphi) &= U_L(t+s,s)\varphi(0)(\text{vì } t+s \geqslant s) \\ &= V(t+s,s)\varphi(0) + \int_s^{t+s} V(t+s,\sigma)L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\, d\sigma. \end{aligned}$$

Đổi biến số trong tích phân trên ta thu được :

$$x(t+s,s,\varphi) = V(t+s,s)\varphi(0) + \int_0^t V(t+s,\sigma+s)L(\sigma+s)U_L(\sigma+s,s)\varphi\, d\sigma.$$

Theo Bổ đề 2.1 và theo giả thiết, ta cần phải chỉ ra rằng

$$L(.+s)U_L(.+s,s)\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+, E).$$

Thật vậy, với $t \geqslant 0$, theo công thức biến thiên hằng số (3) ta có:

$$\begin{aligned} L(t+s)U_L(t+s,s)\varphi &= L(t+s)U(t+s,s)\varphi + \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty} \int_s^{t+s} L(t+s)U(t+s,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda, A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\, d\sigma. \end{aligned}$$

Do đó :

$$\int_0^t L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\, d\tau = \int_0^t L(\tau+s)U(\tau+s,s)\varphi\, d\tau +$$

$$+ \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \int_s^{\tau+s} L(\tau+s)U(\tau+s,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda, A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\, d\sigma\, d\tau.$$

Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân trên, ta thu được :

$$\int_0^t L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\, d\tau = \int_0^t L(\tau+s)U(\tau+s,s)\varphi\, d\tau +$$

$$+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{t+s}\int_0^{t+s-\sigma} L(\tau+\sigma)U(\tau+\sigma,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda,A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\, d\tau\, d\sigma.$$

Sử dụng các giả thiết trong điều kiện (2) ta suy ra :

$$\int_0^t \|L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\|\, d\tau \leqslant \int_0^t \|L\,(\tau+s)U(\tau+s,s)\,\varphi\|\, d\tau$$

$$+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{t+s}\int_0^{t+s-\sigma}\|L\,(\tau+\sigma)U(\tau+\sigma,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda,A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\,\varphi\|\, d\tau\, d\sigma$$

$$\leqslant q\,\|\varphi\| + q\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{t+s}\left\|e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda,A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\right\| d\sigma$$

(vì $\int_0^t \|L\,(\tau+s)U(\tau+s,s)\,\varphi\|\, d\tau \;\leqslant\; \int_0^\infty \|L\,(\tau+s)U(\tau+s,s)\,\varphi\|\, d\tau \;\leqslant\; q\,\|\varphi\|$ và

$$\int_0^{t+s-\sigma}\|L\,(\tau+\sigma)U(\tau+\sigma,\sigma)e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda,A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\,\varphi\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant q\left\|e^{\lambda\bullet}\lambda R(\lambda,A(0))L(\sigma)U_L(\sigma,s)\varphi\right\|,\ \forall\sigma\in[s,\ t+s]).$$

Do đó, sử dụng kết quả $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda,A(0))x = x\ \forall x\in E$ và $e^{\lambda\tau}\leqslant 1\ \forall\tau\in[-r,0]$ $(\lambda>\lambda_0=\max(\omega,0))$, ta suy ra :

$$\int_0^t \|L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\| d\tau \leqslant q\,\|\varphi\| + q\int_0^t \|L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\|\, d\tau,$$

hay là

$$\int_0^t \|L(\tau+s)U_L(\tau+s,s)\varphi\|\, d\tau \leqslant \frac{q\,\|\varphi\|}{1-q}\quad ,\forall t\geqslant 0.$$

Vì vậy, với $s\geqslant s_0$ và $\varphi\in C_r$, ta có $L(.+s)U_L(.+s,s)\varphi\in L^1(\mathbb{R}_+,\ E)$.

Áp dụng Bổ đề 2.1 ta suy ra ánh xạ $t\mapsto x(t+s,s,\varphi)$ thuộc ε.

Với $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $0 \leqslant t$, $\varphi \in C_r$, ta có thể viết

$$U_L(t + s_0 + s, s)\varphi(0) = U_L(t + s_0 + s, s_0 + s)U_L(s_0 + s, s)\varphi(0).$$

Vì $s + s_0 \geqslant s_0$ nên áp dụng bước trên ta suy ra $t \mapsto U_L(t + s_0 + s, s)\varphi(0)$ thuộc ε.

