TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 16, Số 12 (2019): 982-992

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 16, No. 12 (2019): 982-992

ISSN: 1859-3100

Website: http://journal.hcmue.edu.vn

Bài báo nghiên cứu

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH *P*-LAPLACE VỚI DỮ LIỆU ĐỘ ĐO TRONG KHÔNG GIAN MARCINKIEWICZ

Nguyễn Thành Nhân, Lê Đức Việt*
Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh
**Tác giả liên hệ: Nguyễn Thành Nhân – Email: nhannt@hcmue.edu.vn*
Ngày nhận bài: 04-6-2019; ngày nhận bài sửa: 21-6-2019; ngày duyệt đăng: 30-10-2019

TÓM TẮT

Trong báo cáo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình p-Laplace với dữ liệu độ đo trong không gian Marcinkiewicz. Ý tưởng chính của chứng minh là dựa vào định lí điểm bất động Schauder cho một ánh xạ liên tục, xác định trên một tập lồi, đóng, có ảnh là tập tiền compact. Để xây dựng ánh xạ thỏa các tính chất này, chúng tôi áp dụng một số đánh giá gradient của nghiệm phương trình elliptic tựa tuyến tính với dữ liệu độ đo, được nghiên cứu trong một vài bài báo gần đây.

Từ khóa: nghiệm renormalized; không gian Marcinkiewicz; phương trình *p*-Laplace

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm renormalized cho phương trình *p*-Laplace có dạng như sau

$$\begin{cases} -\Delta_p u = b(x)|\nabla u|^q + \mu, & x \in \Omega, \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

với Ω là một tập mở bị chặn của $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) và μ là một độ đo Radon hữu hạn trong Ω; *b* là hàm đo được và bị chặn trên Ω; với Δ_p là toán tử *p*-Laplace $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, tham số $p > 1$ và $p - 1 < q \leq p$.

Phương trình (1) được biết đến như một mô hình mô phỏng lí thuyết tăng trưởng trên bề mặt trong Vật lí, được đưa ra bởi (Kardar, Parisi, & Zhang, 1986). Ngoài ra, phương trình này còn có thể xem là dạng ổn định của phương trình độc lập thời gian Hamilton-Jacobi. Dạng tổng quát hơn của phương trình này chính là phương trình dạng Riccati tựa tuyến tính, được khảo sát bởi một số nhà toán học như Mengesha, Martio và Nguyen trong các bài báo (Mengesha, & Nguyen 2016), (Martio, 2011) và (Nguyen, 2014). Trong đó, các tác giả

Cite this article as: Nguyen Thanh Nhan, & Le Duc Viet (2019). Existence of a renormalized solution to the *p*-Laplace equation with measure data in Marcinkiewicz spaces. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 16*(12), 982-992.

chứng minh sự tồn tại nghiệm renormalized của phương trình dạng Riccati tựa tuyến tính với một số giả thiết khác nhau của miền Ω và các tham số *p, q*.

Chứng minh sự tồn tại nghiệm renormalized của phương trình *p*-Laplace (1) dựa trên một số đánh giá gradient của phương trình elliptic tựa tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A\left(x,\nabla u\right)\right) = \mu, & x\in\Omega, \\ \qquad u \qquad = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó, đó *A* là toán tử tựa tuyến tính Caratheodory thỏa hai điều kiện sau

$$A\left(x,y\right)\le c_1\left|y\right|^{p-1},$$

$$\left\langle A\left(x,y\right)-A\left(x,z\right),y-z\right\rangle \ge c_2\left(\left|y\right|^2+\left|z\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|y-z\right|^2,$$

với c_1, c_2 là hai hằng số, *x, y, z* thuộc R^n. Liên quan đến bài toán đánh giá gradient của phương trình (2), có khá nhiều kết quả được công bố gần đây, với những giả thiết khác nhau của toán tử *A*, miền Ω và tham số *p*. Chẳng hạn như bài báo (Nguyen, 2014) đánh giá trên miền Reifenberg khi *A* có chuẩn *BMO* nhỏ, bài báo (Tran, 2019) đánh giá trên miền *p*-capacity trong không gian Lorentz, bài báo (Tran & Nguyen, 2019) đánh giá trên miền *p*-capacity trong không gian Morrey-Lorentz cho trường hợp $\frac{3n-2}{2n-1}<p\le 2-\frac{1}{n}$ ….

