MỘT CHÚ THÍCH VỀ NGHIỆM DƯƠNG CỦA MỘT BÀI TOÁN BA ĐIỂM BIÊN

Lê Thị Phương Ngọc *

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên ba điểm sau :

$$x''(t) = f(t, x(t)),\ \ 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x'(0) = 0,\ \ x(1) = \alpha x(\eta), \tag{1.2}$$

trong đó $\alpha, \eta \in (0,1)$ và hàm số f cho trước thoả một số điều kiện thích hợp.

Tính giải được và các tính chất của nghiệm cho các bài toán giá trị biên ba điểm đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, xem [1 - 4] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong trường hợp $\alpha = 1$, bài toán giá trị biên ba điểm (1.1) - (1.2) đã được X. Han [2] nghiên cứu. Dựa trên phương pháp và các kỹ thuật được sử dụng trong [2], chúng tôi đã nêu được các điều kiện để bài toán (1.1) - (1.2) tồn tại một nghiệm hoặc hai nghiệm dương. Hơn nữa, tính compact của tập nghiệm dương cũng được nghiên cứu.

Xét không gian Banach $C[0,1]$ với chuẩn $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ và không gian Banach $C^2[0,1]$ với chuẩn $\|x\|_2 = \max\left\{\|x\|, \|x'\|, \|x''\|\right\}$.

Chúng tôi thành lập các giả thiết sau đây :

(H_1) $\alpha, \eta \in (0,1)$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho $\alpha \cos\beta\eta - \cos\beta > 0$.

(H_2) $f : [0,1]\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả điều kiện :

$$g(t,x) = f(t,x) + \beta^2 x \geq 0, \forall (t,x) \in [0,1]\times[0,+\infty).$$

Khi đó, bài toán (1.1) - (1.2) tương đương với bài toán :

* ThS. Trường Cao đẳng Sư phạm Nha Trang

$$x''(t)+\beta^2 x(t)=g(t,x(t)),\ \ 0<t<1, \tag{1.3}$$

$$x'(0)=0,\ \ x(1)=\alpha x(\eta). \tag{1.4}$$

Định nghĩa toán tử tuyến tính $L:D(L)\subset C^2[0,1]\to C[0,1]$ bởi $Lx=x''+\beta^2 x,$ với $x\in D(L),$ trong đó $D(L)=\{x\in C^2[0,1]:x'(0)=0,x(1)=\alpha x(\eta)\}.$

Điều kiện (H_1) bảo đảm toán tử L khả nghịch, vì vậy bài toán (1.3) - (1.4) được viết lại thành một phương trình tích phân tương đương. Khi đó, ta có thể chứng minh (1.1) - (1.2) tồn tại nghiệm dương, bằng cách áp dụng định lí điểm bất động trên một nón sau đây của Guo - Krasnoselskii :

Định lí 1.1. (Xem [2]) *Cho X là không gian Banach và $K\subset X$ là một nón. Giả sử $\Omega_1,\ \Omega_2$ là hai tập con mở, bị chặn của X với $0\in\Omega_1,\ \overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$ và giả sử $A:K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ là toán tử hoàn toàn liên tục thoả mãn một trong hai điều kiện sau :*

(i) $\|Au\|\le\|u\|,\ \ \forall u\in K\cap\partial\Omega_1,$ *và* $\|Au\|\ge\|u\|,\ \ \forall u\in K\cap\partial\Omega_2,$

hoặc

(ii) $\|Au\|\ge\|u\|,\ \ \forall u\in K\cap\partial\Omega_1,$ *và* $\|Au\|\le\|u\|,\ \ \forall u\in K\cap\partial\Omega_2.$

Khi đó toán tử A có điểm bất động thuộc $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$.

Bài báo gồm 4 mục. Trong mục 2, chúng tôi trình bày các bổ đề cần thiết cho chứng minh các định lí chính ở mục 3. Trong mục 4, chúng tôi xét tính compact của tập các nghiệm dương.

