LƯỢNG TỬ HÓA BIẾN DẠNG TRÊN CÁC QUỸ ĐẠO ĐỐI PHỤ HỢP CỦA MỘT VÀI LỚP NHÓM LIE GIẢI ĐƯỢC 5 CHIỀU

Dương Minh Thành*

1. Mở đầu

Lượng tử hóa biến dạng là một lĩnh vực nghiên cứu rất được quan tâm trong Toán học và Cơ học lượng tử. Mặc dù khái niệm này được ra đời rất sớm nhưng phải đến những năm 70 của thế kỉ trước người ta mới phát hiện được những ứng dụng quan trọng của nó nhờ vào các công trình sâu sắc của Bayen, Fronsdal, Lichnerowicz, Plato và Sternheimer. Một trong những ứng dụng đáng chú ý nhất của lượng tử hóa biến dạng là nghiên cứu các biểu diễn của nhóm Lie. Cụ thể là từ việc xây dựng công thức lượng tử hóa biến dạng trên các quỹ đạo đối phụ hợp của một nhóm Lie, ta sẽ thu được các biểu diễn của nhóm Lie đó. Áp dụng tính chất này, Arnal, Cortet và Ludwig đã tìm ra biểu diễn của lớp các nhóm Lie nilpotent và lớp các nhóm Lie giải được exponent [1]. Tuy nhiên, cho đến nay chưa có kết quả tổng quát nào được tìm ra cho lớp các nhóm Lie giải được không exponent.

Một trong những bài toán đặt ra hiện nay là tìm ra những lớp đủ rộng các nhóm Lie giải được có chứa những nhóm Lie không exponent mà việc xây dựng công thức lượng tử hóa trên các quỹ đạo của chúng vẫn có thể thực hiện được. Trong quá trình nghiên cứu lớp MD-nhóm [2], tức là lớp các nhóm Lie thực giải được mà các quỹ đạo đối phụ hợp của chúng hoặc là 0-chiều hoặc có chiều cực đại, Đỗ Ngọc Diệp và các cộng sự đã phát hiện ra rằng, lớp MD-nhóm rất thích hợp với công cụ lượng tử hóa biến dạng. Năm 1999, Đỗ Ngọc Diệp và Nguyễn Việt Hải đã xây dựng lượng tử hóa biến dạng trên các K-quỹ đạo của lớp $\overline{\mathrm{MD}}$-nhóm (MD-nhóm mà chiều cực đại của quỹ đạo đối phụ hợp bằng với chiều của nhóm) và lớp MD4-nhóm (MD-nhóm 4 chiều), đồng thời đưa ra các biểu diễn unita vô hạn chiều tương ứng của các lớp nhóm này [3,4]. Áp dụng phương pháp này, năm 2007, tác giả cũng đã xây dựng công thức lượng tử hóa và đưa ra các biểu diễn unita vô hạn chiều của một nhóm thuộc lớp MD5-nhóm (MD-nhóm 5

* Nghiên cứu sinh, Viện Toán học Bourgogne, Dijon, Pháp.

chiều) [5]. Thật không may rằng lớp các MD5-nhóm đến nay vẫn chưa được phân loại hoàn toàn. Tuy nhiên, trong công trình gần đây của Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum, một số lớp con của lớp MD5-đại số (đại số Lie tương ứng với MD5-nhóm) đã được liệt kê, trong đó có 2 lớp con chứa khá nhiều MD5-đại số [6]. Lớp thứ nhất là lớp đại số hầu như giao hoán, tức là có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 1. Lớp thứ hai có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 2. Điều này gợi ý cho tác giả tiếp tục sử dụng công cụ lượng tử hóa biến dạng để tìm ra các biểu diễn của hai lớp đại số đặc biệt này.

Nội dung của bài báo được sắp xếp như sau.

Chương 2 chủ yếu nêu lại khái niệm quỹ đạo đối phụ hợp của một nhóm Lie và các kết quả liên quan đến bài toán phân loại MD-nhóm và MD-đại số, trong đó liệt kê đầy đủ 2 lớp MD5-đại số đã được nêu trên và là đối tượng nghiên cứu của bài báo này. Trong Chương 3, ta sẽ nhắc lại một số khái niệm liên quan đến lượng tử hóa biến dạng. Phương pháp xây dựng công thức lượng tử hóa biến dạng trên quỹ đạo đối phụ hợp cũng được mô tả đầy đủ trong chương này kèm theo 2 ví dụ chi tiết, một ví dụ dành cho nhóm không exponent, một ví dụ dành cho nhóm exponent. Các biểu diễn của 2 lớp MD5-đại số sẽ được liệt kê trong Chương 4.

