K-QUĨ ĐẠO LƯỢNG TỬ CỦA MD5-NHÓM

Dương Minh Thành *

1. Mở đầu

Lượng tử hoá là quá trình xây dựng một hệ lượng tử từ một hệ cổ điển nhờ qui tắc lượng tử. Một đại lượng cổ điển F được lượng tử hoá thành đại lượng lượng tử Q(f), thỏa mãn nguyên lí bất định Dirac :

$$Q(f,g) = i\hbar^{-1}\left[Q(f),Q(g)\right]$$

Nói cách khác, ánh xạ lượng tử $i\hbar^{-1}Q$ chính là một đồng cấu đại số Lie ứng với móc Poisson và giao hoán tử.

Về phương diện toán học có thể coi Herman Weyl là người khởi xướng khái niệm lượng tử khi ông xây dựng ánh xạ Q từ các đại lượng cổ điển – các hàm trên không gian pha $\mathbb{R}^{2n}$, đến các đại lượng lượng tử, tức là các toán tử trên không gian Hilbert $L^2\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$:

$$\begin{aligned} Q : C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) &\to B\left(L^2\left(\mathbb{R}^{2n}\right)\right) \\ f &\mapsto Q(f) \end{aligned}$$

Ngay từ những năm 70, Berezin đã đưa ra định nghĩa toán học tổng quát của khái niệm lượng tử, đó là một hàm tử từ phạm trù cơ học cổ điển sang phạm trù các đại số kết hợp. Cùng thời với Berezin còn có các nhà toán học Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz và Sternheimer đã xét lượng tử hoá như là sự biến dạng của tích giao hoán thông thường các hàm thành một $*_\hbar -$tích kết hợp, không giao hoán, được tham số hoá bởi hằng số Plank và thỏa mãn nguyên tắc tương thích. Họ đã phát triển một cách có hệ thống khái niệm về lượng tử hoá biến dạng, coi nó là một lí thuyết về $*-$tích và dựa trên khái niệm này họ đã nhận được các công thức cũ và mới, độc lập với cơ học lượng tử.

Một hệ trong cơ học cổ điển là một đa tạp symplectic mà ta gọi là không gian pha và một hàm Hamilton H trên X. Một lượng tử hoá một hệ cổ điển X gồm có 3 phần [1] :

* ThS, Khoa Vật lí, Trường ĐHSP TP.HCM

1. Một họ các đại số phức không giao hoán $A_\hbar$ phụ thuộc vào tham số thực $\hbar$, mà ta sẽ đồng nhất với hằng số Planck, thỏa mãn :

$$A_\hbar \to A = C^\infty(X)^C \text{ khi } \hbar \to 0$$

2. Họ các ánh xạ tuyến tính $Q_\hbar : A \mapsto A_\hbar$ gọi là các toán tử lượng tử thỏa mãn tính chất :

$$\frac{Q_\hbar(F) *_\hbar Q_\hbar(G) - Q_\hbar(G) *_\hbar Q_\hbar(F)}{\hbar} \to \{F, G\} \text{ khi } \hbar \to 0$$

với $\{,\}$ là móc Poisson trong A.

3. Một biểu biễn $A_\hbar$ trên không gian Hilbert H_X, $R : A_\hbar \to End(H_X)$. Các hàm thực trong $A_\hbar$ ($\in C^\infty(X)$) tương ứng với các toán tử Hermit. Các phần tử của $A_\hbar$ được gọi là đối tượng lượng tử.

Bước đầu tiên để tìm ra một lượng tử hoá của một hệ vật lí cổ điển là xây dựng một biến dạng hình thức của các đối tượng Poisson cổ điển [2]. Cách xây dựng này đầu tiên được Berezin [1] đưa ra bằng cách xây dựng $*-$tích cho đa tạp Kahler và đưa ra công thức tích phân tường minh của $*-$tích khi $\hbar$ là số thực. Sau đó, De Wilde và Lecomte [3] và Fedosov [9] gần như cùng lúc xây dựng và phân loại $*-$tích hình thức trên các đa tạp symplectic tổng quát. Etingof và Kazhdan [8] chứng minh sự tồn tại của biến dạng hình thức cho lớp các đa tạp Poisson khác, các nhóm Poisson-Lie. Cuối cùng, Kontsevich [10] đã chứng minh được sự tồn tại của $*-$tích trên đa tạp Poisson tổng quát. Và gần đây, Reshetekhin và Taktajan đã đưa ra công thức tích phân tường minh của $*-$tích hình thức trên mọi đa tạp Kahler.

Theo cơ học lượng tử thì có sự tương ứng một cách hình thức giữa hệ cơ học cổ điển và hệ cơ học lượng tử. Vì vậy, bằng quá trình lượng tử hoá một hệ cơ học cổ điển chấp nhận được của một nhóm đối xứng G cho trước, ta có thể hi vọng thu được các biểu diễn unita của nhóm G lên không gian Hilbert H của một hệ lượng tử tương ứng và tiến gần đến lời giải của bài toán đối ngẫu unita, tức là bài toán phân loại tất cả các biểu diễn của nhóm G, bài toán trung tâm của lí thuyết biểu diễn.