2. Các bổ đề

Xét bài toán biên ba điểm :

$$x''(t)+\beta^2 x(t)=h(t),\ \ 0<t<1, \tag{2.1}$$

$$x'(0)=0,\ \ x(1)=\alpha x(\eta). \tag{2.2}$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử (H_1) đúng. Khi đó :*

(i) *Với mỗi $h\in C[0,1],$ bài toán* (2.1) - (2.2) *có nghiệm duy nhất*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \equiv (Th)(t),\ \ 0 \le t \le 1, \tag{2.3}$$

ở đây

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s), 0 \le s \le t \le 1, \\ 0, \qquad\qquad 0 \le t \le s \le 1, \end{cases} + \frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \begin{cases} \sin\beta(1-s) - \alpha\sin\beta(\eta - s), 0 \le s \le \eta < 1 \\ \sin\beta(1-s), \qquad\qquad 0 < \eta \le s \le 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Mặt khác :

(ii) $$0 \le G(t,s) \le M,\ \forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1], \tag{2.5}$$

ở đây $M = \frac{1}{\beta}\sin\beta\left(1 + \frac{1}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta}\right) > 0.$

(iii) $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *là toán tử tuyến tính hoàn toàn liên tục;*

(iv) *Với mỗi* $h \in C[0,1]$, *nếu* $h(t) \ge 0,\ \forall t \in [0,1]$ *thì* $(Th)(t) \ge 0, \forall t \in [0,1]$.

Chứng minh.

(i) Giải (2.1) bằng phương pháp biến thiên hằng số, kết hợp điều kiện biên (2.2), ta suy ra

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds,\ \ 0 \le t \le 1,$$

là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1) - (2.2).

(ii) Từ (H_1), (2.4) và chú ý đến các bất đẳng thức :

$\sin\beta(t-s) \ge 0,\ 0 \le s \le t \le 1,$

$\sin\beta(1-s) \ge 0,\ 0 \le s \le 1,$

$0 < \alpha\sin\beta(\eta - s) < \sin\beta(\eta - s) < \sin\beta(1-s),\ 0 \le s \le \eta < 1,$

ta suy ra được $G(t,s) \ge 0, \forall (t,s) \in [0,1]$. Tương tự, $\forall (t,s) \in [0,1]$,

$$G(t,s) \le \frac{1}{\beta}\sin\beta + \frac{\sin\beta(1-s)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \le \frac{1}{\beta}\sin\beta + \frac{\sin\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \equiv M.$$

(iii) Rõ ràng T là toán tử tuyến tính liên tục.

Tiếp theo, ta giả sử Ω là tập con bị chặn của $C[0,1]$.

Từ tính chất bị chặn của hàm $G(t,s)$ trên $[0,1]$, như ở (ii) ta suy ra $T(\Omega)$ bị chặn đều.

Mặt khác, do tính liên tục đều của hàm G trên $[0,1]\times[0,1]$, ta có $T(\Omega)$ đẳng liên tục.

Áp dụng định lí Ascoli - Arzela, ta có $T(\Omega)$ compact tương đối trong $C[0,1]$. Suy ra T là toán tử hoàn toàn liên tục.

Cuối cùng (iv) được suy ra dễ dàng từ tính chất $G(t,s)\geq 0, \forall (t,s)\in[0,1]$.

Bổ đề 2.1 được chứng minh. □

Bổ đề 2.2. *Giả sử (H_1) đúng và giả sử thêm $tg\beta\eta < \dfrac{\sin\beta}{\alpha+\cos\beta}$. Khi đó :*

$$G(t,s)\geq M_0,\ \forall (t,s)\in[0,1]\times[0,\eta],$$

ở đây $M_0 = \dfrac{\cos\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\left(\sin\beta(1-\eta)-\alpha\sin\beta\eta\right)>0.$

Chứng minh. $\forall (t,s)\in[0,1]\times[0,\eta]$,

$$\begin{aligned} G(t,s) &\geq \frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\left(\sin\beta(1-s)-\alpha\sin\beta(\eta-s)\right) \\ &\geq \frac{\cos\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\left(\sin\beta(1-\eta)-\alpha\sin\beta\eta\right)\equiv M_0. \end{aligned}$$

Do (H_1) và $tg\beta\eta<\dfrac{\sin\beta}{\alpha+\cos\beta}$, ta nhận được

$$G(t,s)\geq M_0>0,\ \forall (t,s)\in[0,1]\times[0,\eta].$$

Bổ đề 2.2 được chứng minh. □

Bổ đề 2.3. *Tồn tại một hàm số liên tục $\Phi:[0,1]\to[0,+\infty)$ và một hằng số $c\in(0,1)$ sao cho*

$$c\Phi(s)\leq G(t,s)\leq\Phi(s),\ \forall t,s\in[0,1].$$

Chứng minh.

