TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 21, Số 12 (2024): 2181-2193

Vol. 21, No. 12 (2024): 2181-2193

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.12.4183(2024)

Bài báo nghiên cứu

ÁP DỤNG TÍCH PHÂN TRONG GIẢNG DẠY CÁC MÔ HÌNH KINH TẾ CHO SINH VIÊN KHỐI NGÀNH KINH TẾ

Nguyễn Quang Huy**, *Lê Thị Thanh Hải

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Quang Huy – Email: huynq@hcmute.edu.vn*

Ngày nhận bài: 25-3-2024; ngày nhận bài sửa: 07-6-2024; ngày duyệt đăng: 16-9-2024

TÓM TẮT

Tích phân là một trong những công cụ hiệu quả để giải quyết rất nhiều bài toán khác nhau, trong đó có nhiều vấn đề thuộc lĩnh vực kinh tế. Trong bối cảnh số lượng sinh viên khối ngành Kinh tế đang ngày càng tăng thì việc xây dựng một tài liệu tham khảo cho sinh viên các ngành kinh tế học tập và nghiên cứu các môn Toán kinh tế là vô cùng cần thiết. Trong bài viết này, chúng tôi tổng hợp lại một số mô hình kinh tế sử dụng tích phân để giải quyết. Với mỗi một mô hình, chúng tôi sẽ trình bày khái niệm, đặc điểm và đưa ra những ví dụ minh họa có số liệu cụ thể với lời giải chi tiết. Chúng tôi hi vọng các kết quả của bài báo này sẽ giúp ích cho sinh viên khối ngành kinh tế trong việc hiểu rõ các ứng dụng của tích phân không chỉ trong kinh tế mà còn trong các vấn đề thực tế khác.

Từ khóa: tích phân xác định; tích phân suy rộng; tích phân bất định; biên tế; mô hình toán kinh tế

1. Giới thiệu

Như chúng ta đã biết, toán học đã và đang được ứng dụng trong rất nhiều bài toán thuộc các lĩnh vực khác nhau như vật lí, kĩ thuật, y học, sinh học, môi trường, công nghệ thông tin, kinh tế, tài chính… Toán học là một công cụ hữu hiệu giúp chúng ta giải quyết các vấn đề một cách hợp lí và hiệu quả. Trong toán học, tích phân là một trong những công cụ tốt và có thể áp dụng để giải quyết nhiều bài toán thực tế. Chẳng hạn như trong vật lí, tích phân được sử dụng để tính toán các đại lượng như vận tốc, gia tốc và để hiểu cách các hệ thống vật lí thay đổi theo thời gian. Trong kĩ thuật, tích phân được áp dụng trong các lĩnh vực như phân tích ứng suất và sự biến dạng trong kĩ thuật cơ khí hay xử lí tín hiệu trong kĩ thuật điện. Trong khoa học môi trường, tích phân được sử dụng để mô hình hóa và hiểu biến đổi của các yếu tố môi trường theo thời gian, chẳng hạn như dự đoán sự tăng trưởng dân số, biến đổi khí hậu hoặc sự lan truyền của các chất ô nhiễm.

Trong thực tế nói chung và trong kinh tế nói riêng thì việc vận dụng tích phân để phân tích các mô hình, đưa ra các dự đoán cũng như kiểm soát và đánh giá các kết quả đạt được luôn là vấn đề cần thiết đối với các chuyên gia kinh tế cũng như giảng viên, sinh viên. Vì

Cite this article as: Nguyen Quang Huy, & Le Thi Thanh Hai (2024). Applying integration in teaching economics models for economics students. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 21*(12), 2181-2193.

vậy, việc áp dụng tích phân để giải quyết các bài toán kinh tế đã và đang được nghiên cứu rộng rãi và ngày càng phát triển bởi tính hiệu quả mà nó mang lại. Trong kinh tế học, tích phân được sử dụng để mô hình hóa và phân tích các quy trình kinh tế khác nhau như tính toán tổng chi phí, doanh thu và lợi nhuận trong kinh doanh. Tích phân còn có thể được sử dụng để tính toán giá trị hiện tại ròng của các khoản đầu tư, điều này đóng vai trò quan trọng trong việc ra quyết định đầu tư. Vì những lí do nêu trên, trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp và phân tích một số ứng dụng của tích phân vào các bài toán kinh tế đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm như xác định các hàm mục tiêu từ các hàm biên tế (Chiang, 1984), giá trị hiện tại và giá trị tương lai của dòng tiền (Cao et al., 2019), xác định hàm cầu từ hệ số co giãn của cầu theo giá (Stewart, 2015), vòng đời thiết bị công nghiệp, chỉ số Gini, giá trị trung bình của chi phí (Le, 2010), phân phối thu nhập trong cộng đồng, thặng dư của nhà sản xuất và người tiêu dùng (Le & Hoang, 2008). Trong các mô hình này, chúng tôi cũng đưa ra những ví dụ minh họa có lời giải chi tiết để thấy rõ được việc sử dụng công cụ tích phân trong giải quyết vấn đề. Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp nghiên cứu cũng như những kết quả đạt được và định hướng phát triển.