Nghiên cứu và phân loại biểu diễn của đại số Lie hay nhóm Lie cho ta những thông tin về chính nhóm đó và của các đại số nhóm tương ứng. Việc giải quyết bài toán này rất phức tạp và hiện nay đang được các nhà toán học nghiên cứu nhằm cố gắng xây dựng và mô tả một cách tường minh. Để giải quyết bài toán này, phương pháp quĩ đạo của A. A. Kirillov đã ra đời và nhanh chóng trở thành một công cụ của đắc lực đối với lí thuyết biểu diễn. Trong phương pháp đó, Kirillov đã xuất phát từ phân thớ một chiều trên các đa tạp symplectic thuần nhất xây dựng từ các K-quĩ đạo trong G* để thu được biểu diễn của nhóm Lie G. Tiếp theo ông cùng với B. Kostant đã hình học hoá phương pháp quĩ đạo bằng cách xây dựng lí thuyết lượng tử hoá trên các đa tạp symplectic thuần nhất chặt mà ta vẫn gọi đó là lượng tử hoá hình học.

Vào những năm 79-80, Đỗ Ngọc Diệp cùng các cộng sự của mình đã đề xuất ra qui tắc lượng tử hoá hình học nhiều chiều [4]. Dựa vào đó mà chúng ta có thể thu được khá nhiều biểu diễn của nhóm Lie G.

Chương trình nghiên cứu bài toán đối ngẫu unita thông qua lượng tử hoá biến dạng đã thu nhiều kết quả quan trọng. Đây là một vấn đề khó và được nhiều nhà toán học quan tâm. Tuy nhiên, các tác giả hoặc là đưa ra một công thức lượng tử tổng quát, hoặc khẳng định sự tồn tại của chúng nên không thể áp dụng trực tiếp vào những trường hợp cụ thể để đưa ra những công thức lượng tử tường minh.

Chúng tôi quan tâm nhiều hơn đến một lớp con các nhóm Lie thực giải được mà các K-quĩ đạo của nó hoặc là 0-chiều hoặc có chiều cực đại [4]. Lớp này đầu tiên được Đỗ Ngọc Diệp đưa ra vào khoảng năm 1975 từ việc nghiên cứu các tính chất của nhóm các biến đổi affin trên đường thẳng thực aff□ và được gọi là lớp MD-nhóm, đại số Lie tương ứng của MD-nhóm được gọi là MD-đại số. Nếu số chiều cực đại đúng bằng số chiều của nhóm thì ta gọi là $\overline{MD}$-nhóm. Đại số Lie tương ứng với $\overline{MD}$-nhóm được gọi là $\overline{MD}$-đại số.

Năm 1984, Hồ Hữu Việt đã liệt kê và phân loại triệt để lớp các $\overline{\mathrm{MD}}$-đại số. Lớp này chỉ bao gồm các đại số Lie giao hoán n-chiều $\square^n$ $(n \geq 1)$, đại số Lie 2-chiều aff□ và đại số Lie 4-chiều aff□ [13]. Tuy nhiên, việc phân loại và nghiên cứu lớp các MD-nhóm và MD-đại số hiện nay vẫn đang là bài toán mở.

Để đơn giản thì người ta phân chia lớp các MD-nhóm và MD-đại số theo số chiều, lúc đó ta kí hiệu là MDn-nhóm và MDn-đại số (n tương ứng với số chiều của nhóm). Lớp nhóm Lie MD4 đã được Lê Anh Vũ liệt kê và phân loại triệt để, bức tranh các K-quĩ đạo của lớp nhóm này cũng được mô tả tường minh [14].

Năm 1999, Đỗ Ngọc Diệp và Nguyễn Việt Hải đã xây dựng lượng tử hoá biến dạng trên các K-quĩ đạo của lớp $\overline{\mathrm{MD}}$-nhóm và lớp MD4-nhóm, đồng thời đưa ra các biểu diễn unita vô hạn chiều tương ứng của các lớp nhóm này [5], [6], [7]. Từ đó đến nay, chưa có kết quả nào tương tự được công bố đối với bất kì một MD5-nhóm nào.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ xây dựng các K-quĩ đạo lượng tử từ các K-quĩ đạo của một MD5-nhóm đơn liên liên thông tương ứng với MD5-đại số có ideal dẫn xuất giao hoán 2 chiều được Lê Anh Vũ đưa ra gần đây [15]. Đồng thời cũng mô tả tường minh biểu diễn unita bất khả qui vô hạn chiều của MD5-nhóm đó.