2. Quỹ đạo đối phụ hợp và MD5-đại số

2.1. Quỹ đạo đối phụ hợp

Đầu tiên ta nhắc lại khái niệm tác động đối phụ hợp của một nhóm Lie. Cho G là một nhóm Lie liên thông và đơn liên, $\mathfrak{g}$ là đại số Lie của G. Với mỗi phần tử $g \in G$, ta định nghĩa ánh xạ:

$$A(g): G \to G$$

$$A(g)(a) = gag^{-1}$$

Ánh xạ này cảm sinh ra tác động trên đại số Lie $\mathfrak{g}$:

$$A(g)_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\exp(tX)g^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Ta thường kí hiệu tác động này là *Ad*. Khi đó tác động đối phụ hợp *K* của nhóm Lie *G* trong không gian đối ngẫu $\mathfrak{g}^*$ được định nghĩa như sau:

$$\left\langle K(g)F, X \right\rangle := \left\langle F, Ad(g^{-1})X \right\rangle$$

với mọi $F \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}$ and $g \in G$.

Định nghĩa 2.1. *Quỹ đạo của tác động K được gọi là quỹ đạo đối phụ hợp, hay còn gọi là K-quỹ đạo. Với* $F \in \mathfrak{g}^*$*, ta kí hiệu* Ω_F *(hoặc đơn giản là* Ω*) là quỹ đạo đối phụ hợp chứa F, ta có:*

$$\Omega_F = K(G)F = \left\{ K(g)F : g \in G \right\} \subseteq \mathfrak{g}^*.$$

Định nghĩa 2.2. *Ta nói rằng một nhóm Lie giải được G thuộc lớp MD-nhóm nếu mọi quỹ đạo đối phụ hợp của nó hoặc là 0-chiều hoặc có chiều cực đại. Đại số Lie tương ứng với một MD-nhóm được gọi là MD-đại số.*

Chiều của các quỹ đạo đối phụ hợp luôn chẵn. Hơn nữa, với mỗi quỹ đạo Ω_F, tồn tại một dạng vi phân tự nhiên liên kết với dạng song tuyến tính không suy biến trên không gian tiếp xúc $T_F\Omega$ của quỹ đạo Ω_F:

$$B_F\left(X, Y\right) = \left\langle F, \left[X, Y\right] \right\rangle, X, Y \in \mathfrak{g}$$

Dạng symplectic tương ứng được gọi là dạng Kirillov trên quỹ đạo đối phụ hợp Ω_F.

Trong trường hợp mọi quỹ đạo đối phụ hợp có số chiều hoặc là 0 hoặc là $\dim G$ thì G được gọi là $\overline{\mathrm{MD}}$-nhóm. Bài toán nghiên cứu và liệt kê các MD-nhóm và MD-đại số được xuất phát từ việc nghiên cứu C^*-đại số của một nhóm Lie giải được. Đồng thời chính bài toán này cũng dẫn tới bài toán nghiên cứu không gian phân lá tạo bởi các quỹ đạo đối phụ hợp không tầm thường của một MD-nhóm và C^*-đại số liên kết với phân lá đó. Vì ta chỉ xét nhóm G liên thông và đơn liên nên việc phân loại MD-nhóm tương đương với việc phân loại các MD-đại số tương ứng. Lớp các $\overline{\mathrm{MD}}$-đại số và MDn-đại số (MD-đại số n chiều), $n \leq 4$, đã được liệt kê hoàn toàn [2]. Tuy nhiên, cho đến nay chưa có phân loại hoàn toàn các MDn-đại số, với $n \geq 5$. Gần đây Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum đã đưa ra được một số lớp con của lớp MD5-đại số [6], trong đó có 2 lớp chứa một số lượng đáng kể các MD5-đại số mà ta sẽ liệt kê dưới đây.