Đặt $\phi(s)=1-s,\ H(t,s)=\mu\phi(s)-G(t,s).$

Bước 1. Ta chứng minh nếu hằng số $\mu>0$ được chọn đủ lớn thì

$$H(t,s)_{s\geq t}\geq 0,\ H(t,s)_{s\leq t}\geq 0,\ \forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1].$$

Trường hợp 1. $s\in[0,\eta]$.

1a) Với mọi $s\geq t,$

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\left(\sin\beta(1-s)-\alpha\sin\beta(\eta-s)\right)\\&\leq\frac{1}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\sin\beta,\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}H(t,s)_{s\geq t}&\geq\mu(1-s)-\frac{\sin\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\\&\geq\mu(1-\eta)-\frac{\sin\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}.\end{aligned}$$

Nếu ta chọn $\mu\geq\mu_1\equiv\dfrac{\sin\beta}{\beta(1-\eta)(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}$ thì $H(t,s)_{s\geq t}\geq 0.$

1b) Với mọi $s\leq t,$

$$\begin{aligned}H(t,s)_{s\leq t}&\geq\mu(1-s)-\frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s)-\frac{\sin\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\\&\geq\mu(1-\eta)-\frac{1}{\beta}\sin\beta-\frac{\sin\beta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}.\end{aligned}$$

Nếu ta chọn $\mu\geq\mu_2\equiv\dfrac{M}{1-\eta}=\dfrac{\sin\beta}{\beta(1-\eta)}\left(1+\dfrac{1}{\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta}\right)$ thì $H(t,s)_{s\leq t}\geq 0.$

Trường hợp 2. $s\in[\eta,1]$.

2a) Với mọi $s\geq t,$

$$G(t,s)=\frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\sin\beta(1-s)\leq\frac{1}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\beta(1-s),$$

nên

$$H(t,s)_{s\ge t} \ge \mu(1-s) - \frac{1-s}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta} \ge (1-s)\left(\mu - \frac{1}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta}\right).$$

Nếu ta chọn $\mu \ge \mu_3 \equiv \dfrac{1}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta}$ thì $H(t,s)_{s\ge t} \ge 0.$

2b) Với mọi $s \le t,$

$$\begin{aligned} H(t,s)_{s\le t} &\ge \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\sin\beta(1-s)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \\ &\ge \mu(1-s) - (1-s) - \frac{(1-s)}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta} \\ &\ge (1-s)\left(\mu - 1 - \frac{1}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta}\right). \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $\mu \ge \mu_4 \equiv 1 + \dfrac{1}{\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta}$ thì $H(t,s)_{s\le t} \ge 0.$

Chú ý rằng $\mu_1 < \mu_2,\ \mu_3 < \mu_4$. Từ đó, với $\mu^* \ge \max\{\mu_2, \mu_4\}$ ta có :

$$\mu^*\phi(s) \ge G(t,s), \forall (t,s) \in [0,1].$$

Đặt $\Phi(s) \equiv \mu^*\phi(s)$. Thế thì

$$G(t,s) \le \Phi(s), \forall (t,s) \in [0,1].$$

Bước 2. Ta chứng minh nếu hằng số $\mu > 0$ được chọn đủ bé thì

$$H(t,s)_{s\ge t} \le 0,\ H(t,s)_{s\le t} \le 0,\ \forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1].$$

Trường hợp 1. $s \in [0,\eta]$.

1a) Với mọi $s \ge t,$

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)}\left(\sin\beta(1-s) - \alpha\sin\beta(\eta - s)\right) \\ &\ge \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)}\sin\beta(1-s) \\ &\ge \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)}\sin\beta(1-\eta), \end{aligned}$$

nên

$$H(t,s)_{s\geq t} \leq \mu(1-s) - \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta\ \sin\beta(1-\eta)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}$$
$$\leq \mu - \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta\ \sin\beta(1-\eta)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}.$$

Nếu ta chọn $\mu \leq \mu_5 \equiv \dfrac{(1-\alpha)\cos\beta\eta\ \sin\beta(1-\eta)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}$ thì $H(t,s)_{s\geq t} \leq 0.$