2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi tìm hiểu các tài liệu, giáo trình, sách tham khảo và các bài báo khoa học trong và ngoài nước liên quan mật thiết đến vấn đề nghiên cứu để tổng hợp thông tin. Từ đó, chúng tôi phân tích các kết quả đã đạt được để đưa ra những tình huống cụ thể có thể áp dụng công cụ tích phân để giải quyết chúng hoặc áp dụng vào những mô hình tổng quát hơn. Ngoài ra, chúng tôi thường xuyên trao đổi chuyên môn với các giảng viên trong bộ môn Toán, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh, qua đó phát hiện thêm một số vấn đề mới được nhiều người quan tâm.

3. Kết quả và thảo luận

Để độc giả tiện theo dõi, chúng tôi trình bày một số kí hiệu, thuật ngữ và một số hàm số trong kinh tế.

***Bảng 1.** Một số kí hiệu và thuật ngữ trong kinh tế*

Kí hiệu	Thuật ngữ
P	Giá sản phẩm
Q	Sản lượng
C	Chi phí
FC	Chi phí cố định
R	Doanh thu
π	Lợi nhuận
D	Cầu
S	Cung
K	Vốn
L	Lao động
r	Lãi suất
ε	Độ co giãn
CS	Thặng dư của người tiêu dùng
PS	Thặng dư của nhà sản xuất

Bảng 2. *Một số hàm số trong kinh tế*

Tên hàm số	Kí hiệu	Ý nghĩa
Hàm chi phí	$C(Q)$	Cho biết tổng chi phí sản xuất *Q* đơn vị sản phẩm của một loại hàng hóa. $C(Q)$ = Chi phí sản xuất+ Chi phí cố định. Chi phí sản xuất = Chi phí sản xuất mỗi sản phẩm $\times$ Số sản phẩm.
	$C(t)$	Chi phí của một loại hàng hóa tại thời điểm *t*.
Hàm doanh thu	$R(Q)$	Cho biết tổng doanh thu khi bán *Q* đơn vị sản phẩm của một loại hàng hóa.
	$R(t)$	Cho biết doanh thu của một loại hàng hóa tại thời điểm *t*.
Hàm lợi nhuận	$\pi(Q)$	Cho biết tổng lợi nhuận khi bán *Q* đơn vị sản phẩm của một loại hàng hóa. Tổng lợi nhuận = Tổng doanh thu – Tổng chi phí.
	$\pi(t)$	Cho biết lợi nhuận của một loại hàng hóa tại thời điểm *t*.
Hàm giá	$P(Q)$	Cho biết giá của một loại hàng hóa phụ thuộc số sản phẩm *Q* cung ứng.
	$P(t)$	Cho biết giá của một loại hàng hóa tại thời điểm *t*.

3.1. Xác định hàm tổng từ hàm giá trị biên tế (Biernacki, 2010; Cao et al., 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$, trong đó x, y là các biến kinh tế. Trong kinh tế học, giá trị $f'(x_0)$, kí hiệu là $Mf(x_0)$, được gọi là giá trị cận biên hay biên tế của $f(x_0)$ tại x_0, được dùng để biểu diễn độ thay đổi xấp xỉ của biến kinh tế *y* khi biến kinh tế *x* tăng thêm 1 đơn vị. Ví dụ, nếu cho hàm $C(Q)$ là hàm chi phí sản xuất *Q* sản phẩm thì $MC = C'(Q)$ là chi phí biên tế ứng với mức sản lượng *Q*, xấp xỉ chi phí phát sinh khi sản xuất thêm sản phẩm thứ *Q* + 1. Nếu cho hàm $R(Q)$ là hàm doanh thu khi bán được *Q* sản phẩm thì $MR = R'(Q)$ là doanh thu biên tế ứng với mức sản lượng *Q*, xấp xỉ doanh thu phát sinh khi sản xuất thêm sản phẩm thứ *Q* + 1.

Với hàm giá trị biên tế $Mf(x)$ cho trước, ta tìm được hàm số $y = f(x)$ bởi

$$y = \int Mf(x)dx.$$

Ví dụ 3.1. Tìm hàm chi phí sản xuất $C(Q)$ biết chi phí biên tế theo sản lượng *Q* là $MC(Q) = C'(Q) = 1 + Q + 3Q^2$ và chi phí cố định là $FC = 150$.