2.2. MD5-đại số có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 2

Định lý 2.3: *Cho* $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie thực giải được 5 chiều,* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *là một cơ sở của* $\mathfrak{g}$. *Giả sử ta có ideal dẫn xuất của* $\mathfrak{g}$ *là* $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle \cong R^3$, *khi đó đại số Lie* $\mathfrak{g}$ *là một MD-đại số bất khả phân nếu và chỉ nếu* $\mathfrak{g}$ *thỏa mãn điều kiện* $ad_{e_1} = 0$, $ad_{e_2} \in End(\mathfrak{g}^1) \cong Mat_3(\mathbb{R})$, $[e_1, e_2] = e_3$ *và* $\mathfrak{g}$ *đẳng cấu với mỗi đại số sau:*

$$\mathfrak{g}_{5,3,1(\lambda_1,\lambda_2)}: \ ad_{e_2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,2(\lambda)}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,3(\lambda)}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,4}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,5(\lambda)}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,6(\lambda)}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,7}: \quad ad_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{g}_{5,3,8(\lambda,\varphi)}:\ ad_{e_2}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix};\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\varphi\in(0,\pi).$$

Chú ý 2.4: Một nhóm Lie đơn liên giải được G là exponent nếu và chỉ nếu ánh xạ $ad_X:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ không có giá trị riêng thuần ảo nào. Do đó, dễ dàng kiểm tra rằng, các nhóm Lie tương ứng với các đại số $\mathfrak{g}_{5,3,1(\lambda_1,\lambda_2)}$, $\mathfrak{g}_{5,3,2(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,3,3(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,3,4}$, $\mathfrak{g}_{5,3,5(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,3,6(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,3,7}$, $\mathfrak{g}_{5,3,8\left(\lambda,\varphi\neq\frac{\pi}{2}\right)}$ là exponent và nhóm Lie tương ứng với đại số $\mathfrak{g}_{5,3,8\left(\lambda,\varphi=\frac{\pi}{2}\right)}$ là không exponent.

2.3. MD5-đại số có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 1.

Định lý 2.5: *Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie thực giải được 5 chiều, $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ là một cơ sở của $\mathfrak{g}$. Giả sử ta có ideal dẫn xuất của $\mathfrak{g}$ là $\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\langle e_2,e_3,e_4,e_5\rangle\cong R^4$, khi đó $\mathfrak{g}$ là một MD-đại số bất khả phân nếu và chỉ nếu $\mathfrak{g}$ thỏa mãn điều kiện $ad_{e_1}\in End(g^1)\cong Mat_4(\mathbb{R})$ và $\mathfrak{g}$ đẳng cấu với một trong các đại số sau:*

$$\mathfrak{g}_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}:\ ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}:\quad ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},\lambda_1\neq\lambda_2$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,3(\lambda)}:\qquad ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,4(\lambda)}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,5}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\mathrm{g}_{5,4,7(\lambda)}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,8(\lambda)}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,9(\lambda)}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\mathrm{g}_{5,4,10}: \quad ad_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,11(\varphi,\lambda_1,\lambda_2)}:\ ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix};\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\lambda_1\neq\lambda_2,\varphi\in(0,\pi)$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,12(\varphi,\lambda)}:\quad ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix};\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\lambda_1\neq\lambda_2,\varphi\in(0,\pi)$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,13(\varphi,\lambda,\mu)}:\ ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -\mu\\ 0 & 0 & \mu & \lambda\end{bmatrix};\lambda,\mu\in\mathbb{R},\mu>0,\varphi\in(0,\pi)$$

$$\mathfrak{g}_{5,4,14(\varphi,\lambda)}:\quad ad_{e_1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix};\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\varphi\in(0,\pi)$$

Chú ý 2.6. Việc liệt kê các đại số trên dựa trên dạng chuẩn tắc Jordan. Lớp các MD5-đại số có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 1 chính là lớp các đại số Lie thực giải được 5 chiều có ideal dẫn xuất giao hoán đối chiều 1 mà thường được gọi với một tên khác là lớp các đại số Lie hầu như giao hoán 5 chiều. Lớp các đại số Lie hầu như giao hoán là một trong 2 lớp chiếm hầu hết các đại số Lie thấp chiều. Tương tự với Chú ý 2.4, các nhóm Lie tương ứng với các đại số $\mathfrak{g}_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,3(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,4(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,5}$, $\mathfrak{g}_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,7(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,8(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,9(\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,10}$, $\mathfrak{g}_{5,4,11(\varphi\neq\frac{\pi}{2},\lambda_1,\lambda_2)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,12(\varphi\neq\frac{\pi}{2},\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,13(\varphi\neq\frac{\pi}{2},\lambda,\mu)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,14(\varphi\neq\frac{\pi}{2},\lambda)}$ là exponent và các nhóm Lie tương ứng với các đại số $\mathfrak{g}_{5,4,11(\varphi=\frac{\pi}{2},\lambda_1,\lambda_2)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,12(\varphi=\frac{\pi}{2},\lambda)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,13(\varphi=\frac{\pi}{2},\lambda,\mu)}$, $\mathfrak{g}_{5,4,14(\varphi=\frac{\pi}{2},\lambda)}$ là không exponent.