1b) Với mọi $s \leq t,$

$$H(t,s)_{s\leq t} \leq \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\sin\beta(1-\eta)$$
$$\leq \mu - \frac{(1-\alpha)\cos\beta\eta\ \sin\beta(1-\eta)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)} = \mu - \mu_5.$$

Nếu ta chọn $\mu \leq \mu_5$ thì $H(t,s)_{s\leq t} \leq 0.$

Trường hợp 2. $s \in [\eta,1].$

Nếu $s=1,$ hiển nhiên $G(t,s)=0, \phi(s)=0.$ Khi đó $H(t,s)=0.$

Nếu $s \in [\eta,1)$ thì :

2a) Với mọi $s \geq t,$

$$G(t,s) = \frac{\cos\beta t}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}\sin\beta(1-s),$$

nên

$$H(t,s)_{s\geq t} \leq \mu(1-s) - \frac{\cos\beta\sin\beta(1-s)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta)}$$
$$\leq (1-s)\left(\mu - \frac{\cos\beta}{\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta}\ \frac{\sin\beta(1-s)}{\beta(1-s)}\right).$$

Vì hàm $g(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ giảm trên $(0,\pi]$ nên $\dfrac{\sin\beta(1-s)}{\beta(1-s)} > \dfrac{\sin\beta(1-\eta)}{\beta(1-\eta)},$ do đó

$$H(t,s)_{s\geq t} \leq (1-s)\left(\mu - \frac{\cos\beta}{\alpha\cos\beta\eta-\cos\beta}\ \frac{\sin\beta(1-\eta)}{\beta(1-\eta)}\right).$$

Nếu ta chọn $\mu \le \mu_6 \equiv \dfrac{\cos\beta \ \sin\beta(1-\eta)}{(1-\eta)\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)}$ thì $H(t,s)_{s\ge t} \le 0.$

2b) Với mọi $s \le t,$

$$\begin{aligned} H(t,s)_{s\le t} &\le \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\cos\beta\sin\beta(1-s)}{\beta(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \\ &\le \mu(1-s) - \frac{\cos\beta\sin\beta(1-\eta)}{\beta(1-\eta)(\alpha\cos\beta\eta - \cos\beta)} \\ &\le (1-s)(\mu - \mu_6). \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $\mu \le \mu_6$ thì $H(t,s)_{s\le t} \le 0.$

Từ đó, với $0 < \mu_* < \min\{\mu_5, \mu_6\}$ ta có :

$$\mu_*\phi(s) < G(t,s) \le \mu^*\phi(s), \forall (t,s) \in [0,1].$$

Đặt $c = \dfrac{\mu_*}{\mu^*}.$ Thế thì $0 < c < 1$ và ta thu được :

$$c\Phi(s) \le G(t,s) \le \Phi(s), \forall (t,s) \in [0,1].$$

Bổ đề 2.3 được chứng minh. □

Đặt

$$K_0 = \{x \in C[0,1] : x(t) \ge 0,\ \forall t \in [0,1]\},$$

và với mọi $x \in K_0$, đặt $Fx(t) = g(t, x(t)),\ \forall t \in [0,1].$

Khi đó, toán tử $F : K_0 \to K_0$ hoàn toàn được xác định và liên tục.

Đặt $A = T \circ F$. Khi đó $A = T \circ F : K_0 \to K_0$ là toán tử hoàn toàn liên tục. Rõ ràng mỗi điểm bất động của A chính là một nghiệm dương của bài toán (1.1) - (1.2) và ngược lại. Đặt

$$K = \{x \in C[0,1] : x(t) \ge c\,\|x\|,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

Dễ dàng chứng minh rằng $K \subset K_0$ và K là nón dương trên $C[0,1].$ Hơn nữa

Bổ đề 2.4. $A(K) = T \circ F(K) \subset K.$

Chứng minh. Với mọi $x \in C[0,1],\ x \ge 0,$ ta có :

$$(Ax)(t) = T(F(x))(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \geq c\int_0^1 \Phi(s)g(s,x(s))ds,\ \forall t \in [0,1],$$

$$\| Ax \| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \leq \int_0^1 \Phi(s)g(s,x(s))ds,\ \forall t \in [0,1].$$

Nên $(Ax)(t) \geq c\| Ax \|, \forall t \in [0,1].$

Bổ đề 2.4 được chứng minh. □

3. Sự tồn tại nghiệm dương

Trong mục này, ta sẽ xét $A = T \circ F : K \to K$. Từ các bổ đề trên, sự tồn tại một nghiệm dương, hai nghiệm dương đã nghiên cứu trong [2] cũng đúng trong trường hợp mở rộng này. Chứng minh các kết quả sau đây được thực hiện tương tự như trong [2].