Giải. Ta có hàm chi phí sản xuất là

$$C(Q) = \int (1 + Q + 3Q^2)dQ = Q + \frac{Q^2}{2} + Q^3 + C_0.$$

$$C_0 = C(0) = FC = 150 \Rightarrow C(Q) = Q + \frac{Q^2}{2} + Q^3 + 150.$$

Ví dụ 3.2. Giả sử doanh thu biên tế tại mức sản lượng *Q* là $MR = R'(Q) = 5 - 4Q - 3Q^2$. Xác định biểu thức của hàm doanh thu $R(Q)$ và hàm cầu $P(Q)$.

Giải. Ta có hàm doanh thu là

$$R(Q) = \int (5 - 4Q - 3Q^2)dQ = 5Q - 2Q^2 - Q^3 + C.$$

$$R(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow R(Q) = 5Q - 2Q^2 - Q^3.$$

Vì $R(Q) = P(Q).Q$ nên ta tìm được hàm cầu là

$$P = P(Q) = \frac{R(Q)}{Q} = 5 - 2Q - Q^2.$$

Ví dụ 3.3. Giả sử lợi nhuận biên tế tại mức sản lượng *Q* là $M\pi = \pi'(Q) = 4Q + 3$. Biết rằng nếu công ti bán được 50 sản phẩm thì lời 100 đơn vị lợi nhuận. Tìm hàm lợi nhuận $\pi(Q)$.

Giải. Ta có hàm lợi nhuận là

$$\pi(Q) = \int (4Q + 3)dQ = 2Q^2 + 3Q + \pi_0.$$

$$\pi(50) = 100 \Rightarrow \pi_0 = -5050 \Rightarrow \pi(Q) = 2Q^2 + 3Q - 5050.$$

Ví dụ 3.4. Cho $S(Y)$ là hàm tiết kiệm phụ thuộc vào mức thu nhập *Y*. Cho biết xu hướng tiết kiệm biên tế phụ thuộc vào mức thu nhập *Y* là $MS = S'(Y) = 0,2 - \frac{0,1}{\sqrt{Y}}$. Tìm hàm tiết kiệm biết rằng khi *Y* = 25 thì *S* = 20.

Giải. Ta có hàm tiết kiệm là

$$S(Y) = \int \left(0,2 - \frac{0,1}{\sqrt{Y}}\right)dY = 0,2Y - 0,2\sqrt{Y} + S_0.$$

$$S(25) = 20 \Rightarrow S_0 = 16 \Rightarrow S(Y) = 0,2Y - 0,2\sqrt{Y} + 16.$$

Ví dụ 3.5. Cho $K(t)$ là hàm quỹ vốn tại thời điểm *t*. Cho biết lượng đầu tư ròng tại thời điểm *t* là $I(t) = K'(t) = 12t^{\frac{1}{3}}$ và quỹ vốn tại thời điểm ban đầu là $K(0) = 25$. Xác định hàm quỹ vốn tại thời điểm *t*.

Giải. Ta có hàm quỹ vốn tại thời điểm *t* là:

$$K(t) = \int 12t^{\frac{1}{3}}dt = 9t^{\frac{4}{3}} + K_0.$$

$$K(0) = 25 \Rightarrow K_0 = 25 \Rightarrow K(t) = 9t^{\frac{4}{3}} + 25.$$

3.2. *Tính tổng lợi nhuận* (Cao et al., 2019)

3.2.1. Tính tổng lợi nhuận ròng

Giả sử $R(Q)$ là doanh thu khi bán Q sản phẩm và $C(Q)$ là chi phí khi bán Q sản phẩm. Giả sử doanh thu biên tế $R'(Q)$ và chi phí biên tế $C'(Q)$ được cho trước thì tổng lợi nhuận ròng khi miền sản lượng là $a \le Q \le b$ được tính bởi:

$$N\pi = \pi(b) - \pi(a) = \int_a^b \pi'(Q)dQ = \int_a^b (R'(Q) - C'(Q))dQ. \qquad (1)$$

Ví dụ 3.6. Giả sử doanh thu biên tế và chi phí biên tế của một loại hàng hóa lần lượt là $R'(Q) = 75 - 0,5Q$ và $C'(Q) = 0,1Q^2 + 4Q + 15$.

Tính tổng lợi nhuận ròng khi sản lượng tăng từ 0 lên 10 (đơn vị sản lượng) .