Chứng minh về sự tồn tại nghiệm renormalized của phương trình dạng Riccati tương ứng cũng được các tác giả nghiên cứu như một ứng dụng của đánh giá gradient. Tiếp tục chuỗi nghiên cứu này, chúng tôi áp dụng kết quả đánh giá gradient của nghiệm phương trình (2) trong bài báo gần đây (Tran, 2019) trong trường hợp kì dị $\frac{3n-2}{2n-1}<p\le 2-\frac{1}{n}$ để chứng minh được sự tồn tại nghiệm renormalized của phương trình (1) trong không gian Marcinkiewicz, còn được gọi là không gian L^p yếu. Kết quả chính của bài báo được phát biểu trong định lí sau đây.

Định lí 1.1.

Cho $n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn có phần bù thỏa mãn điều kiện p-capacity và b là hàm đo được, bị chặn trên Ω. Giả sử rằng

$$\frac{3n-2}{2n-1}<p\le 2-\frac{1}{n}, \qquad \text{và} \qquad p-1+\frac{1}{n}<q\le p-1+\frac{p(p-1)}{n}. \tag{3}$$

Khi đó, tồn tại $\delta_0>0$ sao cho nếu độ đo Radon hữu hạn μ thỏa $|||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}\le\delta_0$, thì phương trình (1) có ít nhất một nghiệm renormalized u thỏa đánh giá

$$|||\nabla u|||^q_{L^{qs,\infty}(\Omega)}\le c_*\left(\delta_0-|||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right), \tag{4}$$

trong đó $s=\frac{n(q-p+1)}{q}$ và c_* là hằng số không phụ thuộc vào u.

Chúng tôi nhấn mạnh rằng phương trình (1) không phải là dạng đặc biệt của phương trình dạng Riccati được nghiên cứu trong (Tran, & Nguyen, 2019) do sự xuất hiện của hàm đo được b ở vế phải. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ ra rằng ta vẫn chứng minh được sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) với cùng ý tưởng. Chúng tôi nhận xét rằng chứng minh này so với chứng minh trong (Tran, & Nguyen, 2019) không có sự khác biệt về phương pháp, mà chỉ cần một số đánh giá kĩ thuật cụ thể khi đánh giá chuẩn trong không gian Marcinkiewicz.

Trong chứng minh định lí chính, chúng tôi kế thừa một số kết quả trong những bài báo gần đây có chứa một vài khái niệm như nghiệm renormailzed và điều kiện p-capacity. Chúng tôi không trình bày lại định nghĩa chi tiết để tránh sự phức tạp không cần thiết cho bài báo. Các khái niệm này có thể đọc trong nhiều tài liệu tham khảo như (Maso et al., 1999) và (Tran, 2019).

2. Không gian Marcinkiewicz

Trước hết, chúng tôi nhắc lại định nghĩa và một số tính chất đã biết của không gian Marcinkiewicz. Mặc dù các tính chất này là không mới và xuất hiện trong nhiều tài liệu tham khảo, nhưng chúng tôi vẫn trình bày chi tiết chứng minh của các tính chất này trong bài báo nhằm tạo sự liền mạch của bài viết và thuận lợi cho người đọc.

Định nghĩa 2.1.

Với mỗi $0 < s < \infty$, không gian Marcinkiewicz $L^{s,\infty}(\Omega)$, hay còn gọi là không gian L^p yếu, là tập hợp các hàm f đo được Lebesgue trên Ω sao cho $\| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)} < +\infty$, trong đó

$$\| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)} := \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x \in \Omega : \left|f(x)\right| > \lambda\right\}\right|^{\frac{1}{s}},$$

với kí hiệu $|W|$ là độ đo Lebesgue của một tập đo được $W \subset \mathbb{R}^n$.