Giả sử

$$\overline{f_0} = \limsup_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\ \ \underline{f_0} = \liminf_{x\to 0^+} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},$$

$$\overline{f_\infty} = \limsup_{x\to +\infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\ \ \underline{f_\infty} = \liminf_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}.$$

Định lí 3.1. *Giả sử* $(H_1), (H_2)$ *đúng và* $tg\beta\eta < \frac{\sin\beta}{\alpha + \cos\beta}$. *Giả sử một trong hai trường hợp sau xảy ra :*

(i) $\overline{f_0} = -\beta^2,\ \underline{f_\infty} = \infty,$ *hoặc*

(ii) $\underline{f_0} = \infty,\ \ \overline{f_\infty} = -\beta^2.$

Khi đó bài toán (1. 1) - (1.2) *có ít nhất một nghiệm dương.* □

Bổ sung các giả thiết sau đây :

(H_3) $\underline{f_0} = \infty,\ \underline{f_\infty} = \infty,$ và tồn tại $\omega > 0$ sao cho

$$\max_{0\leq t\leq 1,\, c\omega\leq x\leq\omega} f(t,x) < (\varepsilon - \beta^2)\omega,$$

ở đây $\varepsilon > 0$ được chọn sao cho $M\varepsilon \leq 1.$

(H_4) $\overline{f_0} = -\beta^2$, $\overline{f_\infty} = -\beta^2$ và tồn tại $\omega > 0$ sao cho

$$\min_{0 \le t \le 1,\, c\omega \le x \le \omega} f(t,x) > (\mu - c\beta^2)\omega,$$

ở đây $\mu > 0$ được chọn sao cho $M_0\mu \ge 1$.

Định lí 3.2. *Giả sử* (H_1), (H_2) *đúng và* $tg\beta\eta < \dfrac{\sin\beta}{\alpha + \cos\beta}$. *Giả sử thêm* (H_3) *hoặc* (H_4) *đúng.*

Khi đó bài toán (1. 1) - (1.2) *có ít nhất hai nghiệm dương.* □

4. Tính compact của tập hợp các nghiệm dương

Định lí 4.1. *Giả sử* (H_1), (H_2) *đúng và* $tg\beta\eta < \dfrac{\sin\beta}{\alpha + \cos\beta}$. *Giả sử thêm :*

$$\underline{f_0} = \infty, \quad \overline{f_\infty} = -\beta^2.$$

Khi đó tập hợp các nghiệm dương của bài toán (1. 1) - (1.2) *khác rỗng và compact.*

Chứng minh.

Đặt

$$\Sigma = \{x \in K_0 : x = Ax\}.$$

Như vậy, Σ chính là tập các nghiệm dương của bài toán (1.1) - (1.2). Áp dụng định lí 3.1, ta có Σ khác rỗng. Ta sẽ chứng minh Σ là tập compact.

Bước 1. Σ là tập hợp bị chặn đều.

Chọn $m > 0$ sao cho $\mu^* m < 1$. Từ giả thiết ta suy ra

$$\exists R > 0 : \forall y > R \Rightarrow f(t,y) < (-\beta^2 + m)y, \forall t \in [0,1].$$

Với mọi $x \in \Sigma$, với mỗi $s \in [0,1]$ tuỳ ý, có hai trường hợp xảy ra :

$$x(s) > R \text{ hoặc } x(s) \le R.$$

Nếu $x(s) > R$ thì

$$f(s, x(s)) < (-\beta^2 + m)x(s),$$

suy ra

$$g(s, x(s)) < mx(s).$$

Nếu $x(s) \le R$ thì

$$g(s, x(s)) \le \gamma,$$

ở đây γ là giá trị lớn nhất của g trên $[0,1] \times [0, R]$.