3. Lượng tử hóa biến dạng trên quỹ đạo đối phụ hợp

Định nghĩa 3.1: *Cho* (M,ω) *là một đa tạp symplectic và* $Z = C^{\infty}(M)[[v]]$ *là không gian tuyến tính các chuỗi lũy thừa hình thức* $a(x,v) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k(x)$, $a_k(x) \in C^{\infty}(M)$. *Lượng tử hóa biến dạng của* $C^{\infty}(M)$ *(hoặc lượng tử hóa biến dạng trên đa tạp M) được định nghĩa là ánh xạ:*

$$C^{\infty}(M)\times C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)[[v]]$$

$$(u,v) \qquad \mapsto \; u *_v v = \sum_r v^r C_r(u,v)$$

thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $(u *_v v) *_v w = u *_v (v *_v w)$.

(ii) $C_0(u,v) = uv$, $C_1(u,v) - C_1(v,u) = 2\{u,v\}$, *trong đó* $\{,\}$ *là móc Poisson.*

(iii) $u *_v 1 = 1 *_v u = u$.

(iv) *Các ánh xạ* C_r *đều là các toán tử song khả vi.*

Ở đây, $*_v$ *là *-tích xác định trên* $C^{\infty}(M)$.

Định nghĩa 3.2: *Moyal *-tích của hai hàm trơn* $u,v \in C^{\infty}(R^{2n})$ *được định nghĩa như sau:*

$$u * v = u.v + \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r!}\left(\frac{\hbar}{2i}\right)^r P^r(u,v).$$

Trong đó: $P^1(u,v) = \{u,v\}$

$$P^r(u,v) := \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\ldots\Lambda^{i_r j_r}\partial^r_{i_1 i_2\ldots i_r} u \partial^r_{j_1 j_2\ldots j_r} v$$

với $\partial^r_{i_1 i_2\ldots i_r} = \dfrac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_r}}; x = (p,q) = (p_1,\ldots,p_n,q^1,\ldots,q^n)$, $\Lambda^{i_r j_r}$ *là các phần tử của* Λ^{-1}.

Vì mọi quỹ đạo đối phụ hợp đều là đa tạp symplectic *G*-thuần nhất với tác động đối phụ hợp của *G,* do đó không gian $\mathfrak{g}^*$ được phân thành hợp rời nhau của các đa tạp đa tạp symplectic *G*-thuần nhất. Với mỗi $A \in \mathrm{g}$, tồn tại trường vectơ ξ_A được xác định như sau:

$$\left(\xi_A f\right)(F) = \frac{d}{dt} f\left(F.\exp(tA)\right)\Big|_{t=0} \quad , \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Đồng thời phần tử A cũng xác định cho ta hàm Halminton $\tilde{A}$ trên Ω có công thức $\tilde{A}(F) = \langle F, A\rangle$. Hàm $\tilde{A}$ và trường vectơ ξ_A có mối liên hệ:

$$\xi_A f = \left\{\tilde{A}, f\right\}; \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Khi đó ánh xạ $A \in \mathrm{G} \mapsto \tilde{A} \in C^\infty(\Omega)$ sẽ là một biểu diễn tuyến tính của đại số g trong đại số Poisson $\left(C^\infty(\Omega), \{,\}\right)$. Hơn nữa dạng symplectic ω trên quỹ đạo đối phụ hợp Ω có dạng:

$$\omega\left(\xi_A, \xi_B\right) = B_F(A, B) = \left\langle F, [A, B]\right\rangle; A, B \in \mathrm{g}.$$

Trong trường hợp mỗi quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie G vi phôi với R^{2n}, ta có thể trang bị trên đó một *-tích khả vi hình thức chính là Moyal *-tích. Đồng thời *-tích này thỏa mãn tính chất:

$$i\tilde{A} * i\tilde{B} - i\tilde{B} * i\tilde{A} = i\widetilde{[A, B]} \ , \forall A, B \in \mathrm{g}.$$