Liên hệ giữa không gian Marcinkiewicz và không gian Lebesgue thể hiện như sau: với $1 < r < s < \infty$ ta có $L^s(\Omega) \subset L^{s,\infty}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$. Liên hệ này có thể được suy ra từ Bổ đề 2.2 tiếp theo.

Bổ đề 2.2.

Cho Ω là một tập con của $\mathbb{R}^n$ và $E \subset \Omega$ đo được sao cho $|E| > 0$. Khi đó, với $0 < r < s < \infty$, ta có đánh giá

$$\int_E | f(x)\} |^r \, dx \le \frac{s}{s-r} | E |^{1-\frac{r}{s}} \| f \|^r_{L^{s,\infty}(\Omega)}.$$

Chứng minh: Đầu tiên, từ định nghĩa tựa chuẩn trong không gian Marcinkiewicz, ta có

$$\|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda^s \left|\left\{x \in \Omega : \left|f(x)\right| > \lambda\right\}\right| \ge \alpha^s \left|\left\{x \in \Omega : \left|f(x)\right| > \alpha\right\}\right|.$$

Từ đó suy ra

$$\alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)} \ge \left|\left\{x \in E : \left|f(x)\right| > \alpha\right\}\right|.$$

Ngoài ra, hiển nhiên $\left|\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right| \le |E|$. Do đó, ta thu được đánh giá sau đây

$$\left|\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right| \le \min\left\{|E|, \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right\}.$$

Mặt khác, với chú ý rằng

$$|E| \le \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)} \Leftrightarrow |E|^{\frac{1}{s}} \|f\|^{-1}_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \le |E|^{-\frac{1}{s}} \|f\|_{L^{s,\infty}(\Omega)},$$

ta suy ra được

$$\min\left\{|E|, \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right\} = \begin{cases} |E| & , 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}, & \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, với mỗi $\alpha_0 > 0$, ta thu được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
\int_E | f(x)\} |^r \, dx &= r\int_0^\infty \alpha^{r-1} \left|\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
&= r\int_0^{\alpha_0} \alpha^{r-1} \left|\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha + r\int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{r-1} \left|\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
&\le r\int_0^{\alpha_0} \alpha^{r-1} \min\left\{|E|, \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right\} d\alpha + r\int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{r-1} \min\left\{|E|, \alpha^{-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right\} d\alpha \\
&= r\int_0^{\alpha_0} \alpha^{r-1} |E| \, d\alpha + r\int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{r-1-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)} \, d\alpha \\
&= \alpha_0^r |E| + \frac{r}{s-r} \alpha_0^{r-s} \|f\|^s_{L^{s,\infty}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bằng cách chọn $\alpha_0 = |E|^{-\frac{1}{s}} \|f\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ trong đánh giá trên, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Ngoài ra, nhận xét rằng $\|\,.\,\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ trong Định nghĩa 2.1 ở trên chỉ là một tựa chuẩn trong không gian $L^{s,\infty}(\Omega)$, do không thỏa bất đẳng thức tam giác trong trường hợp tổng quát. Điều này không bảo đảm được tính lồi của các tập bị chặn theo tựa chuẩn này. Để giải quyết khó khăn này, chúng tôi xét một chuẩn khác $|||\,.\,|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ trong không gian $L^{s,\infty}(\Omega)$. Điều thú vị ở đây là chuẩn mới được xét là tương đương với tựa chuẩn trong Định nghĩa 2.1. Việc chứng minh $|||\,.\,|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ là chuẩn trong không gian $L^{s,\infty}(\Omega)$ là rất dễ dàng.

Mệnh đề 2.3.

Trên không gian $L^{s,\infty}(\Omega)$ với $s > 1$ ta định nghĩa

$$|||f|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} := \sup_{0<|E|, E\subset\Omega} \left(|E|^{-1+\frac{1}{s}} \int_E |f(x)| \, dx \right).$$

Khi đó, $|||\,.\,|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ *là một chuẩn trên* $L^{s,\infty}(\Omega)$.

Bổ đề 2.4.