Suy ra với mọi $x \in \Sigma,$ ta luôn có

$$g(s, x(s)) \le mx(s) + \gamma, \ \forall s \in [0,1].$$

Thế thì $\forall x \in \Sigma, \ \forall t \in [0,1],$ chú ý rằng $\Phi(s) = \mu^*(1-s) \le \mu^*, \ \forall s \in [0,1]$ ta thu được

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s, x(s)) ds \le \int_0^1 \Phi(s)\big(mx(s) + \gamma\big) ds \le \mu^*(m \| x \| + \gamma),$$

vì vậy

$$\| x \| \le \mu^* m \| x \| + \mu^* \gamma, \ \forall x \in \Sigma,$$

do đó

$$\| x \| \le \frac{\mu^* \gamma}{1 - \mu^* m}, \forall x \in \Sigma.$$

Nghĩa là Σ là tập hợp bị chặn đều.

Bước 2. Σ là tập compact tương đối.

Vì $A = T \circ F : K_0 \to K_0$ là toán tử hoàn toàn liên tục, $\Sigma \subset K_0$ bị chặn đều nên $A(\Sigma)$ là tập compact tương đối. Ta lại có $\Sigma \subset A(\Sigma)$ nên Σ là tập compact tương đối.

Bước 3. Σ là tập đóng.

Giả sử $\{x_n\} \subset \Sigma$ và $x_n \to \hat{x},$ khi $n \to \infty.$

Khi đó

$$\max_{t\in[0,1]} | x_n(t) - \hat{x}(t) | \to 0.$$

Suy ra $\forall t \in [0,1]$,

$$| \hat{x}(t) - \int_0^1 G(t,s)g(s,\hat{x}(s))ds | \le | \hat{x}(t) - x_n(t) | + | x_n(t) - \int_0^1 G(t,s)g(s,x_n(s))ds |$$

$$+ | \int_0^1 G(t,s)g(s,x_n(s))ds - \int_0^1 G(t,s)g(s,\hat{x}(s))ds |$$

$$\le | \hat{x}(t) - x_n(t) | + \int_0^1 | G(t,s)g(s,x_n(s)) - G(t,s)g(s,\hat{x}(s)) | \, ds,$$

bởi tính liên tục của g,

$$| \hat{x}(t) - \int_0^1 G(t,s)g(s,\hat{x}(s))ds | \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đó

$$\hat{x}(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s,\hat{x}(s))ds |, \ \forall t \in [0,1].$$

Nghĩa là Σ là tập đóng. Định lí 4.1 được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Y. Chen, B. Yan, L. Zhang, 2007, *Positive solutions for singular three-point boundary-value problems with sign changing nonlinearities depending on* x’, Electronic J. Differential Equations, (63) (2007) 1–9.

[2]. X. Han, 2007, *Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance*, J. Math. Anal. Appl. 336, 556–568.

[3]. R. Ma, 1999, *Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem*, Electronic J. Differential Equations 1999 (34) 1–8.

[4]. Yong-Ping Sun, 2004, *Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem*, Electronic J. Differential Equations, 2004 (111) 1-10.

Tóm tắt

Một chú thích về nghiệm dương của một bài toán ba điểm biên

Bài báo sử dụng định lí điểm bất động Guo - Krasnoselskii trên một nón để chứng minh sự tồn tại nghiệm dương của bài toán giá trị biên ba điểm sau :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \mathrm{t} < 1, \\ x'(0) = 0, \ \ x(1) = \alpha\, x(\eta), \end{cases}$$

trong đó $\alpha, \eta \in (0,1)$ và f thoả một số điều kiện thích hợp. Ngoài ra, sự tồn tại hai nghiệm dương phân biệt và tính compact của tập nghiệm dương của bài toán cũng được nghiên cứu.

Abstract

Note on the positive solutions for a three-point boundary value problem

In this paper, we consider the three-point boundary value problem

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \mathrm{t} < 1, \\ x'(0) = 0, \ \ x(1) = \alpha\, x(\eta), \end{cases}$$

where $\alpha, \eta \in (0,1)$ and $f \in C([0,1]\times[0,\infty), IR)$ is given. Under some suitable assumptions on the function f, we prove the existence and multiplicity of positive solutions of the problem. Furthermore, the paper shows that the positive solutions set of the problem is compact. The main tool is the Guo - Krasnoselskii's fixed point theorem in cones.