2. Các kiến thức liên quan

2.1 K-quĩ đạo của MD5-nhóm

Cho G là một nhóm Lie, $\mathcal{G}$ =Lie(G) là đại số Lie của G, tức là không gian tiếp xúc T_eG tại điểm đơn vị e của nhóm G. Khi đó nhóm G tác động lên chính nó bởi tự đẳng cấu trong :

$$i(g): x \mapsto gxg^{-1}$$

Tác động này có điểm bất động chính là e, đồng thời cảm sinh tác động đạo hàm của G lên $\mathcal{G}$:

$$Ad(g): \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

Tác động này cũng sinh ra biểu diễn Ad được gọi là biểu diễn phụ hợp của nhóm Lie G.

Gọi $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$. Khi đó biểu diễn đối phụ hợp của G (hay còn gọi là K-biểu diễn) được định nghĩa như sau :

$$\left\langle K(g)F, X \right\rangle = \left\langle F, Ad(g^{-1})X \right\rangle \ ; \quad F \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G}, g \in G$$

Khi g chạy khắp G thì $\Omega_F = \{K(g)F / g \in G\} \subset G^*$ được gọi là quĩ đạo đối phụ hợp (hay còn gọi là K-quĩ đạo) đi qua F.

Mệnh đề 2.1 : *Trên mọi K-quĩ đạo Ω_F của nhóm Lie G, luôn tồn tại dạng vi phân cấp 2 đóng, không suy biến, G-bất biến mà ta gọi là dạng Kirillov.*

Định nghĩa 2.2 : *Một đa tạp symplectic là một đa tạp trơn mà trên đó được trang bị một dạng symplectic ω, tức là một dạng vi phân cấp 2 đóng, không suy biến.*

Như vậy, mọi đa tạp symplectic đều có số chiều chẵn. Đồng thời, mỗi K-quĩ đạo đều là một đa tạp symplectic.

Cho nhóm Lie G thực giải được, nếu các K-quĩ đạo của G hoặc là không chiều hoặc có chiều cực đại thì nhóm G đó được gọi là một MD-nhóm. Vấn đề đặt ra là chúng ta tìm cách lượng tử hoá biến dạng trên các K-quĩ đạo có chiều cực đại của một MDn-nhóm cho trước (n là số chiều của nhóm G). M.Kontsevich [10] đã chứng minh được là có thể lượng tử hoá biến dạng trên mọi đa tạp symplectic bất kỳ. Tuy nhiên, kết quả đó không chỉ ra được công thức tường minh cho từng đa tạp symplectic cụ thể, chẳng hạn như các K-quĩ đạo chiều cực đại của một MDn-nhóm.

Bài toán lượng tử hoá biến dạng trên các K-quĩ đạo của lớp $\overline{\text{MD}}$-nhóm và MD4-nhóm đã được Đỗ Ngọc Diệp và Nguyễn Việt Hải giải quyết [5], [6], [7]. Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán tương tự với những nhóm Lie thuộc lớp MD5-nhóm mới được Lê Anh Vũ đưa ra trong thời gian gần đây [15], cụ thể là MD5-nhóm đơn liên, liên thông G mà MD5-đại số tương ứng $G = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ có tính chất :

$$[X_1,X_2]=X_4,\ [X_2,X_3]=X_5,\ G^1 = [G,G] = \langle X_4, X_5 \rangle \cong R^2.$$

Mệnh đề 2.3 :

Giả sử $F \in G^*$ được biểu diễn trong cơ sở đối ngẫu $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\}$ của cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^*$. Khi đó, K-quĩ đạo của nhóm G qua F được mô tả như sau :

(i) Nếu $\delta = \sigma = 0$ thì quĩ đạo là 0 chiều : $\Omega_F = \{(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)\}$

(ii) Nếu $\delta^2 + \sigma^2 \neq 0$ thì quĩ đạo $\Omega_F = \{(x, y, z, \delta, \sigma) : \sigma x + \delta z = \sigma\alpha + \delta\gamma\}$

Chứng minh.

Đặt $X=aX_1+bX_2+cX_3+dX_4+fX_5$

Ánh xạ ad_X : $G \to G$, $ad_X(Y)=[X,Y]$ có ma trận được xác định :

$$ad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ánh xạ exp(ad) có ma trận :

$$\exp(ad) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu như $F=\alpha X_1^*+\beta X_2^*+\gamma X_3^*+\delta X_4^*+\sigma X_5^* \in G^*$ thì K-quĩ đạo qua F được mô tả như sau :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - b\delta \\ x_2 = \beta + a\delta - c\sigma \\ x_3 = \gamma + b\sigma \\ x_4 = \delta \\ x_5 = \sigma \end{cases}$$

1) Nếu $\delta=\sigma=0$ thì K-quĩ đạo là 0 chiều : $\Omega_F=\{(\alpha,\beta,\gamma,0,0)\}$ (1)

2) Nếu $\delta^2+\sigma^2 \neq 0$ thì quĩ đạo $\Omega_F=\{(x,y,z,\delta,\sigma):\sigma x+\delta z=\sigma\alpha+\delta\gamma\}$ (2)

Mệnh đề đã được chứng minh. □

2.2 ∗-tích khả vi hình thức và Moyal ∗-tích

Giả sử (M,ω) là một đa tạp symplectic và $Z=C^\infty(M)[[\upsilon]]$ là không gian tuyến tính các chuỗi hình thức $a(x,\upsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\upsilon^k a_k(x)$, với các hệ tử $a_k(x)\in C^\infty(M)$.