Cuối cùng, do ε là thuần nhất nên ta thu được $t \mapsto U_L(t + s, s)\varphi(0) \in \varepsilon$. Định lí được chứng minh. □

Chú thích 2.1. *Các tác giả trong [1] chỉ thu được định lí trên nếu trong điều kiện (2) ta có $0 < q < \frac{1}{M}$ (chú ý là $M \geqslant 1$).*

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận các nghiệm của phương trình (1). Trước hết chúng tôi cần một số định nghĩa sau :

Định nghĩa 2.1. *Một họ tiến hoá $(U(t,s))_{t \geqslant s \geqslant 0}$ được gọi là có tính chất* "**exponential dichotomy**" *nếu có một hàm $P : \mathbb{R}_+ \to L(X)$ sao cho hàm $P(.)x$ là liên tục và bị chặn với mỗi $x \in X$ và có các hằng số $\delta > 0$, $N = N(\delta) \geqslant 1$ sao cho với mọi $t, s \in \mathbb{R}_+$ và $t \geqslant s$ ta có :*

i. $P(t)U(t,s) = U(t,s)P(s)$,

ii. $\|U(t,s)P(s)\| \leqslant Ne^{-\delta(t-s)}$ và $\|U_Q(s,t)Q(t)\| \leqslant Ne^{-\delta(t-s)}$ với mọi $t, s \in \mathbb{R}_+$, trong đó $Q(.) := I - P(.)$ và $U_Q(t,s)$ là hạn chế của $U(t,s)$ trên $ImQ(s)$,

iii. $U_Q(t,s)$ là một toán tử khả đảo (khả nghịch) từ $ImQ(s)$ vào $ImQ(t)$.

Định nghĩa 2.2. *Họ các toán tử $(\Gamma(t,s))_{t \geqslant s \geqslant 0} \subset L(X)$ được cho bởi :*

$$\Gamma(t,s) := \begin{cases} U(t,s)P(s) & ,t \geqslant s \\ -U_Q(t,s)Q(s) & ,t < s \end{cases}$$

được gọi là toán tử Green tương ứng của họ tiến hoá có tính chất "exponential dichotomy" $(U(t,s))_{t \geqslant s \geqslant 0}$.

Chúng tôi thu được định lí sau đây :

Định lí 2.2. *Giả sử $(U_L(t,s))_{t \geqslant s \geqslant 0}$ thỏa tính chất i) và ii) trong Định nghĩa 2.1. Thế thì, với mỗi $f \in BC(\mathbb{R}_+, E)$, hàm $v : \mathbb{R}_+ \to E$ xác định bởi :*

$$v(t) := \begin{cases} \left[U_L(t,0)P(0)\varphi + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda \bullet} R(\lambda, A(0))f(\sigma)\, d\sigma\right](0) & ,t \geqslant 0 \\ \varphi(t) & ,-r \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \qquad (4)$$

là nghiệm yếu bị chặn duy nhất của phương trình (1), trong đó φ là điều kiện đầu ứng với $s = 0$ và φ thỏa mãn :

$$Q(0)\varphi = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{+\infty} \Gamma(0,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Hơn nữa, nếu $f \in C_0(\mathbb{R}_+, E)$ thì v cũng thuộc $C_0(\mathbb{R}_+, E)$.

Chú thích 2.2. *Các tác giả trước đây, trong [1] chẳng hạn, đã phải sử dụng giả thiết $(U_L(t,s))$ là họ tiến hoá có tính chất* "exponential dichotomy" *để chứng minh định lí này.*

Để chứng minh định lí này chúng tôi cần các kết quả sau :

Bổ đề 2.4. *(xem [1])*

Với mỗi $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, E)$, ta có giới hạn $\lim_{\lambda \to \infty} \int_s^t U_L(t,\sigma) e^{\lambda\bullet} \lambda R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma$ hội tụ đều trong C_r trên các tập compact của $\{(t,s) : t \geqslant s \geqslant 0\}$.

Bổ đề 2.5. *(xem [1])*

Cho $\varphi \in C_r$ và $s \geqslant 0$, khi đó hàm x định nghĩa bởi

$$x(t) := \begin{cases} u(t)(0) & , t \geqslant s \\ \varphi(t-s) & , s - r \leqslant t \leqslant s \end{cases}$$

là nghiệm yếu của phương trình (1), ở đây

$$u(t) := U_L(t,s)\varphi + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_s^t U_L(t,\sigma) e^{\lambda\bullet} \lambda R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \ , \ t \geqslant s.$$

Đảo lại, nếu x là một nghiệm yếu của (1) thì

$$x_t = U_L(t,s)\varphi + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_s^t U_L(t,\sigma) e^{\lambda\bullet} \lambda R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \ , \ t \geqslant s \qquad (5)$$

Bổ đề 2.6. *Giả sử rằng $(U_L(t,s))_{t \geqslant s \geqslant 0}$ thỏa tính chất i) và ii) trong Định nghĩa 2.1 và $f \in BC(\mathbb{R}_+, E)$. Khi đó giới hạn :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\infty} \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma$$

hội tụ đều theo t trên mỗi tập compact của $\mathbb{R}_+$.