Do đó, ánh xạ $A \mapsto i\tilde{A}*$ là một biểu diễn của đại số g trong không gian $Z = C^\infty(\Omega)[[v]]$ và được kí hiệu là l_A. Tuy nhiên, lượng tử hóa không chỉ là việc tìm ra toán tử l_A mà còn tìm ra các đối tượng lượng tử tương ứng với các đối tượng cổ điển. Điều này đồng nghĩa với việc tìm các biểu diễn của đại số Poisson $\left(C^\infty(\Omega), \{,\}\right)$ trong một không gian Hilbert, tức là ta phải xác định toán tử lượng tử $\hat{l}_A$ có công thức như sau:

$$\hat{l}_A = F_p \circ \ell_A \circ F_p^{-1}.$$

Trong đó F_p là phép biến đổi Fourier từng phần của hàm f từ biến p sang biến x, xác định trên không gian $L^2\left(R^{2n}, dpdq/(2\pi)^n\right)$:

$$F_p(f)(x,q)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}e^{-ip.x}f(p,q)\,dp$$

và phép biến đổi Fourier ngược:

$$F_p^{-1}(f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}e^{ip.x}f(x,q)\,dx\,.$$

Hiển nhiên rằng, nếu nhóm Lie *G* là liên thông và đơn liên thì $\exp\left(\hat{l}_A\right)$ chính là biểu diễn của *G*. Hơn nữa, nếu *G* là một nhóm exponent thì tất cả các biểu diễn unita vô hạn chiều của *G* đều có dạng $\hat{l}_A$. Mục tiêu của bài báo này là tìm tất cả các toán tử $\hat{l}_A$ của các đại số Lie đã được liệt kê ở trên.

Phương pháp xây dựng công thức lượng tử hóa biến dạng chia làm 3 bước:

1) Mô tả tường minh các quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie *G*. Cách mô tả có thể thao khảo chi tiết trong [7].

2) Đưa ra công thức của ánh xạ symplectic ψ thỏa mãn tính tương thích của atlas. Bước này dể dàng thực hiện nhờ vào công thức mô tả của quỹ đạo đối phụ hợp. Vấn đề còn lại là kiểm tra tính tương thích của ánh xạ ψ.

3) Từ các hàm Hamilton, ta sẽ nhận được công thức của lượng tử hóa biến dạng trên các quỹ đạo đối phụ hợp. Khi đó ta sẽ thu được các biểu diễn của các đại số Lie tương ứng với nhóm Lie *G*.

Ví dụ 1:

Xét nhóm Lie $G_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$ tương ứng với đại số Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$ là nhóm exponent nếu và chỉ nếu $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$. Các móc Lie trên $\mathfrak{g}_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$ được viết lại như sau: $[e_2,e_3]=\cos\varphi.e_3+\sin\varphi.e_4$, $[e_2,e_4]=-\sin\varphi.e_3+\cos\varphi.e_4$, $[e_2,e_5]=\lambda e_5$. Gọi $\mathfrak{g}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$ và cơ sở đối ngẫu tương ứng là $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*,e_5^*\}$, giả sử $F=\alpha e_1^*+\beta e_2^*+\gamma e_3^*+\delta e_4^*+\sigma e_5^*\in\mathfrak{g}^*$. Khi đó quỹ đạo đối phụ hợp của *G* chứa *F* được mô tả như sau:

$$\begin{cases} x = \alpha + \left[\cos\varphi\text{-}e^{q\cos\varphi}\cos(\varphi\text{-}q\sin\varphi)\right]\gamma + \left[-\sin\varphi + e^{q\cos\varphi}\sin(\varphi\text{-}q\sin\varphi)\right]\delta \\ y = p \\ z = \gamma e^{q\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi)+\delta e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi) \\ t = -\gamma e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi) + \delta e^{b\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi) \\ s = \sigma e^{\lambda q} \end{cases} \qquad p, q \in R$$

1. Nếu $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$, ta có các kết quả sau:

Mệnh đề 3.3: *Với mỗi quỹ đạo không tầm thường $\Omega_F \subset \mathfrak{g}^*$, ánh xạ symplectic toàn cục ψ có công thức:*

$$\psi(p,q) = \Big(\alpha + \gamma\left(\cos\varphi - e^{q\cos\varphi}\cos(\varphi - q\sin\varphi)\right) + \delta\left(-\sin\varphi + e^{q\cos\varphi}\sin(\varphi - q\sin\varphi)\right), p,$$
$$\gamma e^{q\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi) + \delta e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi), -\gamma e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi) + \delta e^{q\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi), \sigma e^{\lambda q}\Big) \in \Omega_F.$$

Hơn nữa, $\left(\Omega_F, \psi^{-1}\right)$ tạo thành 1 atlas tương thích.