Định nghĩa 2.4 : *Lượng tử hoá biến dạng của* $C^{\infty}(M)$ *(hay còn gọi là lượng tử hoá biến dạng trên đa tạp M) là một đại số kết hợp xây dựng trên* Z *với một* $*$*-tích kết hợp thỏa mãn các tính chất sau :*

(i) $*$*-tích có tính chất địa phương, tức là hệ tử* $c_k(x)$ *của tích :*

$$c(x,\upsilon) = a(x,\upsilon) * b(x,\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k c_k(x)$$

chỉ phụ thuộc vào các hệ tử $\partial^{\alpha} a_i$ *và* $\partial^{\beta} b_j$ *với* $k \geq |\alpha| + |\beta| + i + j \geq 0$

(ii) $*$*-tích là biến dạng của tích giao hoán thông thường của các hàm trên M :*

$$c_0(x) = a_0(x).b_0(x)$$

(iii) $*$*-tích thỏa mãn tính tương thích, tức là :*

$$a * b - b * a = -i\upsilon \{a_0, b_0\} + 0(\upsilon)$$

trong đó $\{,\}$ *là móc Poisson các hàm,* $0(\upsilon)$ *có bậc cao hơn* υ*, với* υ *là một tham biến hình thức (còn gọi là tham biến biến dạng).*

Cho $u, v \in C^{\infty}(M)$, ta kí hiệu l_u, r_v là các toán tử nhân trái và nhân phải trong đại số $(Z,*)$ sao cho $l_u(v) = u * v = r_v(u)$. Nếu $*$-tích là khả vi hình thức thì các toán tử l_u, r_v là khả vi hình thức. Các tính chất của $*$-tích có thể chi tiết trong [12].

Quá trình lượng tử biến dạng đòi hỏi phải tính toán phức tạp trên $*$-tích khả vi hình thức và đưa đến những công thức không đẹp. Tuy nhiên, nếu không gian symlectic M vi phôi với không gian R^{2n} cùng dạng symplectic chính tắc $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, trong đó $(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$ là hệ tọa độ chính tắc trong R^{2n} thì ta xác định một biến dạng hình thức đặc biệt của tích giao hoán và tích Poisson của $C^{\infty}(R^{2n})$ được gọi là Moyal $*$-tích.

Ta kí hiệu Λ là ma trận symplectic ứng với dạng song tuyến tính ω nói trên.

Định nghĩa 2.5 :

Moyal $*$-tích của hai hàm trơn $u,v \in C^{\infty}(R^{2n})$ được định nghĩa như sau :

$$u*v = u.v + \sum_{r\geq 1}\frac{1}{r!}\left(\frac{\hbar}{2i}\right)^r P^r(u,v)$$

trong đó : $P^1(u,v) = \{u,v\}$

$$P^r(u,v) := \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\ldots\Lambda^{i_r j_r}\partial^r_{i_1 i_2\ldots i_r}u\,\partial^r_{j_1 j_2\ldots j_r}v$$

với $\partial^r_{i_1 i_2\ldots i_r} = \dfrac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_r}}; x = (p,q) = (p_1,\ldots,p_n,q^1,\ldots,q^n)$, $\Lambda^{i_r j_r}$ *là các phần tử của ma trận* Λ^{-1}.

Chuỗi này hội tụ trong không gian phân bố Schwartz $S(R^{2n})$. Hơn nữa, chúng ta có các kết quả sau :

- $\overline{u}*\overline{v} = \overline{v*u}$
- $\int (u*v)(\xi)d\xi = \int uv d\xi$
- $\ell_u : S(R^{2n}) \to S(R^{2n}), \ell_u(v) = u*v$ là liên tục trong không gian $L^2(R^{2n},d\xi)$, do đó có thể thác triển thành một phép biến đổi tuyến tính biên (vẫn kí hiệu là ℓ_u) trên $L^2(R^{2n},d\xi)$.

Mệnh đề 2.6 : *Moyal $*$-tích là một $*$-tích khả vi hình thức.*

Thông thường ta chọn hằng số $\hbar = 1$ để tiện tính toán. Từ đây về sau ta sử dụng Moyal $*$-tích thay cho $*$-tích khả vi hình thức.