Cho Ω *là một tập con của* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó với mọi* $s \in (1;\infty)$ *và* $f \in L^{s,\infty}(\Omega)$ *ta có*

$$\| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le ||| f |||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le \frac{s}{s-1} \| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)}.$$

Chứng minh: Với mỗi số thực $\alpha > 0$, xét tập $E = \{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}$.

Khi đó, ta có $||| f |||_{L^{s,\infty}(\Omega)} = \sup\limits_{0<|E|, E\subset\Omega} \left(|E|^{-1+\frac{1}{s}} \int_E | f(x) | \, dx \right) \ge |E|^{-1+\frac{1}{s}} \int_E | f(x) | \, dx$.

Mặt khác, $\int_E | f(x) | \, dx = \int_{\{x\in\Omega : |f(x)|>\alpha\}} | f(x) | \, dx \ge \alpha \left| \{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\} \right| = \alpha |E|$.

Từ đó, với mọi $\alpha > 0$, ta có đánh giá sau đây

$$||| f |||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \ge |E|^{-1+\frac{1}{s}} \alpha |E| = \alpha |E|^{\frac{1}{s}} = \alpha \left| \{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\} \right|^{\frac{1}{s}}.$$

Đánh giá này dẫn đến $||| f |||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \ge \sup\limits_{\alpha>0} \alpha \left| \{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\} \right|^{\frac{1}{s}} = \| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)}$.

Bất đẳng thức $||| f |||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le \frac{s}{s-1} \| f \|_{L^{s,\infty}(\Omega)}$ có được từ bằng cách áp dụng Bổ đề 2.2 với $r = 1 < s$, và $E = \{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}$ với mọi $\alpha > 0$. □

Tiếp theo, trước khi bắt đầu chứng minh kết quả chính, chúng tôi trích dẫn lại một số đánh giá gradient trong một số bài báo gần đây. Tổng hợp các kết quả này, chúng tôi đưa ra Hệ quả 2.7, là cơ sở chính cho chứng minh của Định lí 1.1.

Định lí 2.5. (Tran, 2019)

Cho $n \ge 2$, $p \in \left(\frac{3n-2}{2n-1}, n \right]$ *và* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *là một miền bị chặn có phần bù thỏa mãn điều kiện p-capacity. Khi đó tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi nghiệm renormalized u cho* (2) *với độ đo Radon hữu hạn* μ, $s \in (0, p]$ *và* $t \in (0,\infty]$, *ta có*

$$\| \nabla u \|_{L^{s,t}(\Omega)} \le C \left\| [M_1(\mu)]^{\frac{1}{p-1}} \right\|_{L^{s,t}(\Omega)},$$

trong đó, M₁ là hàm cực đại với hệ số không nguyên của độ đo hữu hạn μ, *được định nghĩa bởi*

$$M_1(\mu)(\mathrm{x}) = \sup_{R>0} \frac{|\mu|(B_R(x))}{R^{n-1}}, \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

với $B_R(x)$ *là kí hiệu của quả cầu tâm x bán kính R.*

Bổ đề 2.6. (Maso et al., 1999)

Cho 1 < s < n và μ *là một độ đo Radon hữu hạn trên* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó tồn tại hằng số* $C = C(n,s) > 0$ *sao cho*

$$\| M_1[\mu] \|_{L^{\frac{ns}{n-s},\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C \| \mu \|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Hệ quả 2.7.

Dưới giả thiết của Định lí 2.5 và Bổ đề 2.6, giả sử thêm rằng $\frac{ns}{n-s} \le p$. *Khi đó, tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi nghiệm renormalized u của (2), cho trước độ đo* μ *và với* $q > 0$ *ta có*

$$\| |\nabla u|^q \|_{L^{\frac{s(p-1)n}{q(n-s)},\infty}(\Omega)} \le C \|\mu\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}.$$

Chứng minh:

Đầu tiên, từ định nghĩa tựa chuẩn trong không gian Marcinkiewicz, ta có thể viết lại $\| |f|^q \|_{L^{\frac{s(p-1)n}{q(n-s)},\infty}(\Omega)} = \| |f| \|^q_{L^{\frac{s(p-1)n}{(n-s)},\infty}(\Omega)}$.