Chứng minh:

Để chứng minh $\left(\Omega_F, \psi^{-1}\right)$ tạo thành 1 atlas tương thích ta cần phải chứng minh dạng Kirillov trên atlas này có dạng chuẩn tắc, tức là $\omega = dp \wedge dq$. Điều này dễ dàng suy ra trực tiếp từ việc tính toán và so sánh các công thức $\langle F, [A,B] \rangle$, $\xi_A \otimes \xi_B$, trong đó $A = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + fe_5$, $B = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4 + f'e_5$ $\in \mathfrak{g}$.□

Từ công thức của hàm Hamilton $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}\circ\psi(p,q) = a\Big(\alpha + \gamma\left(\cos\varphi - e^{q\cos\varphi}\cos(\varphi - q\sin\varphi)\right) + \delta\left(-\sin\varphi + e^{q\cos\varphi}\sin(\varphi - q\sin\varphi)\right)\Big) + bp +$$
$$+c\left(\gamma e^{q\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi) + \delta e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi)\right) + d\left(-\gamma e^{q\cos\varphi}\sin(q\sin\varphi) + \delta e^{q\cos\varphi}\cos(q\sin\varphi)\right) + f\sigma e^{\lambda q}$$

ta có định lý sau:

Định lý 3.4: *Biểu diễn của đại số $\mathfrak{g}$ nhận được từ lượng tử hóa biến dạng có công thức như sau:*

$$\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\Big\{a\Big(\alpha + \gamma\big(\cos\varphi - e^{s\cos\varphi}\cos(\varphi - s\sin\varphi)\big) + \delta\big(-\sin\varphi + e^{s\cos\varphi}\sin(\varphi - s\sin\varphi)\big)\Big) +$$
$$c\big(\gamma e^{s\cos\varphi}\cos(s\sin\varphi) + \delta e^{s\cos\varphi}\sin(s\sin\varphi)\big) + d\big(-\gamma e^{s\cos\varphi}\sin(s\sin\varphi) + \delta e^{s\cos\varphi}\cos(s\sin\varphi)\big) +$$
$$+ f\sigma e^{\lambda s}\Big\}.$$

Đồng thời, nếu $A, B \in \mathfrak{g}$ *thì* $\hat{\ell}_A \circ \hat{\ell}_B - \hat{\ell}_B \circ \hat{\ell}_A = \hat{\ell}_{[A,B]}$.

2. Nếu $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, ta thay vi phôi toàn cục ψ bởi vi phôi địa phương ψ_k :

$$\psi_k : R \times (2k\pi, 2k\pi + 2\pi) \to \Omega_F$$
$$(p,q) \mapsto \big(\alpha - \gamma\sin q + \delta(-1+\cos q), p, \gamma\cos q + \delta\sin q, -\gamma\sin q + \delta\cos q, \sigma e^{\lambda q}\big)$$

Khi đó các biểu diễn địa phương của $\mathfrak{g}$ có công thức:

$$\hat{\ell}^k_A = b\partial_s + i\big\{a\big(\alpha - \gamma\sin s + \delta(-1+\cos s)\big) + c\big(\gamma\cos s + \delta\sin s\big) + d\big(-\gamma\sin s + \delta\cos s\big) + f\sigma e^{\lambda s}\big\}$$

Ví dụ 2:

Xét nhóm Lie $G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ tương ứng với đại số Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$. Gọi $\mathfrak{g}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$ và cơ sở đối ngẫu tương ứng là $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*\}$, giả sử $F = \alpha e_1^* + \beta e_2^* + \gamma e_3^* + \delta e_4^* + \sigma e_5^* \in g^*$. Khi đó quỹ đạo đối phụ hợp của G chứa F được mô tả như sau:

$$\begin{cases} x = \alpha - \dfrac{b(-1+e^{\lambda_1 a})}{a}\beta - \dfrac{c(-1+e^{\lambda_2 a})}{a}\gamma - \dfrac{d(-1+e^{\lambda_3 a})}{a}\delta - \dfrac{f(-1+e^{a})}{a}\sigma \\ y = e^{\lambda_1 a}\beta \\ z = e^{\lambda_2 a}\gamma \\ t = e^{\lambda_3 a}\delta \\ s = e^{a}\sigma \end{cases}$$

Ánh xạ symplectic ψ có dạng $\psi(p,q) = \big(p, \beta e^{\lambda_1 q}, \gamma e^{\lambda_2 q}, \delta e^{\lambda_3 q}, \sigma e^{q}\big)$.