Nếu trên mỗi K-quĩ đạo Ω của nhóm Lie G ta trang bị được một $*$-tích như trên thì ta có khái niệm $*$-tích G-hiệp biến :

Định nghĩa 2.7 : *Giả sử Ω là một K-quĩ đạo của một nhóm Lie G trong $\mathcal{G}^*$ với tác động Hamilton chặt của G. Một $*$-tích được gọi là G-hiệp biến (hay hiệp biến dưới tác động của G) nếu như :*

$$i\tilde{A}*i\tilde{B} - i\tilde{B}*i\tilde{A} = i[A,B], \forall A,B \in \mathcal{G} = Lie(G)$$

Nếu $*$-tích là G-hiệp biến thì ta có $A \mapsto i\tilde{A}*. = l_A(.)$ là một biểu diễn của đại số Lie G trong không gian $Z = C^\infty(\Omega)\left[\left[\frac{i}{2}\right]\right]$. Như vậy, lượng tử hoá biến dạng một mặt cho ta các quĩ đạo đối phụ hợp lượng tử (hay còn gọi là K-quĩ đạo lượng tử), một mặt nhằm mục đích tìm biểu diễn của các đại số con $C^\infty(\Omega)$ bởi các toán tử trong không gian Hilbert nào đó. Trong trường hợp G liên thông và đơn liên thì ta nhận được biểu diễn unita T của nhóm Lie G được xác định :

$$T\left(\exp(A)\right) = e^{l_A}$$

2.3 Hàm Hamilton và các quĩ đạo đối phụ hợp lượng tử

Cho nhóm Lie G, mỗi phần tử $A \in G = Lie(G)$ có thể được như là hạn chế của hàm tuyến tính tương ứng $\tilde{A}$ trên các quĩ đạo đối phụ hợp Ω, được xét như là tập con của G^*, $\tilde{A}(F) = \langle F, A \rangle$. Như đã biết thì hàm này chính là hàm Hamilton, được liên kết với trường vectơ Hamilton bởi công thức :

$$(\xi_A f)(x) := \frac{d}{dt} f(x.\exp(\mathrm{tA}))\Big|_{\mathrm{t}=0}, \forall f \in C^\infty(\Omega)$$

Đồng thời ta có : $\xi_A(f) = \{\tilde{A}, f\}, \forall f \in C^\infty(\Omega)$.

Định nghĩa 2.8 : *Nếu trên quĩ đạo Ω tồn tại ánh xạ symplectic ψ : $(p,q) = (p_1,...,p_n,q^1,...,q^n) \in R^{2n} \mapsto \psi(p,q) \in \Omega$ thì cặp $\left(\Omega, \psi^{-1}\right)$ được gọi là một bản đồ tương thích nếu các tính chất sau được thỏa mãn :*

1) Với $A \in G$, hàm Hamilton trên Ω có dạng bậc nhất theo biến p, tức là :

$$\tilde{A} \circ \psi(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(q).p_i + \Psi(q),$$

trong đó $\phi_i(q)$, $\Psi(q)$ là các hàm khả vi C^∞ theo biến q.

2) Trên bản đồ đó, dạng Kirillov là $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.

Khi đó ta dùng kí hiệu $\tilde{A}$ thay cho kí hiệu $\tilde{A} \circ \psi(p,q)$ để chỉ hàm Hamilton trong hệ tọa độ chính tắc (p,q).

Ta gọi $F_p(g)$ là phép biến đổi Fourier từng phần của hàm g từ biến p sang biến x, tức là :

$$F_p(g)(x,q) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_R e^{-ipx} g(p,q)dp$$

và kí hiệu $F_p^{-1}(g)(p,q)$ là phép biến đổi Fourier ngược.

Định nghĩa 2.9 : *(K-quĩ đạo lượng tử)*

Cho Ω^{2n} là một K-quĩ đạo 2n-chiều của nhóm Lie G. Với $A \in \mathcal{G}$

(i) Toán tử $\hat{\ell}_A = F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}$ xác định hầu khắp nơi trên $L^2\left(R^{2n}, dpdq/(2\pi)^{2n}\right)$ là toán tử lượng tử tương thích.

(ii) $\left(\Omega^{2n}, \hat{\ell}_A\right)$ được gọi là K-quĩ đạo lượng tử ứng với nhóm Lie G.

(iii) Hợp các $\left(\Omega^{2n}, \hat{\ell}_A\right)$ được gọi là tầng các K-quĩ đạo lượng tử bậc 2n của nhóm Lie G.

3. Các kết quả chính

Nhắc lại rằng G là MD5-nhóm đơn liên, liên thông mà MD5-đại số tương ứng $\mathcal{G} = < X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 >$ có tính chất : $[X_1,X_2]=X_4$; $[X_2,X_3]=X_5$, $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = < X_4, X_5 > \cong R^2$, các K-quĩ đạo đã được mô tả tường minh theo mệnh đề 2.3. Ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 3.1 *: Ứng với mỗi K-quĩ đạo chiều cực đại $\Omega_F \subset \mathcal{G}^*$ thì ánh xạ symplectic ψ có công thức :*

$$(p,q) \in R^2 \mapsto \psi(p,q) = (\alpha - q\delta, p, \gamma + q\sigma, \delta, \sigma) \in \Omega_F .$$

Khi đó $\left(\Omega_F, \psi^{-1}\right)$ lập thành một bản đồ tương thích.