Giải. Áp dụng công thức (1), ta có tổng lợi nhuận ròng khi $0 \le Q \le 10$ là

$$N\pi = \int_0^{10} (R'(Q) - C'(Q))dQ = \int_0^{10} (-0,1Q^2 - 4,5Q + 60)dQ$$

$$= \left(-\frac{0,1}{3}Q^3 - \frac{4,5}{2}Q^2 + 60Q\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{1025}{3}. \text{ (đơn vị lợi nhuận)}$$

3.2.2. Tính tổng lợi nhuận vượt trội

Giả sử sau khoảng thời gian t năm, hai dự án đầu tư sẽ sản sinh lợi nhuận lần lượt là $P_1(t)$ và $P_2(t)$ với các tốc độ sinh lời là $P_1'(t)$ và $P_2'(t)$. Giả sử rằng $P_2'(t) \ge P_1'(t)$ trong khoảng thời gian $0 \le t \le T$. Khi đó $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$ là lợi nhuận vượt trội của dự án 2 so với dự án 1. Tổng lợi nhuận vượt trội của dự án 2 so với dự án 1 được tính bởi

$$NE = E(T) - E(0) = \int_0^T E'(t)dt = \int_0^T (P_2'(t) - P_1'(t))dt. \qquad (2)$$

Ví dụ 3.7. Giả sử rằng sau t năm, khoản đầu tư thứ nhất sinh lời với tốc độ là $P_1'(t) = 100 + t^2$ (tỉ đồng/năm) trong khi đó khoản đầu tư thứ hai sinh lời với tốc độ là $P_2'(t) = 220 + 2t$ (tỉ đồng/năm).

a) Tốc độ sinh lời của khoản đầu tư thứ hai vượt trội khoản đầu tư thứ nhất trong bao nhiêu năm?

b) Tính tổng lợi nhuận vượt trội của khoản đầu tư thứ hai so với khoản đầu tư thứ nhất.

Giải.

a) Ta có

$$P_2'(t) - P_1'(t) \ge 0 \Rightarrow 120 + 2t - t^2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le t \le 12.$$

Vậy khoản đầu tư thứ hai vượt trội khoản đầu tư thứ nhất trong 12 năm.

b) Áp dụng công thức (2) ta có

$$NE = \int_0^{12} (P_2'(t) - P_1'(t))dt = \int_0^{12} \left(120 + 2t - t^2\right)dt = \left(120t + t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{12} = 1008.$$

Vậy tổng lợi nhuận vượt trội của khoản đầu tư thứ hai so với khoản đầu tư thứ nhất là 1008 (tỉ đồng).

3.3. *Tìm hàm cầu từ độ co giãn của cầu theo giá* (Le, 2010)

Ví dụ 3.8. Giả sử độ co giãn của hàm cầu theo giá là $\varepsilon = -\dfrac{P^2+5P}{Q}$ và lượng cầu ở mức giá $P=10$ là 400. Xác định lượng cầu ở mức giá $P=20$.

Giải. Áp dụng công thức tính độ co giãn, ta có

$$\varepsilon = Q'(P).\frac{P}{Q} = -\frac{P^2+5P}{Q} \Rightarrow Q'(P) = -P-5.$$

Từ đó, ta tìm được hàm cầu theo giá là

$$Q(P) = \int(-P-5)dP = -\frac{1}{2}P^2 - 5P + C.$$

$$Q(10) = 400 \Rightarrow C = 500 \Rightarrow Q(P) = -\frac{1}{2}P^2 - 5P + 500.$$

Lượng cầu ở mức giá $P=20$ là

$$Q(20) = -\frac{1}{2}20^2 - 5.20 + 500 = 200.$$

3.4. *Tìm giá bán trung bình của sản phẩm*

Giả sử nhà cung cấp có một loại sản phẩm định bán trong vùng cách xa nơi sản xuất của mình nhiều nhất là T (km), giá vận chuyển một đơn vị sản phẩm từ vị trí sản xuất là s (USD) trên mỗi km, lượng sản phẩm bán được tại vùng cách x (km) là $f(x)$, giá bán một đơn vị sản phẩm tại vùng đó là $P = r + sx\ (0 \le x \le T)$ (USD) với r là giá xuất xưởng. Bài toán đặt ra là xác định giá bán trung bình của một đơn vị sản phẩm trong vùng trên.

Ta có tổng số sản phẩm bán được là $Q = \int_0^T f(x)dx$ và tổng doanh thu bán hàng là $R = \int_0^T (r+sx)f(x)dx$. Do đó giá bán trung bình của một đơn vị sản phẩm trong vùng cách xa nơi sản xuất x km là

$$\overline{P} = \frac{R}{Q} = \frac{\int_0^T (r+sx)f(x)dx}{\int_0^T f(x)dx}. \tag{3}$$

Ví dụ 3.9. Cho $T = 100$ (km), $f(x) = 150 - x$ (đơn vị sản phẩm), $s = 0{,}1$ (USD), $r = 50$ (USD). Tính giá bán trung bình của một đơn vị sản phẩm.