Suy ra $A \circ \psi(p,q) = ap + b\beta e^{\lambda_1 q} + c\gamma e^{\lambda_2 q} + d\delta e^{\lambda_3 q} + f\sigma e^{q}$. Do đó

$$\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\big(b\beta e^{\lambda_1 s} + c\gamma e^{\lambda_2 s} + d\delta e^{\lambda_3 s} + f\sigma e^{s}\big).$$

4. Kết quả

Áp dụng phương pháp trên cho các đại số còn lại ta thu được kết quả sau:

$\mathrm{g}_{5,3,1(\lambda_1,\lambda_2)}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\dfrac{1-e^{\lambda_1 s}}{\lambda_1}\right) + c\gamma e^{\lambda_1 s} + d\delta e^{\lambda_2 s} + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,2(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\left(1-e^s\right)\right) + c\gamma e^s + d\delta e^s + f\sigma e^{\lambda s}\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,3(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\dfrac{1-e^{\lambda s}}{\lambda}\right) + c\gamma e^{\lambda s} + d\delta e^s + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,4}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\left(1-e^s\right)\right) + c\gamma e^s + d\delta e^s + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,5(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\dfrac{1-e^{\lambda s}}{\lambda}\right) + c\gamma e^{\lambda s} + d\delta e^s + f\left(\delta s e^s + \sigma e^s\right)\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,6(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\left(1-e^s\right)\right) + c\gamma e^s + d\left(\gamma s e^s + \delta e^s\right) + f\sigma e^{\lambda s}\right).$

$\mathrm{g}_{5,3,7}$:

$$\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\left(a\left(\alpha + \gamma\left(1-e^s\right)\right) + c\gamma e^s + d\left(\gamma s e^s + \delta e^s\right) + f\left(\gamma\frac{s^2 e^s}{2} + \delta s e^s + \sigma e^s\right)\right).$$

$\mathrm{g}_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$: Nếu $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ thì

$$\hat{\ell}_A = b\partial_s + i\Big\{a\left(\alpha + \gamma\left(\cos\varphi - e^{s\cos\varphi}\cos(\varphi - s\sin\varphi)\right) + \delta\left(-\sin\varphi + e^{s\cos\varphi}\sin(\varphi - s\sin\varphi)\right)\right) +$$
$$c\left(\gamma e^{s\cos\varphi}\cos(s\sin\varphi) + \delta e^{s\cos\varphi}\sin(s\sin\varphi)\right) + d\left(-\gamma e^{s\cos\varphi}\sin(s\sin\varphi) + \delta e^{s\cos\varphi}\cos(s\sin\varphi)\right) +$$
$$+ f\sigma e^{\lambda s}\Big\},$$

nếu $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ thì

$$\hat{\ell}^k_A = b\partial_s + i\left\{a\left(\alpha - \gamma\sin s + \delta(-1+\cos s)\right) + c\left(\gamma\cos s + \delta\sin s\right) + d\left(-\gamma\sin s + \delta\cos s\right) + f\sigma e^{\lambda s}\right\}$$

$\mathrm{g}_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda_1 s} + c\gamma e^{\lambda_2 s} + d\delta e^{\lambda_3 s} + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda_1 s} + c\gamma e^{\lambda_2 s} + d\delta e^s + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,4,3(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda s} + c\gamma e^{\lambda s} + d\delta e^s + f\sigma e^s\right).$

$\mathrm{g}_{5,4,4(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda s} + \left(c\gamma + d\delta + f\sigma\right)e^s\right).$

$g_{5,4,5}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta + c\gamma + d\delta + f\sigma\right)e^s$.

$g_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda_1 s} + c\gamma e^{\lambda_2 s} + d\delta e^s + f\left(se^s\delta + \sigma e^s\right)\right)$.

$g_{5,4,7(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(\left(b\beta + c\gamma\right)e^{\lambda s} + d\delta e^s + f\left(se^s\delta + \sigma e^s\right)\right)$.

$g_{5,4,8(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda s} + c\left(\beta s + \gamma\right)e^{\lambda s} + d\delta e^s + f\left(s\delta + \sigma\right)e^s\right)$.

$g_{5,4,9(\lambda)}$: $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^{\lambda s} + c\gamma e^s + d\left(s\gamma + \delta\right)e^s + f\left(\frac{s^2}{2}\gamma + s\delta + \sigma\right)e^s\right)$.

$g_{5,4,10}$:

$$\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(b\beta e^s + c\left(s\beta + \gamma\right)e^s + d\left(\frac{s^2}{2}\beta + s\gamma + \delta\right)e^s + f\left(\frac{s^3}{6}\beta + \frac{s^2}{2}\gamma + s\delta + \sigma\right)e^s\right).$$

$g_{5,4,11(\varphi,\lambda_1,\lambda_2)}$: Nếu $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{se^{-i\varphi}} + d\delta e^{\lambda_1 s} + f\sigma e^{\lambda_2 s}\right)$,

nếu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A^k = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{-is} + d\delta e^{\lambda_1 s} + f\sigma e^{\lambda_2 s}\right)$.