Từ Định lí 2.5, tồn tại $C_1 > 0$ sao cho với mọi nghiệm renormalized *u* của phương trình (2) với dữ liệu là độ đo Radon hữu hạn μ, $s \in (0,p]$ ta có

$$\| |\nabla u| \|^q_{L^{\frac{s(p-1)n}{(n-s)},\infty}(\Omega)} \le C_1^q \left\| [M_1(\mu)]^{\frac{1}{p-1}} \right\|^q_{L^{\frac{s(p-1)n}{(n-s)},\infty}(\Omega)}. \tag{5}$$

Từ đó suy ra $\left\| [M_1(\mu)]^{\frac{1}{p-1}} \right\|_{L^{\frac{s(p-1)n}{(n-s)},\infty}(\Omega)} = \| [M_1(\mu)] \|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{sn}{(n-s)},\infty}(\Omega)}$.

Theo Bổ đề 2.6, tồn tại $C_2 > 0$ sao cho

$$\| M_1[\mu] \|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{ns}{n-s},\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_2^{\frac{1}{p-1}} \| \mu \|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)}. \tag{6}$$

Kết hợp (5) và (6) ta thu được

$$| |\nabla u| \|^q_{L^{\frac{s(p-1)n}{(n-s)},\infty}(\Omega)} \le C_1^q C_2^{\frac{1}{p-1}} \| \mu \|^{\frac{q}{p-1}}_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Với hằng số $C = C_1^q C_2^{\frac{1}{p-1}}$, ta có điều phải chứng minh. □

3. Chứng minh Định lí 1.1

Trong toàn bộ mục này, chúng tôi trình bày chi tiết chứng minh của Định lí 1.1. Chứng minh này bao gồm bốn bước, với ý tưởng chính là áp dụng định lí điểm bất động Schauder cho một ánh xạ liên tục *T*, đi từ một tập lồi, đóng vào chính nó và có ảnh là tập tiền compact.

Cụ thể, trong bước đầu tiên, chúng tôi sẽ xây dựng một tập V_λ lồi, đóng ứng với tôpô mạnh của không gian Sobolev $W_0^{1,1}(\Omega)$. Tính lồi của tập hợp này thu được nhờ chuẩn trong không gian Marcinkiewicz được giới thiệu trong Mệnh đề 2.3. Trong bước chứng minh thứ hai, chúng tôi sẽ xây dựng một ánh xạ *T* đi từ tập hợp V_λ vào chính nó. Sự xác định của ánh xạ này được chứng minh nhờ Hệ quả 2.7. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh tính liên tục và tập ảnh của V_λ qua ánh xạ *T* là tiền compact ở bước thứ ba. Cuối cùng, sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) thu được bằng cách áp dụng định lí điểm bất động Schauder cho ánh xạ *T*.

Chứng minh Định lí 1.1:

Bước 1. Với mỗi $\lambda > 0$, xét tập hợp

$$V_\lambda = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \||\nabla u\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \le \lambda\right\}.$$

Trước hết, ta chứng minh rằng V_λ là tập đóng trong tôpô mạnh $W_0^{1,1}(\Omega)$. Xét $\{u_k\}_{k\in N}$ là một dãy hàm trong V_λ mà hội tụ trong $W_0^{1,1}(\Omega)$ đến hàm u. Ta cần chứng minh $u \in V_\lambda$. Lấy E là một tập con của Ω sao cho $|E| > 0$, do $\||\nabla u_k\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \le \lambda,\ \forall k \in \mathbb{N}$ nên ta suy ra

$$\begin{aligned} |E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla u_k(x)|\,dx &\le \sup_{0<|E|, E\subset\Omega} \left(|E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla u_k(x)|\,dx \right) \\ &= \||\nabla u_k\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \le \lambda, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vì ∇u_k hội tụ về ∇u hầu khắp nơi nên từ theo định lí hội tụ bị chặn Fatou ta có

$$|E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla u(x)|\,dx \le \lambda.$$