Chứng minh. (Chứng minh Bổ đề 2.6)

Lấy $t \in [0, T]$ ($T > 0$ cho trước), ta có do tính chất i) của Định nghĩa 2.1

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^t \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \\ &= \int_0^t U_L(t,\sigma) P(\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \\ &= P(t)\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.4, ta có $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_1$ hội tụ đều theo t trên đoạn $[0, T]$.

$$\begin{aligned} I_2 := \varepsilon_\lambda(t) &:= \int_t^{+\infty} \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \\ &= -\int_t^{\infty} U_L(t,\sigma) Q(\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma \\ &= -Q(t)\int_t^{\infty} U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Do đó với $\tau \in [-r, 0]$ và $\lambda > \max(\omega, 0)$ ta có :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(t)(\tau) &= -Q(t)\int_t^{\infty} U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)(\tau)\, d\sigma \\ &= -Q(t)\int_t^{\infty} \lambda e^{\lambda(t+\tau-\sigma)} R(\lambda, A(0)) f(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Vì vậy ta suy ra :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_\lambda(t)(\tau)\| &\leqslant \|Q(t)\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{\lambda M}{\lambda-\omega}\left(-\frac{e^{\lambda(t+\tau-\sigma)}}{\lambda}\right)\Big|_t^\infty \leqslant \|Q(t)\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{M}{\lambda-\omega} e^{\lambda\tau} \\ &\leqslant \|Q(t)\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{M}{\lambda-\omega}. \end{aligned}$$

Điều này tương đương với :

$$\|\varepsilon_\lambda(t)\| \leqslant \|Q(t)\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{M}{\lambda-\omega} \leqslant \mathop{Sup}_{s\in[0,T]} \|Q(s)\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{M}{\lambda-\omega}.$$

Kết quả này chứng tỏ rằng $\varepsilon_\lambda(t)$ có nghĩa với mọi $t \in [0, T]$ và

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \varepsilon_\lambda(t) = 0 \;,\; \forall t \in [0, T].$$

Bổ đề được chứng minh. □

Chú thích 2.3. *Trong khi chứng minh bổ đề trên, chúng tôi chưa dùng đến giả thiết ii) trong Định nghĩa 2.1. Các tác giả trong [1] khi chứng minh bổ đề này đã dùng cả giả thiết ii) và iii) trong Định nghĩa 2.1.*

Chứng minh. (Chứng minh định lí 2).

• Giả sử v là một nghiệm yếu của (1). Khi đó, theo đẳng thức (5) của Bổ đề 2.5 ta có :

$$v_t = U_L(t,0)\varphi + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda *}R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma,\ t \geqslant 0.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda *}R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda *}R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma -$$

$$-U_L(t,0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty \Gamma(0,\sigma)\underbrace{\lambda e^{\lambda *}R(\lambda, A(0))f(\sigma)}_{K}\,d\sigma \quad (*)$$

Thật vậy, vế phải của $(*)$ bằng

$$U_L(t,0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty U_L(0,\sigma)Q(\sigma)K\,d\sigma + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)P(\sigma)K\,d\sigma -$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\int_t^\infty U_L(t,\sigma)Q(\sigma)K\,d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)Q(\sigma)K\,d\sigma + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)P(\sigma)K\,d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)[Q(\sigma)+P(\sigma)]K\,d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)K\,d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda *}R(\lambda, A(0))f(\sigma)d\sigma$$

= vế trái của (*).

Do đó ta thu được :

$$v_t = U_L(t,0)\left(\varphi - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(0,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right)+$$

$$+\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma$$

$$= U_L(t,0)(\varphi - Q(0)\varphi) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma$$

$$= U_L(t,0)P(0)\varphi + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma.$$

Vậy v có dạng như (4). Để kết thúc phần đầu của định lí, ta còn phải chỉ ra v là hàm bị chặn.

Thật vậy, ta có :

$$U_L(t,0)P(0)\varphi(0) = P(t)U_L(t,0)\varphi(0),$$
$$\|U_L(t,0)P(0)\varphi(0)\| \leqslant \|U_L(t,0)P(0)\|\,.\,\|\varphi(0)\| \leqslant Ne^{-\delta(t-0)}.\,\|\varphi(0)\| \leqslant N\,\|\varphi(0)\|\,.$$

Mặt khác, sử dụng Bổ đề (2.6), ta có :

$$\left[\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0)$$

là bị chặn với $t \geqslant 0$. Do đó :

$$v(t) = v_t(0) = U_L(t,0)P(0)\varphi(0) + \left[\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet}R(\lambda,A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0)$$

là bị chặn với mọi $t \geqslant 0$. Vậy phương trình (1) có duy nhất nghiệm yếu ("mild solution") bị chặn.