Giải. Từ công thức (3), ta tính được giá trung bình của một đơn vị sản phẩm là:

$$\overline{P} = \frac{R}{Q} = \frac{\int_0^{100} (50+0,1x)(150-x)dx}{\int_0^{100} (150-x)dx} = \frac{\left(\frac{-0,1x^3}{3} - 35\frac{x^2}{2} + 7500x\right)\Big|_0^{100}}{\left(150x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{100}} = \frac{325}{6}\,(USD).$$

3.5. *Tìm hàm giá của sản phẩm được cho bởi tích phân suy rộng* (Le, 2010)

Ví dụ 3.10. Biết rằng giá bán của một loại sản phẩm tại thời điểm *t* (đơn vị tính: tháng) được xác định bởi $P(t) = 50 + 0,21\int_t^{+\infty} e^{-0,07x}dx$. Ước tính giá của sản phẩm sau 1 năm đưa ra thị trường và giá sản phẩm sau khoảng thời gian đủ lớn.

Giải. Ta có giá của sản phẩm sau 1 năm (12 tháng) là

$$\begin{aligned} P(12) &= 50 + (0,21)\int_{12}^{+\infty} e^{-0,07x}dx = 50 + (0,21)\lim_{N\to+\infty}\int_{12}^{N} e^{-0,07x}dx \\ &= 50 - 3\lim_{N\to+\infty} e^{-0,07x}\Big|_{12}^{N} = 50 - 3\lim_{N\to+\infty}(e^{-0,07N} - e^{-0,84}) = 50 + 3e^{-0,84} \approx 50,43. \end{aligned}$$

Vậy sau 1 năm kể từ khi đưa ra thị trường giá của sản phẩm xấp xỉ 50,43 (đơn vị tiền tệ).

Ta có hàm giá tại thời điểm *t* là

$$\begin{aligned} P(t) &= 50 + (0,21)\int_{t}^{+\infty} e^{-0,07x}dx = 50 + (0,21)\lim_{N\to+\infty}\int_{t}^{N} e^{-0,07x}dx \\ &= 50 - 3\lim_{N\to+\infty} e^{-0,07x}\Big|_{t}^{N} = 50 - 3\lim_{N\to+\infty}(e^{-0,07N} - e^{-0,07t})\Big|_{t}^{N} = 50 + 3e^{-0,07t}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{t\to\infty} P(t) = 50$ nên $P(t) \approx 50$ (đơn vị tiền tệ) sau khoảng thời gian *t* đủ lớn.

3.6. *Vòng đời thiết bị công nghiệp – Bài toán thay thế thiết bị*

Một thiết bị công nghiệp sau *t* năm đưa vào sử dụng tạo ra tổng doanh thu *R*(*t*) ứng với tổng chi phí bảo trì và khai thác *C*(*t*), tổng lợi nhuận là $\pi(t) = R(t) - C(t)$. Khoảng thời gian $0 \le t \le T$ mà $\pi'(t) \ge 0$ và $\pi'(t) < 0\ \forall t > T$ gọi là vòng đời của thiết bị. Sau thời điểm *T* thì tổng lợi nhuận $\pi(t)$ sẽ giảm nên thiết bị cần được thanh lí ngay trước hoặc tại thời điểm *T*. Khi đó tổng lợi nhuận mà thiết bị này tạo ra trong suốt vòng đời của nó là

$$N\pi = \pi(T) - \pi(0) = \int_0^T \pi'(t)dt = \int_0^T (R'(t) - C'(t))dt. \tag{4}$$

Ví dụ 3.11. Xác định vòng đời của thiết bị và tính tổng lợi nhuận biết $R'(t) = 6135 - 13t^2$ và $C'(t) = 5635 - 8t^2$ (đơn vị tính là 100 000 đồng).

Giải. Ta xác định vòng đời của thiết bị như sau

$$\pi'(t) = R'(t) - C'(t) = 500 - 5t^2.$$

$$\pi'(T) = 0 \Rightarrow 500 - 5T^2 = 0 \Rightarrow T = 10.$$

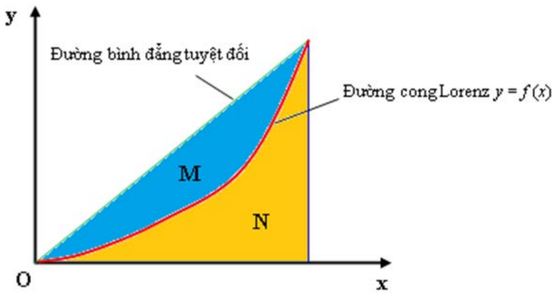
Áp dụng công thức (4), ta tính được tổng lợi nhuận mà thiết bị này tạo ra trong suốt vòng đời của nó là

$$N\pi = \int_0^{10} \pi'(t)dt = \int_0^{10} (500 - 5t^2)dt = \left(500t - \frac{5}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{10000}{3} \text{ (đơn vị lợi nhuận).}$$

3.7. *Phân phối thu nhập trong cộng đồng dân cư* (Biernacki, 2010; Popova, 2021)

Đường cong Lorenz là đồ thị của hàm số $y = f(x), 0 \le x \le 1$ trong đó $f(x)$ xác định tỉ lệ của tổng thu nhập được nhận bởi tổng số người có thu nhập ít nhất chiếm 100x% dân số như hình 1. Hàm số $f(x)$ có các tính chất sau đây:

- $0 \le f(x) \le 1,$
- $f(0) = 0, f(1) = 1,$
- $f(x) \le x.$



Hình 1. *Đường cong Lorenz*

Lưu ý:

+ Đường cong Lorenz biểu thị sự bất bình đẳng trong phân phối thu nhập của xã hội và nó luôn nằm phía dưới đường nghiêng 45^0.