Chứng minh :

Để kiểm tra ánh xạ ψ có công thức $\psi(p,q) = (\alpha - q\delta, p, \gamma + q\sigma, \delta, \sigma)$ là một vi phôi toàn cục từ R^2 vào Ω_F.

Mỗi phần tử $F \in G^*$ có dạng $F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^*$, hàm $\tilde{A}$ được xác định :

$$\begin{aligned}\tilde{A}(F) &= < F, A > = < \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^*, aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + fX_5 > \\ &= \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \sigma f\end{aligned}$$

Do đó $\tilde{A} \circ \psi(p,q) = (\alpha - q\delta)a + pb + (\gamma + q\sigma)c + \delta d + \sigma f$.

Xét $A = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + fX_5$, $B = a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 + d'X_4 + f'X_5$

$$F = (\alpha - q\delta)X_1^* + pX_2^* + (\gamma + q\sigma)X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^*$$

thì $[A,B] = (ab' - a'b)X_4 + (bc' - b'c)X_5$.

Suy ra :

$$< F, [A,B] > = \delta(ab' - a'b) + \sigma(bc' - b'c) \qquad (3)$$

Mặt khác :

$$\xi_A(f) = \{\tilde{A}, f\} = b\frac{\partial f}{\partial q} - (-\delta a + \sigma c)\frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\xi_B(f) = \{\tilde{B}, f\} = b'\frac{\partial f}{\partial q} - (-\delta a' + \sigma c')\frac{\partial f}{\partial p}$$

Suy ra, các trường vectơ :

$$\xi_A = b\frac{\partial}{\partial q} - (-\delta a + \sigma c)\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\xi_B = b'\frac{\partial}{\partial q} - (-\delta a' + \sigma c')\frac{\partial}{\partial p}$$

Do đó :

$$\begin{aligned}\xi_A \otimes \xi_B = (-\delta a + \sigma c)(-\delta a' + \sigma c')\frac{\partial}{\partial p} \otimes \frac{\partial}{\partial p} + \left[\delta(ab' - a'b) + \sigma(bc' - b'c)\right]\frac{\partial}{\partial p} \otimes \frac{\partial}{\partial q} + \\ + bb'\frac{\partial}{\partial q} \otimes \frac{\partial}{\partial q} \qquad (4)\end{aligned}$$

So sánh (3) và (4) ta suy ra dạng Kirillov chính là dạng chuẩn tắc symplectic $\omega = dp \wedge dq$.

Mệnh đề đã được chứng minh hoàn toàn. □

Như vậy, mỗi K-quĩ đạo đều vi phôi toàn cục với R^2, do đó sẽ dễ dàng tính toán Moyal $*$-tích trong trường hợp này ứng với n = 1.

Mệnh đề 3.2 *:*

Trong hệ toạ độ chính tắc (p, q) được xác định trên mỗi quỹ đạo Ω_F, Moyal $*$-tích là G-hiệp biến.

Chứng minh :

Để chứng minh Moyal $*$-tích là G-hiệp biến ta chỉ cần chỉ ra rằng :

$$i\tilde{A} * i\tilde{B} - i\tilde{B} * i\tilde{A} = i[\tilde{A}, B], \forall A, B \in \mathcal{G} = Lie(G).$$

Thật vậy, xét $A = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + fX_5$, $B = a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 + d'X_4 + f'X_5$, $F = (\alpha - q\delta)X_1^* + pX_2^* + (\gamma + q\sigma)X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^*$

Theo cách mô tả ở trên thì :

$$\tilde{A} = (\alpha - q\delta)a + pb + (\gamma + q\sigma)c + \delta d + \sigma f$$

$$\tilde{B} = (\alpha - q\delta)a' + pb' + (\gamma + q\sigma)c' + \delta d' + \sigma f'$$

$$P^0\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \tilde{A}.\tilde{B}$$

$$\begin{aligned} P^1\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) &= \{\tilde{A}.\tilde{B}\} = \partial_p \tilde{A} \partial_q \tilde{B} - \partial_q \tilde{A} \partial_p \tilde{B} = b(-\delta a' + \sigma c') - (-\delta a + \sigma c)b' \\ &= \delta(ab' - a'b) + \sigma(bc' - b'c) \end{aligned}$$

$$P^2\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \Lambda^{12}\Lambda^{12}\partial^2_{pp}\tilde{A}\partial^2_{qq}\tilde{B} + \Lambda^{12}\Lambda^{21}\partial^2_{pq}\tilde{A}\partial^2_{qp}\tilde{B} + \Lambda^{21}\Lambda^{12}\partial^2_{qp}\tilde{A}\partial^2_{qq}\tilde{B} + \Lambda^{21}\Lambda^{21}\partial^2_{qq}\tilde{A}\partial^2_{pp}\tilde{B} = 0.$$

Tương tự ta có $P^k\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = 0, \forall k \geq 3$