• Nếu có thêm $f \in C_0(\mathbb{R}_+, E)$ thì $v \in C_0(\mathbb{R}_+, E)$. Thật vậy, theo phần trên ta có:

$$\|U_L(t,0)P(0)\varphi(0)\| \leqslant \|U_L(t,0)P(0)\|\,.\,\|\varphi(0)\| \leqslant Ne^{-\delta t}.\,\|\varphi(0)\|\,.$$

Suy ra :

$$\lim_{t\to\infty} U_L(t,0)P(0)\varphi(0) = 0 \text{ (do } \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} = 0 \text{ vì } \delta > 0).$$

Do đó $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = 0$ với

$$\omega(t) = \left[\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{+\infty} \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0).$$

Theo Bổ đề 2.6 ta có :

$$\begin{aligned}
w(t) &= \left[\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t \Gamma(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0)\\
&= \left[\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t U_L(t,\sigma)P(\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0)\\
&= \left[\lim_{\lambda\to+\infty} P(t)\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda e^{\lambda\bullet} R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma\right](0)\\
&= \lim_{\lambda\to+\infty} P(t).\int_0^t U_L(t,\sigma)\lambda R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma\\
&= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t U_L(t,\sigma)P(\sigma)\lambda R(\lambda, A(0))f(\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết $f(t) \to 0$ khi $t \to \infty$, ta suy ra : với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $t_0 \geqslant 0$ sao cho $\|f(t)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon.\delta}{2MN}$ $\forall t \geqslant t_0$. Khi đó, với $t > t_0$, ta thu được :

$$\int_0^t \|U_L(t,\sigma)P(\sigma)\lambda R(\lambda, A(0))f(\sigma)\|\,d\sigma = \int_0^{t_0} \|U_L(t,\sigma)P(\sigma)\lambda R(\lambda, A(0))f(\sigma)\|\,d\sigma +$$

$$+\int_{t_0}^t \|U_L(t,\sigma)P(\sigma)\lambda R(\lambda, A(0))f(\sigma)\|\,d\sigma$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \frac{\lambda M}{\lambda-\omega}N\int_0^{t_0} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma + \frac{\varepsilon\delta}{2MN}.\frac{\lambda M}{\lambda-\omega}N\int_0^{t_0} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|_\infty \frac{\lambda MN}{\lambda-\omega}.(e^{-\delta(t-t_0)} - e^{-\delta t}) + \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\lambda}{\lambda-\omega}.(1 - e^{-\delta(t-t_0)}).$$

Do đó $\|\omega(t)\| \leqslant \frac{2MN}{\delta}\|f\|_\infty e^{-\delta(t-t_0)} + \varepsilon$, $\forall t > t_0$. Từ đây ta suy ra $\lim\limits_{t\to\infty}\omega(t) = 0$. Vậy $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$ hay $v \in C_0(\mathbb{R}_+, E)$. Định lí được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Said Boulite, Lahcen & Mohammed Moussi, (2003), *Non-autonomous retarded differential equations : the variation of constants formulas and the asymptotic behaviour*, EJDE vol. 2003, 1-15.

[2] A. Rhand, (1997), *Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded differential equations*, Studia Math.126, 219-233.

[3] G. Guhring and F. Rabiger, (1999), *Asymptotic properties of mild solutions of evolution equations with applications to retarded differential equations*, Abstr. Apl. Anal. 4, 169-194.

[4] J. Wu, (1996), *Theory and applications of partial functional differential equations*, App. Math. Sc. 199, Springer-Verlag.

Tóm tắt :

Công thức biến thiên hằng số
đối với một lớp phương trình tiến hoá

Trong bài báo này chúng tôi sẽ chỉ ra nghiệm của phương trình vi phân không thuần nhất sau :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + L(t)x_t + f(t), \; t \geqslant s \geqslant 0 \\ x_s &= \varphi \in C_r := C([-r, 0], E) \end{aligned}$$

thỏa mãn một công thức biến thiên hằng số và sử dụng công thức ấy chúng tôi có thể nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm.

Abstract :

The formula of variation of constant
for a class of evolution equations

In this article, we show that the solution of the non-homogeneous differential equation

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + L(t)x_t + f(t), t \geqslant s \geqslant 0 \\ x_s &= \varphi \in C_r := C([-r, 0], E) \end{aligned}$$

satisfies the formula of variation of constant. By using this formula, we can study asymptotic behavior of the solution.