+ Nếu tất cả các hộ gia đình có thu nhập bằng nhau thì đường cong Lorenz trùng với đường phân giác $y = x$ và được gọi là "đường bình đẳng tuyệt đối". Đường cong Lorenz thường được thể hiện kèm theo chỉ số Gini.

Chỉ số Gini hay còn gọi là hệ số bất bình đẳng được xác định bởi

$$G = \frac{M}{M+N} = \frac{M}{0.5} = 2M,$$

trong đó M là diện tích của miền nằm giữa đường cong Lorenz và đường bình đẳng tuyệt đối (màu xanh) và N là diện tích của miền phía dưới đường cong Lorenz (màu cam). Như vậy

$$G = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx, \tag{5}$$

trong đó $y = f(x)$ là phương trình của đường cong Lorenz.

Ví dụ 3.12. Giả sử $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ là phương trình của đường cong Lorenz biểu diễn phân phối thu nhập của một quốc gia trong năm 2020 và dự đoán đến năm 2025 sẽ là $g(x) = x^2$. Hãy nhận xét về sự bình đẳng trong phân phối thu nhập của quốc gia trong 2 năm này.
Giải. Áp dụng công thức (5), ta tính được chỉ số Gini năm 2020 là

$$G_1 = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx = 2\int_0^1 [x - x^{\frac{5}{2}}]dx = 2\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{7}.$$

Chỉ số Gini năm 2025 là

$$G_2 = 2\int_0^1 [x - g(x)]dx = 2\int_0^1 [x - x^2]dx = 2\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Vì $G_2 < G_1$ nên sự phân phối thu nhập trong năm 2025 công bằng hơn so với năm 2020.

3.8. *Phân phối thu nhập*

Cho một cộng đồng dân cư có *n* người trong đó hàm mật độ thu nhập liên tục cho những người có mức thu nhập $r \in [a,b]\ (a,b > 0)$ là $f(r) = \frac{B}{r^\beta}\ (B > 0, \beta > 0).$ Tỉ lệ cư dân có mức thu nhập trong $[a,b]$ là $\int_a^b f(r)dr$. Tổng số cư dân có thu nhập trong $[a,b]$ là $N = n\int_a^b f(r)dr.$ Tổng thu nhập của các cư dân với mức thu nhập trong $[a,b]$ là $M = n\int_a^b r.f(r)dr.$ Thu nhập trung bình của cư dân với mức thu nhập trong $[a,b]$ là

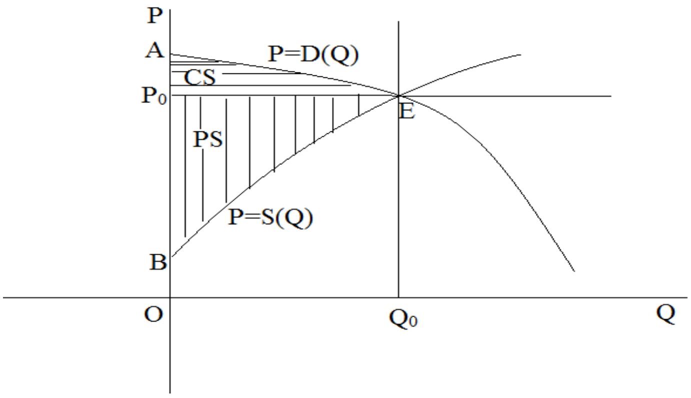
$$m = \frac{M}{N} = \frac{\int_a^b r.f(r)dr}{\int_a^b f(r)dr}. \quad (6)$$

Ví dụ 3.13. Xét một cộng đồng dân cư có *n* người trong đó hàm mật độ thu nhập cho những người có mức thu nhập $r \in [10,20]$ (đơn vị tính: triệu đồng) là $f(r) = \frac{2}{r^{2,5}}$. Tính thu nhập trung bình của nhóm cư dân có mức thu nhập như trên.
Giải. Áp dụng công thức (6), ta tính được thu nhập trung bình của nhóm cư dân có mức thu nhập $r \in [10,20]$ là

$$m=\frac{M}{N}=\frac{\int_{10}^{20} r.\frac{2}{r^{2,5}}dr}{\int_{10}^{20}\frac{2}{r^{2,5}}dr}=\frac{2r^{-0,5}\Big|_{10}^{20}}{\frac{2}{3}r^{-1,5}\Big|_{10}^{20}}=\frac{60}{7}\left(3-\sqrt{2}\right)\approx 13,6.$$

Vậy thu nhập trung bình của nhóm dân cư có mức thu nhập từ 10 triệu đồng đến 20 triệu đồng là khoảng 13,6 triệu đồng.