Do đó :

$$\begin{aligned} i\tilde{A} * i\tilde{B} - i\tilde{B} * i\tilde{A} &= \frac{1}{2i}\left[P^1\left(i\tilde{A}, i\tilde{B}\right) - P^1\left(i\tilde{B}, i\tilde{A}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left[P^1\left(i\tilde{A}, i\tilde{B}\right) + P^1\left(i\tilde{A}, i\tilde{B}\right)\right] \\ &= \frac{P^1\left(i\tilde{A}, i\tilde{B}\right)}{i} = iP^1\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = i\left[\delta(ab' - a'b) + \sigma(bc' - b'c)\right] \end{aligned}$$

Mặt khác : $i[\tilde{A}, B] = i\left[\delta(ab' - a'b) + \sigma(bc' - b'c)\right]$. Mệnh đề đã được chứng minh hoàn toàn. □

Đặt $\ell_A(u) = i\tilde{A} * u$, ta có hệ quả sau :

Hệ quả 3.3 : $\ell_{[A,B]} = \ell_A * \ell_B - \ell_B * \ell_A$

Nhắc lại kí hiệu $F_p(g)$ là phép biến đổi Fourier từng phần của hàm g từ biến p sang biến x :

$$F_p(g)(x,q) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ipx} g(p,q)dp$$

và $F_p^{-1}(g)(p,q)$ là phép biến đổi Fourier ngược.

Bổ đề 3.4 :

1) $\partial_p F_p^{-1}(g) = iF_p^{-1}(x.g)$

2) $F_p(p.v) = i\partial_x F_p(v)$

3) $P^k\left(\tilde{A}, F_p^{-1}(g)\right) = 0, k \geq 2$

Chứng minh : 1) và 2) là những tính chất quen thuộc trong lí thuyết các phép biến đổi Fourier.

Tính chất 3 dễ dàng suy ra vì $\tilde{A}, \tilde{B}$ là các hàm bậc nhất theo p và q

Định lí 3.5 :

Với mỗi $A \in G$ và $g \in C_0^\infty(R^2)$, đặt $\hat{\ell}_A(g) = F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}(g)$ thì :

$$\hat{\ell}_A(g) = b\left(\frac{1}{2}\partial_q - \partial_x\right)g + i\left(\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)\left(q - \frac{x}{2}\right)\right)g$$

Chứng minh.

Áp dụng bổ đề 3.4

$$\hat{\ell}_A(g) = F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}(g) = F_p\left(i\tilde{A} * F_p^{-1}(g)\right) = F_p\left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2i}\right)^r P^r(\tilde{A}, F_p^{-1}(g))\right)$$

$$= iF_p\left\{\left[(\alpha - q\delta)a + pb + (\gamma + q\sigma)c + \delta d + \sigma f\right]F_p^{-1}(g) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1!}\frac{1}{2i}\left[b\partial_q F_p^{-1}(g) - (-\delta a + \sigma c)\partial_p F_p^{-1}(g)\right]\right\}$$

$$= i\left\{\left[(\alpha - q\delta)a + (\gamma + q\sigma)c + \delta d + \sigma f\right]g + bF_p\left[pF_p^{-1}(g)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2i}\left[b\partial_q g - (-\delta a + \sigma c)F_p\left[\partial_p F_p^{-1}(g)\right]\right]\right\}$$

$$= i\left\{\left[(\alpha - q\delta)a + (\gamma + q\sigma)c + \delta d + \sigma f\right]g + bi\partial_x g + \frac{1}{2i}\left[b\partial_q g - (-\delta a + \sigma c)ixg\right]\right\}$$

$$= b\left(\frac{1}{2}\partial_q - \partial_x\right)g + i\left(\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)\left(q - \frac{x}{2}\right)\right)g \quad \square$$

Đặt $s = q - \frac{x}{2}, t = q + \frac{x}{2}$ ta có :

$$\hat{\ell}_A(g) = b\partial_s g + i\left[\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)s\right]g$$
$$= \left\{b\partial_s + i\left[\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)s\right]\right\}g$$

Định lí 3.6 :

Toán tử $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)s\right)$ *chính là biểu diễn của đại số Lie* $\mathcal{G}$.

Hơn nữa, $\forall A, B \in \mathcal{G}$ *thì :* $\hat{\ell}_A \circ \hat{\ell}_B - \hat{\ell}_B \circ \hat{\ell}_A = \hat{\ell}_{[A,B]}$

Chứng minh :

Với $A, B \in \mathcal{G}$ và $g \in C_0^\infty(R^2)$, $\forall \mu_1, \mu_2 \in R$ ta có :

$$\hat{\ell}_{\mu_1 A + \mu_2 B}(g) = F_p \circ \ell_{\mu_1 A + \mu_2 B} \circ F_p^{-1}(g) = F_p\left[i\left(\mu_1 \tilde{A} + \mu_2 \tilde{B}\right) * F_p^{-1}(g)\right]$$
$$= \mu_1 F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}(g) + \mu_2 F_p \circ \ell_B \circ F_p^{-1}(g) = \mu_1 \hat{\ell}_A(g) + \mu_2 \hat{\ell}_B(g)$$

và

$$\hat{\ell}_A \circ \hat{\ell}_B(g) - \hat{\ell}_B \circ \hat{\ell}_A(g) = \hat{\ell}_A\left[F_p \circ \ell_B \circ F_p^{-1}(g)\right] - \hat{\ell}_B\left[F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}(g)\right]$$
$$= F_p\left(i\tilde{A} * \left[i\tilde{B} * F_p^{-1}(g)\right]\right) - F_p\left(i\tilde{B} * \left[i\tilde{A} * F_p^{-1}(g)\right]\right)$$
$$= F_p\left(i[\tilde{A}, B] * F_p^{-1}(g)\right)$$
$$= \hat{\ell}_{[A,B]}(g) \quad \square$$