Vì vậy, $\||\nabla u\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} = \sup_{0<|E|, E\subset\Omega} \left(|E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla u(x)|\,dx \right) \le \lambda,$ hay $u \in V_\lambda$. Trong chứng minh trên, ta lưu ý rằng với giả thiết (3) của Định lí 1.1, ta suy ra được $n(q-p+1) > 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh V_λ là tập lồi. Với mọi $u, v \in V_\lambda$ và $t \in [0,1]$ ta cần chỉ ra $w = tu + (1-t)v \in V_\lambda$. Gọi E là một tập con của Ω sao cho $|E| > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} |E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla w(x)|\,dx &\le |E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \left(t\int_E |\nabla u(x)|\,dx + (1-t)\int_E |\nabla v(x)|\,dx \right) \\ &\le t\||\nabla u\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} + (1-t)\||\nabla v\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \\ &\le t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda. \end{aligned}$$

Suy ra $\||\nabla w\||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} = \sup_{0<|E|, E\subset\Omega} \left(|E|^{-1+\frac{1}{n(q-p+1)}} \int_E |\nabla w(x)|\,dx \right) \le \lambda,$ hay $w \in V_\lambda$.

Bước 2. Với mỗi $v \in V_\lambda$, gọi *u* là một nghiệm renormalized duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} -\Delta_p u = b(x)|\nabla v|^q + \mu, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Ta định nghĩa $T : V_\lambda \to V_\lambda$ xác định bởi $T(v) = u.$ Ta sẽ chứng minh tồn tại $\delta_0 > 0$ và $\lambda_0 > 0$ sao cho nếu $|||\mu|||_{L^{\frac{n(q-p+1)}{q},\infty}(\Omega)} \le \delta_0$, thì *T* được định nghĩa như trên là một ánh xạ.

Đầu tiên, về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm renormalized của phương trình (7) có thể tham khảo trong (Maso el al., 1999). Do đó, phép đặt $T(v) = u$ là xác định. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $T(v) = u \in V_\lambda$ với mỗi $v \in V_\lambda$.

Đặt $s = \dfrac{n(q-p+1)}{q}$, từ giả thiết (3) ta suy ra được $s > 1$. Áp dụng Hệ quả 2.7, tồn tại $C_1 > 0$ để với mọi nghiệm renormalized *u* của (2), ta có

$$\| |\nabla u|^q \|_{L^{\frac{s(p-1)n}{q(n-s)},\infty}(\Omega)} \le C_1 \|\mu\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}.$$

Dễ thấy từ $s = \dfrac{n(q-p+1)}{q}$ ta có $\dfrac{s(p-1)n}{q(n-s)} = s$. Vậy,

$$\| |\nabla u|^q \|_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le C_1 \|\mu\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}. \tag{8}$$

Ta có $\| |\nabla u|^q \|_{L^{s,\infty}(\Omega)} = \| |\nabla u| \|_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^q \ge \dfrac{s}{s-1} ||| |\nabla u| |||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^q = \dfrac{s}{s-1} |||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^q$, được suy ra từ Bổ đề 2.4. Mặt khác, cũng áp dụng Bổ đề 2.4, ta có $C_1 \|\mu\|_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}} \le C_1 |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}$.

Vậy từ (8) ta suy ra $\dfrac{s}{s-1} |||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^q \le C_1 |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}$ hay một dạng tương đương

$$|||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^{p-1} \le \left(\frac{sC_1}{s-1}\right)^{\frac{p-1}{q}} |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}.$$

Khi đó, tồn tại hằng số $C = \left(\dfrac{sC_1}{s-1}\right)^{\frac{p-1}{q}} > 0$ sao cho

$$|||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^{p-1} \le C |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}, \tag{9}$$

với mọi nghiệm renormalized *u* của (2).