3.9. Thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng (Biernacki, 2010; Bradley, 2013; Popova, 2021)



Hình 2. *Thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng*

Giả sử $P=D(Q)$ và $P=S(Q)$ lần lượt là hàm cầu ngược và hàm cung ngược của một loại sản phẩm trên thị trường. Gọi $E(Q_0,P_0)$ là điểm cân bằng của thị trường. Khi đó hàng hóa được bán với mức giá P_0 trên thị trường.

Thặng dư của người tiêu dùng chính là phần chênh lệch giữa khoản mà người tiêu dùng đáng lẽ phải bỏ ra và khoản thực tế họ bỏ ra khi tiêu thụ mức sản lượng cân bằng Q_0. Do đó nó được tính bằng diện tích tam giác cong AEP_0 (hình 2) như sau

$$CS=\int_0^{Q_0} D(Q)dQ-P_0Q_0. \tag{7}$$

Thặng dư của nhà sản xuất chính là phần chênh lệch giữa khoản mà nhà sản xuất nhận được thực tế và khoản mà đáng lẽ họ chỉ nhận được khi cung ứng mức sản lượng cân bằng Q_0 . Do đó nó được tính bằng diện tích tam giác cong BEP_0 (Hình 2) như sau

$$PS=P_0Q_0-\int_0^{Q_0} S(Q)dQ. \tag{8}$$

Khi đó tổng phúc lợi xã hội là $CS+PS$.

Ví dụ 3.14. Một loại sản phẩm có hàm cầu $P=D(Q)=18-Q^2$ và hàm cung $P=S(Q)=3+2Q$. Tính thặng dư của người tiêu dùng, thặng dư của nhà sản xuất khi thị trường cân bằng và tổng phúc lợi xã hội.

Giải. Điểm cân bằng thị trường $\left(P_0, Q_0\right)$ được xác định bởi

$$P_0 = 18 - Q_0^2 = 3 + 2Q_0 \Rightarrow Q_0^2 + 2Q_0 - 15 = 0 \Rightarrow Q_0 = 3, P_0 = 9.$$

Áp dụng công thức (7), ta có thặng dư của người tiêu dùng là

$$CS = \int_0^{Q_0} D(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^3 \left(18 - Q^2\right)dQ - 27 = \left(18Q - \frac{Q^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 - 27 = 18.$$

Áp dụng công thức (8), ta có thặng dư của nhà sản xuất là

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S(Q)dQ = 27 - \int_0^3 \left(3 + 2Q\right)dQ = 27 - \left(3Q + Q^2\right)\Big|_0^3 = 9.$$

Khi đó ta có tổng phúc lợi xã hội là: $CS + PS = 18 + 9 = 27.$

3.10. Giá trị hiện tại và giá trị tương lai của dòng tiền (Cao et al., 2019)

Cho $f(t)$ là tốc độ gửi tiền vào một tài khoản tại thời điểm *t* trong suốt khoảng thời gian $[0, T]$ và nhận lãi suất mỗi năm là *r* được ghép liên tục.

Giá trị tương lai của dòng tiền này sau *T* năm là tổng giá trị tích lũy được sau thời gian *T*, được tính bởi $FV = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}dt.$ (9)

Giá trị hiện tại của dòng tiền này sau *T* năm là số tiền bây giờ phải gửi vào tài khoản để sau thời gian *T* thu được số tiền bằng với giá trị tương lai của nó, được tính bởi

$$PV = \frac{FV}{e^{rT}} = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt. \quad (10)$$

Nếu đây là dòng thu nhập vĩnh cửu thì giá trị tương lai và giá trị hiện tại của nó xác định bởi $PV = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-rt}dt.$ (11)

Ví dụ 3.15. Cho $f(t) = e^{-0,05t}$ là tốc độ gửi tiền vào một tài khoản tại thời điểm *t* trong suốt khoảng thời gian 5 năm và nhận được lãi suất hàng năm là 7% được ghép liên tục.

a) Tính giá trị tương lai và giá trị hiện tại của dòng tiền trên.

b) Nếu đây là dòng thu nhập vĩnh cửu thì giá trị hiện tại của dòng tiền đó là bao nhiêu?