$g_{5,4,12(\varphi,\lambda)}$: Nếu $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{se^{-i\varphi}} + \left(d\delta + f\sigma\right)e^{\lambda s}\right)$,

nếu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A^k = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{-is} + \left(d\delta + f\sigma\right)e^{\lambda s}\right)$.

$g_{5,4,13(\varphi,\lambda,\mu)}$: Nếu $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ thì

$\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{se^{-i\varphi}} + \left(d + if\right)\left(\delta + i\sigma\right)e^{s(\lambda - i\mu)}\right)$,

nếu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A^k = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{-is} + \left(d + if\right)\left(\delta + i\sigma\right)e^{s(\lambda - i\mu)}\right)$.

$g_{5,4,14(\varphi,\lambda)}$: Nếu $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ thì

$\hat{\ell}_A = a\partial_s + i\left(\left(b + ic\right)\left(\beta + i\gamma\right)e^{se^{-i\varphi}} + d\delta e^{\lambda s} + f\left(\delta s + \sigma\right)e^{\lambda s}\right)$.

nếu $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ thì $\hat{\ell}_A^k = a\partial_s + i\left(\left(b+ic\right)\left(\beta+i\gamma\right)e^{-is} + d\delta e^{\lambda s} + f\left(\delta s+\sigma\right)e^{\lambda s}\right)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Arnal D., Cortet J.C. and Ludwig J (1995), *Moyal product and representations of solvable product Lie groups*, J. Funct. Anal., 133, 402-424.

[2]. D.N.Diep (1999), *Noncommulative Geometry Methods for Group C*-Algebras*, Chapman and Hall/ CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol. 416, 284 pages.

[3]. D.N.Diep and N.V.Hai (2001), *Quantum half-planes via deformation quantization*, Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), 42, No 2.

[4]. N.V.Hai (2001), *Quantum co-adjoint orbits of MD4-groups*, Vietnam J. Math, 29, 131-158.

[5]. D.M.Thanh (2007), *K-quỹ đạo lượng tử trên MD5-nhóm*, Tạp chí Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Sư phạm Tp. HCM, 12, 83-98.

[6]. L.A.Vu and K.P.Shum, *Advances in Algebra and Combinatorics 2008*, World Scientific Publishing Co., 353-371.

[7]. L.A.Vu and D.M.Thanh (2006), *The Geometry of K-orbits of a Subclass of MD5-Groups and Foliations Formed by Their Generic K-orbits*, Contributions in Mathematics and Applications, A special Vol. of East-West J. Math, 169-184.

Tóm tắt

Các nghiên cứu quan trọng đầu tiên của khái niệm lượng tử hóa được tiến hành bởi Weyl, Moyal, … và sau đó phát triển mạnh mẽ trong những năm 1970 bởi nhiều nhà toán học nổi tiếng, trong đó xuất hiện những ứng dụng mới của "lượng tử hóa biến dạng" trong lý thuyết biểu diễn nhóm Lie. Từ việc xây dựng công thức lượng tử hóa trên các quỹ đạo đối phụ hợp của một nhóm Lie, ta thu được các biểu diễn vô hạn chiều của nhóm Lie đó.

Song song với bài toán phân loại các MD-nhóm, ta cũng có bài toán xây dựng lượng tử hóa biến dạng trên các quỹ đạo đối phụ hợp của chúng. Sử dụng Moyal *-tích trên các quỹ đạo đối phụ hợp, ta sẽ liệt kê các biểu diễn của một số lớp con đặc biệt của lớp các MD5-đại số trong [6].

Abstract

Deformation quantization on co-adjoining orbits of some classes of 5-dimensional solvable lie groups

The first important pieces of research on the concept of quantization were conducted by Weyl, Moyal, … and then strongly developed in 1970's by many famous mathematicians, thereby new applications of "deformation quantization" appeared in the representation theory of Lie group. From building the formula of deformation quantization on co-adjoining orbits of a Lie group we get infinite dimension representations of that group.

Addition to classification of MD-groups, we have the problem of building deformation quantization on their co-adjoining orbits. Using Moyal * - product on co-adjoining orbits, we will list representations of some special subclasses of class of MD5-algebras in [6].