Định nghĩa 3.7 : *Gọi* Ω_F *là các K-quĩ đạo của MD5-nhóm G đang xét. Khi A chạy trên khắp đại số Lie* $\mathcal{G}$ *thì* $\left(\Omega_F, \hat{\ell}_A\right)$ *được gọi là mặt phẳng lượng tử tương ứng với tác động đối phụ hợp của nhóm Lie G.*

Trong trường hợp G là đơn liên thì ta có biểu diễn unita vô hạn chiều T của G là :

$$T(\exp A) := \exp\left(\hat{\ell}_A\right) = \exp\left(b\partial_s + i\left[\alpha a + \gamma c + \delta d + \sigma f + \left(-\delta a + \sigma c\right)s\right]\right); A \in \mathcal{G}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F.A.Berezin (1974), *Quantization*, Math. USSR Tzvestija, **8**, pp. 1109-1165.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer (1978), *Deformation theory and quantization*. I and II. Ann. Phys, **111 1**, pp. 61-151.

[3] M. De Wilde, P. B. A. Lecomte (1983), *Existence of star-products and of formal deformations in Poisson Lie algebras of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys, **7**, pp. 487- 496.

[4] Do Ngoc Diep (1999), *Noncommulative Geometry Methods for Group C*-Algebras*, Chapman and Hall/ CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol. 416, 284 pages.

[5] Do Ngoc Diep (2000), *Quantum strata of coadjoint orbits*, arXiv :math.QA/0003100 v2.

[6] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum half-planes via deformation quantization*, Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **42**, No 2.

[7] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum co-adjoint orbits of the group of affine transformations of the complex straight line*, Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **42**, No 2.

[8] P. Etingof, D. A. Kazhdan (1996), *Quantization of Lie bialgebras*, I. Selecta Math, New Series 2, **1**, pp. 1-41.

[9] B. Fedosov (1994), *A simple geometric construction of deformation quantization*. J. Diff. Geom, **40**, 2, pp. 213-238.

[10] M. Kontsevich (1997), *Deformation Quantization of Poisson Manifolds*, Preprint, q-alg/9709040.

[11] Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum co-adjoint orbits of MD4-groups*, Vietnam J. Math, Vol. 29, pp. 131-158.

[12] Do Duc Hanh (2003), *Deformation quatization and quantum coadjoint orbits of SL(2,R)*, arXiv.math.QA/0305358 v1.

[13] Vuong Manh Son and Ho Huu Viet (1984), *Sur la structure des C*-algèbres d'une classe de groupes de Lie*, J. Operator Theory, **11**, pp 79-90

[14] Lê Anh Vũ (1990), *Không gian phân lá tạo bởi các K-quĩ đạo chiều cực đại lớp nhóm Lie MD4*, Luận án phó tiến sĩ khoa học Toán Lí, Viện Toán học Việt Nam, Hà Nội, 102 trang.

[15] Lê Anh Vũ (2005), *Về một lớp con các đại số Lie và nhóm Lie giải được 5 chiều*, Báo cáo Hội nghị Đại số - Hình học – Tôpô toàn quốc, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh 18-25/11.

[16] Le Anh Vu, Duong Minh Thanh (2006), *The Geometry of K-orbits of a Subclass of MD5-Groups and Foliations Formed by Their Generic K-orbits*, Contributions in Mathematics and Applications, A special Vol. of East-West J. Math, pp. 1-16.

Tóm tắt

K-quĩ đạo lượng tử của MD5-nhóm

Sử dụng $*$-tích trên các quĩ đạo đối phụ hợp (K-quĩ đạo) của một MD5-nhóm liên thông cho phép xây dựng các quĩ đạo đối phụ hợp lượng tử (K-quĩ đạo lượng tử) theo lượng tử hoá biến dạng của Fedosov. Từ đó đưa ra được biểu diễn unita vô hạn chiều của MD5-nhóm đó. Các kết quả có thể được áp dụng tương tự cho các MD5-nhóm khác.

Abstract

Quantum K-orbits of the MD5-group

Using $*$-product on co-adjoint orbits (K-orbits) of the connected MD5-group we obtain quantum coadjoint orbits (quantum K-orbits) via Fedosov deformation quantization. Hereby, we have that dimensional infinite unitary representation of the MD5-group. These results can be applied to other MD5-groups.