Mặt khác, do *b* là hàm bị chặn nên tồn tại hằng số *K* sao cho $|b(x)| \le K,\ \forall x \in \Omega$. Để chứng minh $u \in V_{\lambda_0}$, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho nếu $|||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \le \delta_0$, thì phương trình $\left(\frac{sK}{s-1}Ct + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}C\right)^{\frac{q}{p-1}} = t$ có ít nhất một nghiệm $t_0 > 0$. Thật vậy, xét hàm số thực một biến sau

$$f(t) = \left(\frac{sK}{s-1}Ct + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}C\right)^{\frac{q}{p-1}} - t, \quad t \geq 0,$$

Với chú ý rằng $f(0) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ và phương trình $f'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm $t^* > 0$ thỏa

$$f(t^*) = |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} - \delta_0,$$

trong đó $\delta_0 > 0$ là hằng số không phụ thuộc vào $|||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}$. Vậy hàm f có một nghiệm $t_0 \in (0, t^*]$ nếu $|||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \leq \delta_0$. Nói cách khác, tồn tại số thực $t_0 > 0$ sao cho:

$$\frac{sK}{s-1}Ct_0 + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}C = t_0^{\frac{p-1}{q}}.$$

Với $\lambda_0 = t_0^{\frac{1}{q}}$, từ định nghĩa của T, với mỗi $v \in V_{\lambda_0}$, $u = T(v)$ là nghiệm renormalized duy nhất của phương trình (7). Áp dụng đánh giá (9) và Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}
|||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^{p-1} &\leq C\,|||\,b(x)|\nabla v|^q + \mu\,|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \leq C\,|||b(x)|\nabla v|^q||| + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)} \\
&\leq C\left(\frac{sK}{s-1}\|\nabla v\|_{L^{qs,\infty}(\Omega)}^q + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\frac{sK}{s-1}\lambda_0^q + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right) \\
&= C\left(\frac{sK}{s-1}t_0 + |||\mu|||_{L^{s,\infty}(\Omega)}\right) = t_0^{\frac{p-1}{q}} = \lambda_0^{p-1}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $|||\nabla u|||_{L^{qs,\infty}(\Omega)} \leq \lambda_0$, tức là $u \in V_{\lambda_0}$. Do đó $T: V_\lambda \to V_\lambda$ là một ánh xạ.

Bước 3. Ta sẽ chứng minh ánh xạ $T: V_{\lambda_0} \to V_{\lambda_0}$ là ánh xạ liên tục, và tập $\overline{T(V_{\lambda_0})}$ là compact ứng với topo mạnh $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Trước hết, ta chứng minh T là liên tục dưới topo mạnh $W_0^{1,1}(\Omega)$. Giả sử $\{v_k\}_{k\in N}$ là một dãy trong V_{λ_0} sao cho v_k hội tụ trong $W_0^{1,1}(\Omega)$ về $v \in V_{\lambda_0}$. Với mọi $k \in N$, $u_k = T(v_k)$ là nghiệm renormalized của phương trình

$$\begin{cases} -\Delta_p u_k = b(x)|\nabla v_k|^q + \mu, & x \in \Omega, \\ u_k = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

với $|||\nabla v_k|||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \leq \lambda_0$.

Hơn nữa, do $\| \nabla v_k \|_{L^r(\Omega)} \leq ||| \nabla v_k |||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)}$ với mọi $q < r < n(q-p+1)$, nên ta suy ra được $\| \nabla v_k \|_{L^r(\Omega)} < \infty$, dẫn đến $\nabla v_k \in L^r(\Omega)$. Từ đó, theo Mệnh đề 2.8 trong (Tran, 2019) ta suy ra có dãy con $\left\{ v_{k_j} \right\}_{j \in N}$ của $\left\{ v_k \right\}_{k \in N}$ hội tụ hầu khắp nơi về ∇v, từ đó dẫn đến dãy ∇v_{k_j} hội tụ mạnh về $L^q(\Omega)$. Vì vậy, dãy ∇v_k hội tụ về ∇v trong $L^q(\Omega)$.

Mặt khác, từ Định lí 3.4 trong (Maso et al., 1999), tồn tại một dãy con $\left\{ u_{k_j} \right\}_{j \in N}$ sao cho $\left\{ u_{k_j} \right\}$ hội tụ về u hầu khắp nơi trong Ω, với u là nghiệm renormalized duy nhất của

$$\begin{cases} -\Delta_p u = b(x) |\nabla v|^q + \mu, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Hơn nữa, ∇u_{k_j} hội tụ về ∇u hầu khắp nơi trong Ω. Tương tự như lập luận trên, u_k hội tụ mạnh về u theo topo $W_0^{1,1}(\Omega)$. Vậy ta đã chứng minh được T là liên tục.