Giải.

a) Áp dụng công thức (9), ta có giá trị tương lai của dòng tiền trên $[0, 5]$ là

$$FV = \int_0^5 f(t)e^{r(5-t)}dt = \int_0^5 e^{-0,05t}e^{0,07(5-t)}dt$$

$$= e^{0,35}\int_0^5 e^{-0,12t}dt = e^{0,35}.\frac{e^{-0,12t}}{-0,12}\Bigg|_0^5 = \frac{e^{0,35}(1 - e^{-0,6})}{0,12} \approx 5,34.$$

Từ công thức (10), ta có giá trị hiện tại của dòng tiền trên [0, 5] là

$$PV = \frac{FV}{e^{rT}} = \frac{1-e^{-0,6}}{0,12} \approx 3,76.$$

b) Nếu đây là dòng thu nhập vĩnh cửu thì từ công thức (11), giá trị hiện tại của nó là

$$PV = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-rt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-0,05t}e^{-0,07t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-0,12t}dt = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{e^{-0,12t}}{-0,12}\right|_0^n = -\frac{1}{0,12}.\lim_{n\to\infty}\left(e^{-0,12n}-1\right) = \frac{25}{3} \approx 8,33.$$

3.11. *Tính giá trị trung bình* (Biernacki, 2010)

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a,b]$. Khi đó giá trị trung bình của $f(x)$ trên $[a,b]$ được xác định bởi $AV = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. (12)

Ví dụ 3.16. Trong kì kinh doanh 3 năm, chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm tại thời điểm *t* (đơn vị tính là tháng) được cho bởi $C(t) = 0,06t^2 + 0,1t + 1 \ (USD)$. Tính chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm trong kì kinh doanh.

Giải. Áp dụng công thức (12), ta có chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm trong kì kinh doanh 3 năm là

$$AC = \frac{1}{36}\int_0^{36} C(t)dt = \frac{1}{36}\int_0^{36}\left(0,06t^2+0,1t+1\right)dt = \frac{1}{36}.\left.\left(0,02t^3+0,05t^2+t\right)\right|_0^{36} = \frac{718}{25}\left(USD\right).$$

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã khảo sát một số ứng dụng trong kinh tế sử dụng công cụ tích phân để giải quyết. Bài báo nghiên cứu này giúp cho giảng viên và sinh viên ngành kinh tế hiểu sâu và rộng hơn về việc sử dụng tích phân trong các bài toán kinh tế nói riêng và các bài toán khác trong thực tiễn nói chung. Qua bài báo này, sinh viên được khơi gợi tính ham hiểu biết để có thể học tập và nghiên cứu về các lĩnh vực khác của Toán học trong các môn học Toán Kinh tế. Trong thời gian tới, chúng tôi dự định nghiên cứu thêm các mô hình ứng dụng khác của tích phân trong kinh tế cũng như các mô hình ứng dụng tích phân trong sinh học, vật lí, kĩ thuật.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Các tác giả cảm ơn sự tài trợ của Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Biernacki, M. (2010). Applications of the integral in economics: A few simple examples for first – year students, *Didactics of Mathematics*, *7*(11), 5-14.

Bradley, T., (2013). *Essential Mathematics for Economics and Business* (4th ed.). John Wiley& Sons, LTD.

Cao, H. T., Tran, K. N, & Nguyen. N. V. U. (2019). *Toan ung dung trong quan tri kinh doanh va kinh te*, [*Applied Mathematics in business administration and Economics*]. Science and Technics Publishing House.

Chiang, A. C.(1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (3rd ed.). McGraw - Hill, Inc.

Le, D. T. (2010). *Toan cao cap cho cac nha kinh te, Phan II: Giai tich Toan hoc* [*Advanced Mathematics for Economists, Part II: Mathematical Analysis*]. National Economics University Publishing House.

Le, Q. H. N., & Hoang, D. H.(2008). *Giao trinh Toan cao cap* (*phan Giai tich*) [*Advanced Mathematics, Part: Calculus*]. Statistical Publishing House.

Popova D. V (2021). Applications of the definite integral to economics. *POLIT. Challenges of science today,* 5-9 April, 1-2.

Stewart, J. (2015). *Calculus*. (8th ed.). Cengage Learning.

APPLYING INTEGRATION IN TEACHING ECONOMICS MODELS FOR ECONOMICS STUDENTS

Nguyen Quang Huy*, Le Thi Thanh Hai

Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Quang Huy – Email: huynq@hcmute.edu.vn

Received: March 25, 2024; Revised: June 07, 2024; Accepted: September 16, 2024

ABSTRACT

Integration is a powerful mathematical tool widely used to solve various problems, particularly in the field of economics. With the increasing number of economics students, it is essential to develop accessible references that support their study and research in Economic Mathematics taught at the university level. In this paper, we present a summary of economic models that utilize integration for problem-solving. For each model, we will present the concept and characteristics and provide examples with specific data and detailed solutions. We aim for these results to aid economics students in comprehending the applications of integration, not only within economics but also in addressing other real-world problems.

Keywords: Definite Integral; Improper Integral; Indefinite Integral; Marginal; Mathematical economics models