Tiếp theo, để chứng minh $\overline{T(V_{\lambda_0})}$ là tập compact, ta lấy dãy $\left\{ u_k \right\} = \left\{ T(v_k) \right\}$ trong $T(V_{\lambda_0})$ với $v_k \in V_{\lambda_0}, \forall k$. Từ đó, ta cũng có

$$\begin{cases} -\Delta_p u_k = b(x) |\nabla v_k|^q + \mu, & x \in \Omega, \\ u_k = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

với $||| \nabla v_k |||_{L^{n(q-p+1),\infty}(\Omega)} \leq \lambda_0$. Áp dụng kết quả [1, Theorem 3.4], tồn tại một dãy con $\left\{ u_{k_j} \right\}$ và $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ sao cho $\nabla u_{k_j} \to \nabla u$ hầu khắp nơi. Áp dụng Định lí hội tụ Vitali, ta có $\left\{ u_{k_j} \right\}$ hội tụ mạnh về u trong topo $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Bước 4. Như vậy, ta đã chứng minh được có các hằng số dương δ_0 và λ_0 sao cho nếu $||| \mu |||_{L^{\frac{n(q-p+1)}{q},\infty}(\Omega)} \leq \delta_0$, thì ánh xạ $T : V_{\lambda_0} \to V_{\lambda_0}$ liên tục và $\overline{T\left(V_{\lambda_0}\right)}$ là compact dưới topo $W_0^{1,1}(\Omega)$ và V_{λ_0} là tập lồi, đóng. Áp dụng định lí Điểm cố định Schauder, tồn tại một điểm bất động u trong V_{λ_0} của ánh xạ *T*. Điểm bất động u đó cũng chính là nghiệm của (1). Mặt khác, trong chứng minh ở Bước 2 và 3, nghiệm u trên phải thỏa bất đẳng thức (4). Định lí 1.1 được chứng minh hoàn toàn. □

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Bài báo này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, đề tài cấp cơ sở, mã số CS.2018.19.02TĐ.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, *56*, 889-892.

Maso, G. D., Murat, F., Orsina, L., & Prignet, A. (1999). Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (5) (IV)*, *28*, 741-808.

Martio, O. (2011). Quasilinear Riccati type equations and quasiminimizers. *Adv. Nonlinear Stud.*, *11*, 473-482.

Mengesha, T., & Nguyen, C. P. (2016). Quasilinear Riccati-type equations with distributional data in Morrey space framework. *J. Differ. Equ.*, *260*, 5421-5449.

Nguyen, C. P. (2014). Global integral gradient bounds for quasilinear equations below or near the natural exponent. *Ark. Mat.*, *52*, 329-354.

Tran, M. P. (2019). Good-λ type bounds of quasilinear elliptic equations for the singular case. *Nonlinear Anal*, *178*, 266-281.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019). Existence of a renormalized solution to the quasilinear Ricatti-type equation in Lorentz spaces. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, *357*, 59-65.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019). Lorentz-Morrey global bounds for singular quasilinear elliptic equations with measure data. *Commun. Contem. Math.*, 30 pages, to appear.

EXISTENCE OF A RENORMALIZED SOLUTION TO THE P-LAPLACE EQUATION WITH MEASURE DATA IN MARCINKIEWICZ SPACES

Nguyen Thanh Nhan**, Le Duc Viet

Ho Chi Minh City University of Education

**Corresponding author: Nguyen Thanh Nhan – Email: nhannt@hcmue.edu.vn*

Received: June 04, 2019; Revised: June 21, 2019; Accepted: October 30, 2019

ABSTRACT

The aim of this paper is to prove the existence of a renormalized solution to the p-Laplace equation with low-integrability measure data in Marcinkiewicz spaces based on the Schauder fixed point theorem for a continuous map defined on a closed and convex set with the image being a pre-compact set. The gradient estimates for a solution to a class of quasilinear elliptic equations with measure data are applied in this study.

Keywords: renormalized solution; Marcinkiewicz spaces; *p*-Laplace equations